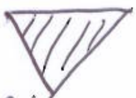
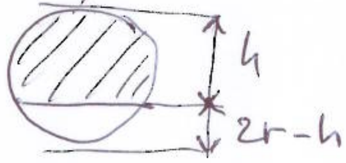
Solution. Bonne rédaction : 1

1. Lorsque $0 \le h \le r$  =  −  =

$2\theta r^2 - (r-h)\sqrt{2rh - h^2}$ où 2θ est l'angle du secteur hachuré. Comme $\cos\theta = \frac{r-h}{r} \in [0,1]$ on obtient $\theta = \arccos\frac{r-h}{r} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. D'où :

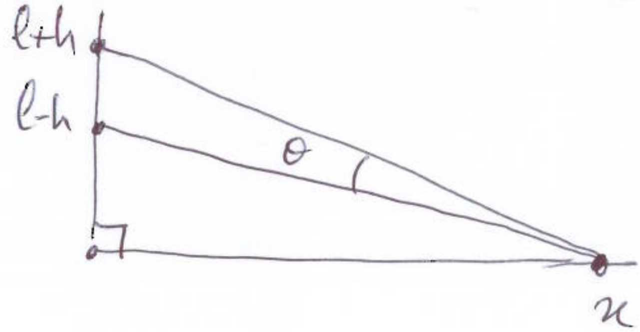
$$\text{Aire}(h) = 2r^2 \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) + r(r-h)\sqrt{2\frac{h}{r} - \left(\frac{h}{r}\right)^2}.$$ 2

Lorsque $r \le h \le 2r$, 

on obtient

$\text{Aire} = \pi r^2 - \text{Aire}(2r-h)$.

---

2. 

$\theta = \arctan\frac{l+h}{x} - \arctan\frac{l-h}{x}$ 2

$\lim\limits_{x\to 0} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} = 0 - 0 = 0$ 1

$$\theta' = 2h\,\frac{(l-h)(l+h) - x^2}{\left(x^2 + (l-h)^2\right)\left(x^2 + (l+h)^2\right)}$$ 2

0		$\sqrt{(l-h)(l+h)}$		∞
	+	0	−	
0	↗		↘	0

1

$\theta_{max} = \arctan\sqrt{\frac{l+h}{l-h}} - \arctan\sqrt{\frac{l-h}{l+h}}$ 1

3. À l'instant $t+\Delta t$ il rentre dans B_1 $h\Delta t$ litres d'eau et il en sort autant partagés en $h\Delta t \frac{v_1(t)}{100}$ vin et $h\Delta t \frac{e_1(t)}{100}$ eau. D'où le bilan

$$v_1(t+\Delta t) = v_1(t) - h\Delta t \frac{v_1(t)}{100} \quad 2$$

Par le même raisonnement

$$v_2(t+\Delta t) = v_2(t) + h\Delta t \frac{v_1(t)}{100} - h\Delta t \frac{v_2(t)}{100} \quad 2$$

De plus 1 $v_1(0) = 100$, $v_2(0) = 0$. On en déduit que

$$1 \quad v_1'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1(t+\Delta t) - v_1(t)}{\Delta t} = \frac{-h}{100} v_1(t)$$

$$1 \quad v_2'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2(t+\Delta t) - v_2(t)}{\Delta t} = \frac{h}{100} v_1(t) - \frac{h}{100} v_2(t)$$

D'où

$$v_1(t) = 100\, e^{-\frac{h}{100}t} \quad 1$$

$$v_2(t) = h t\, e^{-\frac{h}{100}t} \quad 2$$

par une intégration standard.

<u>Remarque</u>. Dans le second exercice θ est maximal lorsque l'arc capable défini par les buts et θ est tangent à la ligne de touche...