Corrigé du devoir à la maison d'Analyse # 3 — de la semaine du 15 au 19 mars 2010

I

Données $(x_n)_n$ telle que $0 < x_n \to 0$ décroissante et la suite $u_n = \sum_{p=n_0}^{n} (-1)^p x_p$, $\quad$ (n_0 donné fixé).

1) Nous avons $u_{2n+2} - u_{2n} = x_{2n+2} - x_{2n+1}$ qui est strictement négatif parce que $(x_n)_n$ est strictement décroissante. La suite $(u_{2n})_n$ est bien une suite décroissante. De même $u_{2n+1} - u_{2n-1} = -x_{2n+1} + x_{2n}$ qi est strictement positif. La suite $(u_{2n+1})_n$ est une suite croissante et les deux premières inégalités sont démontrées.

Or $u_{2n} - u_{2n-1} = x_{2n} \to 0^+$, donc $u_{2n-1} < u_{2n}$. C'est un couple de suites adjacentes.

2) C'est connu, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont toutes deux convergentes et elles ont la même limite, que l'on notera u. Nous avons pour chaque n, $u_{2n+1} < u < u_{2n}$. Il ne reste à démontrer que la suite $(u_n)_n$ est toute entière convergente, sa limite sera u tout naturellement. Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous pouvons prendre N tel que si $n > N$, $|u_{2n+1} - u| < \varepsilon$ et un N' tel que si $n > N'$, $|u_{2n} - u| < \varepsilon$, en prennant $M = 2\max(N, N') + 1$, nous avons que si $l > M$, si l est pair, $l/2 > N$, et $|u_l - u| < \varepsilon$, ou, si l est impair et $(l-1)/2 > N'$ et aussi $|u_l - u| < \varepsilon$. La convergence à u est démontrée.

3) Evidemment, $u_{2l+1} < u < u_{2l+2} < u_{2l}$ pour chaque l. Ainsi lorsque n est pair, $n = 2l$, $|u - u_{2l}|$ est plus petit que $u_{2l} - u_{2l+1} = x_{2l+1} = x_{n+1}$. Et lorsque n est impair, $n = 2l+1$, $|u - u_{2l+1}|$ est plus petit que $u_{2l+2} - u_{2l+1} = x_{2l+2} = x_{n+1}$.

4) Considérons le cas particulier, pour la donnée de x, $0 < x < 1$, avec $x_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $n_0 = 0$. La suite x_n est strictement décroissante, de limite 0, on définit u_n et sa limite u, comme ci-dessus.

i)Taylor-Lagrange pour le sinus nous donne : qu'il existe $0 < c < x$ tel que $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin c$ et clairement si $u = \lim_{n\to+\infty} u_n$ (qui existe d'après la discusion précedente), il suffira de prouver que $u = \sin x$ pour pouvoir dire que $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ avec une erreur majorée par $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ pour chaque $0 < x < 1$.

Or $|\sin x - u_n| = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} |\sin c| \le \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$ qui va vers zéro, dès que $|x| < 1$, u et $\sin x$ sont le même nombre. (On dit que la fonction sin est analytique].

ii) Pour donner la valeur de $\sin \frac{1}{10}$ à 10^{-6} près il suffirait d'avoir $\frac{10^{-2n-3}}{(2n+3)!} < 10^{-6}$, à tatons, puisque $n = 0$ ne suffit pas ($10^{-4}/12 > 10^{-6}$), nous calculons, et l'on voit que $n = 1$ suffit, $10^{-5}/5! = 10^{-6}/12 < 10^{-7}$. Ainsi, $\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0.099833$ à 10^{-6} près. La calculette de mon système Linux m'affiche $\sin(1/10) = 0.09983341664682815231072685047131187729974$.

iii) Le developpement de Taylor nous donne qu'en principe $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ plus un reste. Il faut contrôler ce reste si l'on veut avoir que la limite u de le suite des u_n construite avec les $x_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (qui est bien strictement décroissante, de limite zéro pour $0 < x < 1$), soit le nombre $\arctan x$.

Pour cela nous revenons au calcul même de ce développement de Taylor-Young. Ainsi puisque la dérivée de $\arctan x$ est $\frac{1}{1+x^2}$, et que l'expression algébrique élémentaire : $(1+x^2)(1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n}) = 1 + (-1)^n x^{2n+2}$ divisée par $1 + x^2$ nous donne :

$$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

En prenant la primitive qui vaut 0 en 0 :

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

Puisque $0 < x$, $\frac{1}{1+x^2} < 1$, ainsi l'erreur $\int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$ est majorée par $\int_0^x x^{2n+2} dx = x^{2n+3}/(2n+3)$. Nous avons $|\arctan x - u_n| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Et $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, plus un reste majoré par $x^{2n+3}/(2n+3)$ si $0 < x < 1$. Pour $x = \frac{1}{5}$, le reste devient plus petit que $\frac{1}{1000}$ dès que $n = 1$, puisque le majorant est $\frac{1}{5^6} = \frac{8}{125} \frac{1}{10^3} < 10^{-4}$.

$$\arctan \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} = \frac{74}{375} \approx 0,197 \quad \text{au milième près.}$$

II Si l'on cherche à exploiter le développement de Taylor de arctan pour avoir un calcul approché de π on peut remarquer que $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. Mais $x = 1$ est bien loin de nous donner le terme $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ décroissant rapidement vers 0 que l'on souhaite. En première approche, il semble qu'il faille 500 termes pour avoir la valeur à 10^{-3}−près ! On cherche donc ici à exprimer $\frac{\pi}{4}$ (d'après une idée de J. Machin, 1706), sous la forme

$$\frac{\pi}{4} = m\alpha + \beta,$$

avec $m \in \mathbb{N}, \alpha$ et β astucieux, connus uniquement d'après leurs tangentes : $x = \tan\alpha,\ x' = \tan\beta$, puis utiliser

$$\pi = 4\{m \arctan(\tan\alpha) + \arctan(\tan\beta)\}.$$

On donnera $\alpha > 0$ par sa tangente (petite), on déterminera m entier tel que $|\beta| < \alpha$ pour faire des calculs explicites avec des erreurs contrôlées.

0) Etablir : $\tan(p+q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q}$, est facile : $\tan(p+q) = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p+q)} = \dfrac{\cos p \sin q + \sin p \cos q}{\cos p \cos q - \sin p \sin q} =$

$$= \frac{\frac{\cos p \sin q}{\cos p \cos q} + \frac{\sin p \cos q}{\cos p \cos q}}{1 - \frac{\sin p \sin q}{\cos p \cos q}} = \frac{\frac{\sin q}{\cos q} + \frac{\sin p}{\cos p}}{1 - \frac{\sin p}{\cos p}\frac{\sin q}{\cos q}} = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q}.$$

Pour que le premier membre soit défini, il faut (et il suffit) que $p + q - \frac{\pi}{2}$ ne soit pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$, pour que le deuxième membre soit défini, il faut (et il suffit) que ni $p - \frac{\pi}{2}$ ni $q - \frac{\pi}{2}$ soient multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. L'ensemble des paramètres permis **est** le plan des (p,q), **sauf** les droites verticales d'équation $p = \frac{\pi}{2} + s\frac{\pi}{2}$, **sauf** les droites d'équation $q = \frac{\pi}{2} + s\frac{\pi}{2}$ et **sauf** les droites obliques d'équation $q = s\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - p$, et ce pour chaque $s \in \mathbb{Z}$.

1) Puisque $\beta = \frac{\pi}{4} - m\alpha$, la formule précedente (pour $|\alpha| < \frac{\pi}{4m}$), donne $\tan\beta = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan(-m\alpha)}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan(-m\alpha)} = \dfrac{1 - \tan m\alpha}{1 + \tan m\alpha}$, comme demandé, car $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et la fonction tan est impaire.

3) La formule de Taylor de $\arctan x$ permet de considérer la suite $u_n = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, et avoir $|\arctan x - u_n| \leq \frac{1}{2n+3}x^{2n+3}$, au point $x = \tan\alpha$, comme établit en I, 3. Ainsi $\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, est une expression approchée de $\arctan x$ d'erreur inférieure à $\frac{1}{2n+3}x^{2n+3}$, qui es petite si $0 < x < 1$ et n grand.

4) Supposons ici, $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ choisi.

i) Le calcul $\tan 2\alpha = \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$ est évident

autant que celui de $\tan 4\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \dfrac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \dfrac{120}{119}$.

Enfin, puisque $\tan 4\alpha > 1,\ 4\alpha > \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

ii) Pour $m = 4$, nous avons $\tan\beta = \dfrac{1 - \tan m\alpha}{1 + \tan m\alpha}$, c'est-à-dire ici : $\tan\beta = \dfrac{1 - \frac{120}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = -\dfrac{1}{239}$.

Or $\pi = 4\{m \arctan(\tan\alpha) + \arctan(\tan\beta)\}$, pour $m = 4, \tan\alpha = \frac{1}{5}$ et $\tan\beta = -\frac{1}{239}$, nous avons

$$\pi = 16 \arctan\frac{1}{5} - 4 \arctan\frac{1}{239}$$

5) Nous avons $\arctan\frac{1}{5} \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7\times 5^7} = 0,197395504$, avec une erreur inférieure à : $\frac{1}{9\times 5^9}$. De même $\arctan\frac{1}{239} \approx \frac{1}{239} = 0,004184100$ avec une erreur majorée par $\frac{1}{3\times(239)^3}$. Ainsi,

$$\pi \approx 16 \times (\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7\times 5^7}) - 4 \times \frac{1}{239} \approx 16 \times 0,197395504 - 4 \times 0,004184100 \approx 3,141591$$

avec une erreur majorée par $16 \times \frac{1}{9\times 5^9} + \frac{4}{3\times(239)^3} \approx 1,007 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}$.

(Il va sans dire que l'on vérifie, d'après une source du domaine public, que ce résultat est correct. Archimède avait proposé $\frac{22}{7} \approx 3,1428$, Adrien Métius (Flamand 1571-1635), $\frac{355}{113} \approx 3,141592$ donnant 6 décimales exactes. Il propose la méthode : "écrire deux fois les trois premiers nombres impairs : 1 1 3 3 5 5 et former le quotient des trois derniers sur les trois premiers".

On peut réflechir, ce que la méthode exposée peut donner si l'on cherchait une précision de 10^{-100} (exploit réussi par John Machin en 1706 à l'aide de plus de 60 termes), ou de $10^{-(10^{100})}$. Ce défi n'est pas encore relevé. Vous réussirez peut-être un jour. Mais avec une autre méthode car la formule de John Machin (UK 1680-1751) se heurte à d'autres problèmes; par exemple le "codage" de $\left(\frac{1}{5}\right)^{10^{10}+1}$ en décimal.)

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,
Immortel Archimède, illustre inventeur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème est de pareils avantages.