

Corrigé de l'épreuve d'évaluation 0 – janvier 2010

Groupe 2 Amphi A, Enseignant : C. A. Roche, Durée 30 minutes

I (12 points) 4 points par question, dont 1 pour la justification.

Calculer les limites suivantes, justifier sommairement.

1- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 5n + 2}{6n - 3n^2 - 1} = -\frac{3}{2}$. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 5n + 2}{6n - 3n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2}}{6\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - 5\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (6\frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{n^2})} = -\frac{2}{3}.$$

2- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$. En effet, Si $n > 20$, $\frac{10}{n} < \frac{1}{2}$, notons M_0 la constante $0 < M_0 = 10^{20}/20!$. Ainsi $0 < \frac{10^n}{n!} = M_0 \prod_{k=21}^n \frac{10}{k} < M_0 (\frac{1}{2})^{n-21} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement, on a démontré.3- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{2 \sin(\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$. En effet, Sont considérées connues les limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. La deuxième se calcule par un argument de géométrie, la première, utilise que la définition du logarithme est d'être la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Puisque $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, en multipliant et divisant par $\frac{1}{n}$, nous avons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{2 \sin(\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$.**II (8 points)** 4 points par question.1- Montrer que la suite $((-1)^{3n})_n$ ne converge pas. La suite extraite des termes pairs converge vers 1 (elle est constante), la suite des termes impairs vers -1 . Si une suite converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite commune. Cette suite ne peut donc être convergente.2- Calculer la première dérivée des fonctions : $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto x^3 - 5x^4 + 12$, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2 \tan x}$. Donner le domaine de définition de la dérivée.L'expression de la dérivée de \tan est $1 + \tan^2$, elle a le même domaine, $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.L'expression de la dérivée de $x \mapsto x^3 - 5x^4 + 12$, est $x \mapsto 3x^2 - 20x^3$. Son domaine est \mathbb{R} .L'expression de la dérivée de $\frac{\cos x}{x^2 \tan x}$ est plus longue à préparer, il est utile de remarquer que $\frac{\cos x}{x^2 \tan x} = \frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x}$. Qui montre, à un prolongement par continuité évident près, la fonction a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.

$$\left(\frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x} \right)' = \frac{-2x^2 \cos x \sin^2 x - (\cos^2 x)(2x \sin x + x^2 \cos x)}{x^4 \sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x^3 \sin^2 x} [x(\sin^2 x + 1) + 2 \cos x \sin x].$$

Le domaine de définition naturel de cette fonction est à nouveau $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.