

1 Rappels : borne supérieure, corps des réels.

1.1 Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

1.2 Soient E un sous-ensemble de \mathbb{R} , et f et g deux fonctions définies et majorées sur E . Montrez que

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

Montrer que l'inégalité peut être stricte (idée : $E = [0, 1]$, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$).

1.3 Déterminer (lorsqu'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants : $]0, 1[$, $]0, 1[\cup]2, 3]$, $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{ne^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{ne^{-n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, et $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$.

2 Rappels : suites.

2.1 Soit $u_n = \sin n$. Montrez qu'elle admet une valeur d'adhérence (ne faites pas de calculs).

2.2 Soit u_n une suite réelle telle que $u_n^2 = \lambda \in \mathbb{R}_+$ pour tout n . Peut-on conclure qu'elle converge ? Vers quelle limite ? Discuter selon les valeurs de λ .

2.3 On se donne $u_0 > 0$, et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $n \geq 0$. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

2.4 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Soit $u_0 > 0$ donné. On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, $n \geq 0$.

(a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite converge, quelle sera la seule limite possible ?

(b) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Conclure.

2.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n := u_n + \frac{1}{n!} \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que u_n et v_n sont des suites adjacentes, strictement monotones. On rappelle que $e = \lim_n u_n$ (base du logarithme naturel).

(b) Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, notons $e = \frac{p}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Comparer u_q , e et v_q .

(c) En déduire une contradiction : on a donc montré que $e \notin \mathbb{Q}$.

3 Rappels : limites.

3.1 Calculer les limites suivantes.

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/x}$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$ (indication : utiliser les formules avec l'angle moitié $x/2$, ou la "quantité conjuguée" $1 + \cos x$).

$\lim_{x \rightarrow 0} xE(\frac{1}{x})$, où $E(y) := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}$.

3.2 Soit f une fonction périodique non constante sur \mathbb{R} . Montrer que la limite de f quand $x \rightarrow +\infty$ n'existe pas.

3.3 On pose $F(x) := \int_0^x \frac{dt}{1+t^5}$. Montrer, sans essayer de calculer l'intégrale, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe (on pourra utiliser le fait que $1 + t^5 \geq 1 + t^2 \geq t^2$, selon les primitives qu'on connaît).

4 Fonctions continues

- 4.1** (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.
(b) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que la fonction qui à x associe $\max\{f(x), g(x)\}$ est continue sur I .
- 4.2** Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum sur \mathbb{R} . (Indication : il faut se ramener à appliquer le théorème de Weierstrass sur un intervalle bien choisi, en éliminant les valeurs de x qui ne peuvent pas concourir pour le minimum).
- 4.3** Montrer que tout polynôme de degré impair est surjectif sur \mathbb{R} .
- 4.4** Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$, et injective sur cet intervalle. Montrer que f est monotone (on pourra procéder par contradiction et exploiter le théorème des valeurs intermédiaires).
- 4.5** Un mobile parcourt 2 mètres en 2 secondes. Sa position est une fonction continue du temps. Montrer qu'il existe un temps t_0 tel que le mobile a parcouru exactement 1 mètre entre t_0 et $t_0 + 1$ (temps mesuré en secondes).
- 4.6** (a) Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
(b) soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f([a, b]) = g([a, b])$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. (Indication : montrer que si ce n'était pas le cas on aurait, quitte à échanger les rôles de f et g , $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, et en déduire une contradiction).
- 4.7** (a) Montrer que la fonction $f(x) = \ln x$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
(b) Montrer que la fonction $f(x) = e^x$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .
(c) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$.
- 4.8** Soit f une fonction uniformément continue sur \mathbb{R} .
(a) Montrer qu'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $|f(x)| \leq A + B|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x^2)$ est bornée, mais pas uniformément continue sur \mathbb{R} .
- 4.9** Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(ax) = af(x)$.
(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(ax) = af(x)$.
- 4.10** (a) Soit $a > 0$ un nombre irrationnel. Montrer que si une suite de rationnels p_n/q_n (avec p_n et $q_n \in \mathbb{N}$ et $q_n \neq 0$) a pour limite a alors $q_n \rightarrow \infty$.
(b) On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ lorsque a est irrationnel.
(c) Montrer que f est discontinue en tout a rationnel (choisir judicieusement deux suites dont la limite est a).