UNIVERSITE PAUL SABATIER **L1-IMM UE02**

Épreuve d'évaluation 1, le 4 février 2010. - Corrigé

Les documents ne sont pas autorisés. La qualité et le soin apportés à la rédaction entrent en jeu dans la note finale. Le correcteur retirera des points pour des absurdités et pour le manque de soin.

Votre copie, après correction, vous sera rendue, aucun appel est possible hors délais.

Question de Cours (4 points)

Théorème des valeurs intermediaires (Copie du Polycopié). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ borné ou non, fermé ou non. Pour tout $a, b \in I$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

I (6 points) **2 points par question, dont 1 pour la justification.**

1- Soit $x_0 > 0$, $\quad x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Nous savons que $\alpha > 1$ si et seulement si, $\alpha > \sqrt[3]{\alpha} > 1$. Ainsi, par une récurrence immédiate, $x_0 > 1$ entraine que $x_n > x_{n+1} > 1$ et la suite est décroissante minorée, elle converge. De même, $0 < \alpha < 1$ si et seulement si, $0 < \alpha < \sqrt[3]{\alpha} < 1$ et par une récurrence immédiate, si $x_0 < 1, x_n < x_{n+1} < 1$. La suite alors est croissante majorée, elle converge. Puisque elle constante lorsque $x_0 = 1$, cette suite converge toujours. Par la continuité de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, elle converge vers le point fixe positif, qui est 1.

2-Résoudre : $xy' - 2x^2y = xe^{x^2}$.

L'ESSMA est $xy' - 2x^2y = 0$, c'est-à-dire $y'/y = 2x$. La solution générale est $y_0(x) = ke^{x^2}$, pour k un réel quelconque sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$.

L'équation de la variation de la constante est $xe^{x^2}k' = xe^{x^2}$, dont la solution immédiate est $k(x) = x + k$. La solution générale de notre équation est $y(x) = ke^{x^2} + xe^{x^2}$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{x^2} + xe^{x^2}$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ pour k un réel quelconque et les fonctions $x \mapsto k_1e^{x^2} + xe^{x^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, pour k_1 un réel quelconque.

3- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2(1 - \cos \dfrac{1}{x})$.

C'est facile car $(x \neq 0)$, $|1 - \cos \frac{1}{x}| \leq |1| + |\cos \frac{1}{x}| \leq 2$ ainsi $0 \leq x^2|1 - \cos \frac{1}{x}| \leq 2x^2$, prénant la limite dans cet encadrement nous avons que la limite cherchée est 0.

II (10 points) 5 points par question.

1- Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^2 - x$ est 3-Lipschitzienne sur l'intervalle $[1, 2]$.

Puisque $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, nous avons $|x^2 - x - (y^2 - y)| = |(x-y)(x+y) - (x-y)| = |(x-y)(x+y-1)|$. Or, lorsque $x, y \in [1, 2]$, $2 \leq x + y \leq 4$ ainsi $0 \leq x + y - 1 \leq 3$, et $|(x - y)(x + y - 1)| \leq 3|x - y|$. Nous avons, pour tout $x, y \in [1, 2]$, $|g(x) - g(y)| \leq 3|x - y|$, la fonction g est 3-Lip.

2- Quels sont les points où la fonction $\varphi : x \mapsto xE(x)$ est discontinue ? Justifier !

($E(x)$ est la fonction partie entière de x, le plus grand entier relatif plus petit ou égal à x).

Lorsque $n \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to n^-} xE(x) = \lim_{x\to n^-} x(n - 1) = n^2 - n$, car pour x proche de n mais inférieur à n, $E(x) = n - 1$. De manière similaire, $\lim_{x\to n^+} xE(x) = \lim_{x\to n^+} xn = n^2$, car pour x proche de n mais supérieur à n, $E(x) = n$.

Ainsi, le seul point entier, où notre fonction est continue est le point 0, elle est discontinue en tous les autres points entiers. Elle est continue sur tous les points non entiers de $\mathbb{R}$. En effet, en un point x_0 non entier, la fonction $E(x)$ est constante dans un petit intervalle autour de x_0. La fonction est linéaire dans un petit intervalle autour de x_0 elle est donc continue. En clair, pour $0 < \eta < \min(x_0 - E(x_0), 1 - x_0 + E(x_0))$, si $|x - x_0| < \eta$, $E(x) = E(x_0)$. Ainsi, $\lim_{x\to x_0} xE(x) = \lim_{x\to x_0} xE(x_0) = x_0E(x_0)$, La fonction est continue au point x_0.

Les points de discontinuité de cette fonction, sont exactement les points de $\mathbb{Z}^*$.