

Feuille d'exercices 3

DÉRIVATION, ACCROISSEMENTS FINIS, FORMULES DE TAYLOR

Exercice 1. Trouver $\frac{dy_i}{dx}$ et $\frac{d^2y_i}{dx^2}$ dans chacun des cas suivants : $y_1 = \frac{1}{4} \sin^4 2x$;
 $y_2 = \cos^{\frac{2}{3}} 3x (\frac{1}{11} \cos^3 3x - \frac{1}{5} \cos 3x)$; $y_3 = -\frac{1}{4} \cot g^2(x^2 + a^2)$; $y_4 = \frac{e^{ax}(a \sin mx - m \cos mx)}{a^2 + m^2}$;
 $y_5 = \log \sqrt{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}}$; $y_6 = -\frac{1}{4} a^{\cos 2x}$.

Pour des paramètres a, m , réels (on précisera les valeurs permises).

Exercice 2. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

a. $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$, b. $\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 3. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + x}$, b. $f(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$,
c. $f(t) = (t^t)^t$, d. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, e. $f(y) = e^{(y^y)}$, f. $f(p) = pe^{p-1} \sin(p^2 + 1)$.

Exercice 4. Calculer la dérivée par rapport à s puis par rapport à t et finalement par rapport à v de la fonction : $H(s, t, v) = st \ln \left(\frac{s}{t} \right) + \ln \left(\frac{v}{st} \right)$. À chaque fois, les autres variables sont des paramètres fixés.

Exercice 5. Le paramètre a étant fixé, calculer, pour tout n naturel, la dérivée d'ordre n de :

$$f(x) = \sin(ax); \quad f(x) = \cos(ax), \quad f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 6. Trouver $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable pour que la fonction $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$ soit paire. (Indic. donner une équation différentielle pour $y(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$).

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable au point 0, et C une constante, $C > 1$. Montrer que $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(Cx) - f(x)}{x}$ existe. Quelle est la relation entre L et $f'(0)$?

La réciproque pour f continue au point 0 est vraie, mais bien plus difficile.

Exercice 8. a. Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)?$$

Montrer que pour tout x dans l'intervalle $I =]-\infty, 1[$, $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctan x + \pi/4$.

b. La formule est-elle vraie pour $x > 1$? Quelle est la bonne formule?

Exercice 9. Construire la courbe $y = \frac{\sin x}{x^2}$ et montrer qu'elle est tangente à la courbe $y = \frac{1}{x^2}$ partout où elles ont un point commun.

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = 0$. Supposons, en plus, que f est dérivable à gauche en b et $f'_g(b)f(b) < 0$. Montrer qu'il existe c , $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 11. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne (pour un certain réel k) sur l'intervalle I si pour tous $x, y \in I$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.

a. Montrer qu'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne sur \mathbb{R} . La réciproque est elle vraie?

b. Montrer que les fonctions continument dérivables sont toujours lipschitziennes sur les intervalles fermés bornés.

Exercice 12. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que

a. $\forall x \geq 0 \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$, **b.** $\forall x \in [0, 1[\quad x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 13. a. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

b. En déduire que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ et que la fonction $(1 + \frac{1}{x})^x$ est monotone sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 14. Soient $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ existe, alors f est dérivable (à droite) au point a et $f'_d(a) = l$. Utiliser la fonction $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0 pour prouver que la réciproque est fautive.

Exercice 15. Étudier la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$. (Tableau de variations, graphe).

Exercice 16. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = +\infty$. Montrer qu'alors la droite $x = a$ est tangente au graphe de f au point $(x = a, y = f(a))$. Ceci veut dire que, lorsque le point (x, y) du graphe de f s'approche de $(a, f(a))$, la quantité $x - a$ va vers 0 bien plus vite que $y - f(a)$. Précisément, il existe une fonction $\epsilon :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant $\lim_{t \rightarrow a^+} \epsilon(t) = 0$ telle que pour $\delta > 0$ (assez petit) si $a < x < a + \delta$, nous avons $y = f(x)$ si et seulement si $x - a = (y - f(a))\epsilon(y - f(a))$.

Exercice 17. Théorème des Accroissements finis comparés (TAFC). Soient f, g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Vérifier que la fonction auxiliaire $\varphi(t) = (f(b) - f(a))(g(t) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(t) - f(b))$ est dans les hypothèses du Théorème de Rolle. En déduire qu'il existe une constante c , $a < c < b$ telle que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 18. Règle de L'Hôpital $\frac{0}{0}$. Soient f, g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ telles que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x).$$

Supposons que tant $g(x)$ comme $g'(x)$ ne s'annulent pas sur un intervalle de la forme $]a, a + \delta[$ pour $\delta > 0$. **a.** Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe avec $l \in \mathbb{R}$ comme valeur, alors

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et sa valeur est l .

b. Vérifier que c'est encore le cas lorsque $l = +\infty$, ou que $l = -\infty$.

Exercice 19. En utilisant la règle de L'Hôpital, calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$ **b.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$ **c.** $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{\sin^3 x - x^3}.$

Exercice 20. Règle de L'Hôpital $\frac{0}{0}$ à l'infini. Soient f, g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]a, +\infty[$ telles que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x).$$

Supposons que tant $g(x)$ comme $g'(x)$ ne s'annulent pas sur un intervalle de la forme $]K, +\infty[$ pour $K > 0$. **a.** Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe avec $l \in \mathbb{R}$ comme valeur, alors

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et sa valeur est l . **b.** Vérifier que c'est encore le cas lorsque $l = +\infty$, ou que $l = -\infty$.

Exercice 21. Règle de L'Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$. Soient f, g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ telles que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x).$$

Supposons que $g'(x)$ ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]a, a + \delta[$ pour $\delta > 0$.

a. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe avec $l \in \mathbb{R}$ comme valeur, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et sa valeur est l .

b. Vérifier que c'est encore le cas lorsque $l = +\infty$, ou que $l = -\infty$.

Exercice 22. Soit f une fonction continue sur $[a, a + 2h]$ ($h > 0$) dérivable deux fois sur $]a, a + 2h[$. Montrer qu'il existe θ , compris entre 0 et 1 tel que

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + 2\theta h)$$

(Indic. On utilisera sur l'intervalle $[a, h]$ la fonction $\varphi(x) = f(a) - 2f(a+x) + f(a+2x) - Ax^2$ pour la constante A telle que $\varphi(h) = 0$).

Exercice 23. Établir pour $x > 0$ les inégalités :

$$\frac{x^2}{2} < e^x - x - 1 < \frac{x^2}{2} e^x \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

Exercice 24. a. Écrire le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de e^x en 0 et en déduire que $e < 3$.

b. Écrire le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre n de e^x en 0 et en déduire une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Exercice 25. Fonctions strictement convexes. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \neq x$,

$$f(y) > f(x) + (y - x)f'(x).$$

b. Quelle est la position relative du graphe de f par rapport à sa tangente en x ?

c. Montrer que si f admet un minimum, il est unique.

d. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum.

e. Qu'en est-il si l'on admet que la dérivée seconde s'annule sur les valeurs d'une suite sans valeurs d'adhérence, en restant strictement positive partout ailleurs ?

Exercice 26. Donner la formule de Taylor-Young indiquée, des fonctions suivantes :

- (i) $(\cos x) \ln(1 + x)$ à l'ordre 4 en 0;
- (ii) $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 en 0;
- (iii) $\text{Arcsin}(\ln(1 + x^2))$ à l'ordre 4 en 0;
- (iv) $\frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 3 en 0;
- (v) e^{e^x} à l'ordre 2 en 0;
- (vi) $\ln(1 + x + \sqrt{1+x})$ à l'ordre 2 en 0.