UNIVERSITE PAUL SABATIER Octobre 2008-09

Licence de Mathématiques Fondamentales, L3

Examen partiel d'analyse matricielle et modélisation

Aucun document n'est admis, durée 2 heures

Les résultats des questions Hors Barème (**HB**) peuvent être utilisées,
puis, ces questions traitées en fin d'examen en fonction du temps disponible.
Le barème indicatif est en **gras**, les questions 1), 2, 3) sont indépendantes.

Nous notons $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de matrices carrées de taille n, $U_n(\mathbb{C})$ celles qui sont unitaires, et enfin, les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont des vecteurs colonne.

Une norme matricielle $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{C})$ est dite $U_n(\mathbb{C})-$invariante si $||UA|| = ||AU|| = ||A||$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ chaque fois que U est unitaire.

3 points. 1- Donner, parmi les normes matricielles classiques, deux exemples de norme matricielle $U_n(\mathbb{C})-$invariante. Détailler, pour l'une d'entre elles (de votre choix), la preuve de cette invariance.

4 points. 2- Supposons donnée une norme matricielle $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})-$invariante.

a) Pour chaque $X \in \mathbb{C}^n$, notons $dia(X^T)$ la matrice diagonale de taille n qui a les composantes de X sur la diagonale. Notons $N(X)$ le nombre $||dia(X^T)||$. Montrer que $N(X)$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$.

b) Pour chaque $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note $A = HU$ avec H hermitienne semi-définie positive et U unitaire, une factorisation polaire de A. Si l'on note $s(A) = (s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A))^T \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de H, répétées selon leur multiplicité et rangées dans un ordre arbitraire, montrer

$$||A|| = N(s(A)).$$

3- Soit S_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $\sigma \in S_n$ et chaque $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la matrice $A_{\hat{\sigma}} = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad \sigma(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On remarquera que la matrice $A_{\hat{\sigma}}$ a, au plus n éléments non-nuls, et que ces éléments sont ceux de A aux mêmes places.

4 points. a) Notons $\mathbb{E}_{ij}$ la matrice élémentaire $(\mathbb{E}_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, et considérons $\sigma \in S_n$.

i) Montrer que $(\mathbb{E}_{ij})_{\hat{\sigma}} = \mathbb{E}_{ij}$ si $\sigma(j) = i$, et la matrice 0 sinon.

ii) Montrer que $A \mapsto A_{\hat{\sigma}} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ est linéaire.

iii) Montrer que si $A = (a_{ij})$, $\quad A_{\hat{\sigma}} = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}\mathbb{E}_{\sigma(j)j}$.

iv) Montrer que si l'on note id l'identité de S_n, nous avons pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A_{\hat{id}} = D(A),$$

la matrice diagonale obtenue en ne gardant ($\neq 0$) que les éléments de A sur la diagonale.

1 point. b) Pour tout $\sigma \in S_n$, notons P^σ la matrice (dite de permutation) donnée par $(P^\sigma)_{ij} = 1$ si $\sigma(i) = j$, et 0 sinon.

i) Montrer que ces matrices sont unitaires.

ii)(**HB**) Montrer pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$(AP^{\sigma^{-1}})_{\hat{id}}P^\sigma = A_{\hat{\sigma}}.$$

6 points. c) Soit ω la racine $n-$ième de l'unité : $\omega = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}$, et U_ω la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

i) Montrer que U_ω est unitaire, $U_\omega^l = U_{\omega^l}$, $U_\omega^{*l} = U_{\omega^{-l}}$ pour $l \in \mathbb{N}$.

ii) Calculer pour une matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$, l'élément $(U_\omega^{*l}BU_\omega^l)_{ij}$ pour chaque i, j, l, en déduire (**HB**) l'identité

$$B_{\hat{id}} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} U_\omega^{*l}BU_\omega^l.$$

(On pourra utiliser que si $i \neq j$, ω^{j-i} est racine de $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = 0$.)

iii) En déduire que $||B_{\hat{id}}|| \leq ||B||$, si $||\cdot||$ est $U_n(\mathbb{C})-$invariante.

2 points. d) Conclure en montrant que si $||\cdot||$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})-$invariante, pour tout $\sigma \in S_n$, et toute $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\quad ||A_{\hat{\sigma}}|| \leq ||A||$.