

IMMUE02 -Feuille n°1 . les Equations Différentielles -

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y' + y = x \exp(-x)$$

$$y' + y = x + x^2 \quad (\text{indication : calculer la dérivée de } f(x) = \exp(x) \cdot (a x^2 + b x + c))$$

$$y' + y = \sin(x) \quad (\text{indication : calculer la dérivée de } f(x) = \exp(x) \cdot (a \sin(x) + b \cos(x)))$$

avec les méthodes exposées à la fin du 1^{er} semestre, puis avec la méthode dite « de variation de la constante », qui sera exposé en cours –TD ce début de semestre. Comparez les 2 méthodes.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielle suivantes en utilisant la méthode dite , « de variation de la constante », sur la droite réelle.

$$(E1) \quad y' + y \cdot \tan(x) = 1/\cos(x)$$

$$(E2) \quad y' - 2x \cdot y = 2 \cdot x^3 \quad (\text{indication : chercher une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2})$$

Exercice 3 :

Sur quels intervalles de \mathbf{R} peut-on appliquer le théorème sur la résolution des équations différentielles aux équations suivantes ? Résoudre sur chacun de ces intervalles.

$$(E1) \quad xy' - 2y = x^4$$

$$(E2) \quad x(x+1)(x+2) \cdot y' + 2y = (x+1)^3 \quad (\text{Extrait de l'examen juin 2009})$$

Exercice 4 : Résoudre comme dans l'exercice précédent, puis trouver les solutions définies sur \mathbf{R} des équations différentielles suivantes :

$$(E1) \quad x \cdot y'(x) - y(x) = 0$$

$$(E2) \quad x \cdot y'(x) - 2 \cdot y(x) = 0$$

$$(E3) \quad x \cdot y'(x) + y(x) = 0$$

On trouvera suivant les cas un espace constitué : soit de la fonction nulle, soit des multiples d'une fonction, soit des « combinaisons linéaires » de 2 fonctions.

(facultatif) De la même façon, chercher les éventuelles solutions définies sur \mathbf{R} pour les équations de l'exercice 3.

Exercice 5 : Trouvez toutes les fonctions f dérivables sur \mathbf{R} vérifiant : Pour tout x, y réels : $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Exercice 6 (facultatif) : Réduction d'une équation différentielle linéaire du 2^{ème} ordre à une équation du 1^{er} ordre , dès que l'on connaît une solution qui ne s'annule pas .

Le but est de résoudre sur $]0, +\infty[$; l'équation différentielle suivante

$$(A) \quad x^2 \cdot y''(x) - 5 \cdot x \cdot y'(x) + 9 \cdot y(x) = 0$$

A) Déterminez l'ensemble des solutions polynomiales de (E). (On trouvera que ce sont les multiples de x^3)

B) Soit y une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbf{R} , deux fois dérivable, montrez qu'il existe une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbf{R} , deux fois dérivable telle que : $y(x) = x^3 \cdot u(x)$.

Montrez alors que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si u vérifie : $x \cdot u''(x) + u'(x) = 0$.

C) En déduire toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

On trouvera un espace constitué des « combinaisons linéaires » de 2 fonctions définies sur $]0, +\infty[$.