

Université Paul Sabatier, Toulouse — L1 UE02-IMM — année 2009-2010
Examen d'Analyse — 1er juillet 2010 — Durée 3 heures

Le sujet est volontairement long et noté sur 25 (5 exercices à 5 points) pour laisser aux candidats le choix des exercices.

Dans l'évaluation de la rédaction, il sera tenu compte de la clarté et de la précision des arguments et des hypothèses, notamment dans l'énoncé des théorèmes utilisés.

I(5 points)

Considérons f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right).$$

1- Montrer que f possède une unique point stationnaire ($f'(t) = 0$), pour $t = 1$. Déterminer la nature de ce point.

2- Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[y(t) - \left(\frac{x(t)}{2} \right)^2 \right]$. Que peut-on en déduire?

3- Montrer que f possède une asymptote D , que l'on précisera, quand $t \rightarrow +\infty$.

4- Tracer, sur un même graphique, l'asymptote D , la courbe : $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$, et la courbe \mathcal{C} définie par f .

II(5 points)

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

1- Montrer que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2- Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et que f' est de signe constant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

III(5 points)

Soit f définie sur $] - 1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1- Donner la formule de Taylor-Lagrange en 0, à l'ordre 2, pour $x \in] - 1, +\infty[$.

2- Montrer, en utilisant la question précédente, que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})| \leq \frac{x^2}{8}.$$

IV(5 points)

Calculer les primitives suivantes : $\int \frac{dx}{(1+x)^2(1+x+x^2)}$, $\int x^3 \ln(x) dx$.

V(5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

1- Montrer, par intégration par parties :

$$(2n-2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(u)]^{2n-2} du = (2n-3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(u)]^{2n-4} du.$$

2- En déduire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2(u)]^{n-1} du = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

3- Énoncer, et démontrer, le théorème de changement de variable sur les intégrales.

4- Montrer que pour $R \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\alpha(R)} (\cos u)^{2n-2} du$$

pour un $\alpha(R)$ que l'on déterminera. [Indication : considérer le changement de variable $f(u) = \tan(u)$.]

5- En déduire que

$$\int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} \longrightarrow \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty$$