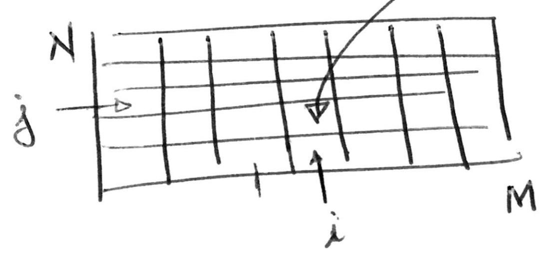
1-4 Lemme de Greene (Curtis)

Ce lemme donne (enfin) le lien entre DLPP et RSK. Comme input de la correspondance, nous prenons la matrice d'environnement

$$\mathcal{M}_{M,N} = (w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}}$$

$w_{ij} \in \mathbb{N}$
$\equiv$ Nombre de j à insérer dans le i^e mot / la i^e colonne

$=$ 

Lemme de Greene

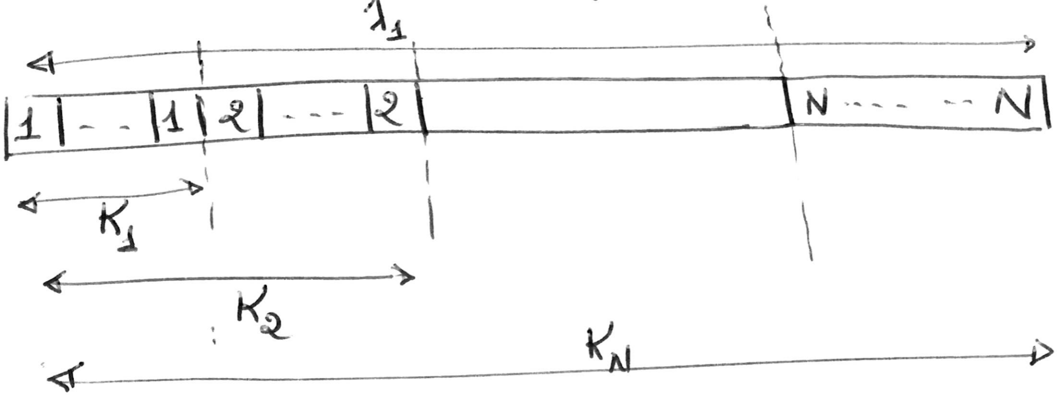
$$\boxed{\begin{aligned} L_{M,N} &= \max_{\pi : (1,1) \to (M,N)} \sum_{(ij)\in\pi} w_{ij} \\ &= \lambda_1 \left[RSK\left((w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}} \right) \right] \end{aligned}}$$

<u>Preuve</u> : Il suffit d'appliquer la correspondance de RSK avec l'environnement $(w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}}$ et observer la première ligne du tableau P.

Nous raisonnons par récurrence sur M, en insérant colonne par colonne.

Notation : En lisant la première ligne du tableau

P :



Remarque importante :

$$\forall\, 1 \leq J \leq N, \quad K_J\Big[RSK\Big((w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}} \Big) \Big]$$

$$\underset{=}{(!)} \quad K_J\Big[RSK\Big((w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq J}} \Big) \Big]$$

$$\underset{=}{\text{def}} \quad \lambda_1\Big[RSK\Big((w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq J}} \Big) \Big]$$

Preuve : Augmenter N dans RSK (ou RS) revient à augmenter le nombre de lettres. Tant que l'on s'intéresse uniquement à la première ligne, on peut faire l'insertion de RS avec un grand nombre de lettres N, n'en garder que J à posteriori.

Il nous suffit donc de prouver :

$$\forall\, M \geq 0,\ 0 \leq J \leq N, \quad L_{M,J} = K_J\Big[RSK\, (w_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}} \Big]$$

Par récurrence sur M !

• $\underline{M = 1}$ $\quad L_{1,J} = \sum_{j=1}^{J} w_{1,j}$, exactement ce qui est obtenu en insérant $w_{1,1}$ fois la lettre 1,

$\omega_{1,2}$ fois la lettre 2, etc ....

- Supposons maintenant le lemme de Greene vrai pour M. Pour produire le résultat de $RSK\left[(\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M+1\\1\leq j\leq N}}\right]$ à partir de $RSK\left[(\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M\\1\leq j\leq N}}\right]$, on insère la dernière colonne identifiée au mot :

$$m = \underbrace{1\cdots 1}_{\substack{\omega_{M+1,1}\\ \| \\ m_1}} \,|\, \underbrace{2\cdots 2}_{\substack{\omega_{M+1,2}\\ \| \\ m_2}} \,|\, \cdots \,|\, \underbrace{N\cdots N}_{\substack{\omega_{M+1,N}\\ \| \\ m_N}} =$$

$$K_1 \xrightarrow{m_1} K_1' = m_1 + K_1$$

$$K_2 \xrightarrow{m_2} K_2' = m_2 + \max(K_2, K_1')$$

dans le cas où l'insertion de 1 a repoussé K_2

$$= m_2 + \max(K_2, K_1 + m_1)$$

$$= \max(K_2 + m_2, K_1 + m_1 + m_2)$$

Par une récurrence facile

$$K_J' = \max_{1\leq i\leq J} (K_i + m_i + m_{i+1} + \cdots + m_J)$$

$$= K_J\left[RSK\left((\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M+1\\1\leq j\leq N}}\right)\right]$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence :

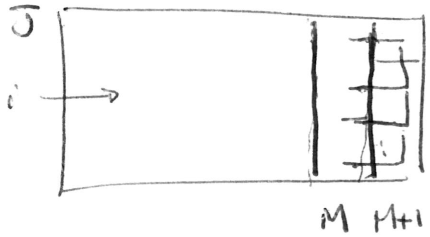
$$K_J' = \max_{1\leq i\leq J}\left[L_{M,i} + m_i + m_{i+1} + \cdots + m_J\right]$$

$$= \max_{1\leq i\leq J}\left[L_{M,i} + \omega_{M+1,i} + \omega_{M+1,i+1} + \cdots + \omega_{M+1,J}\right]$$

La question devient

$$K'_J = \max_{1 \leq i \leq J} \left[L_{M,i} + w_{M+1,i} + \dots + w_{M+1,J} \right]$$

$$\overset{?}{=} L_{M+1,J}$$



$$= w_{M+1,J} + \max L_{M,J}, L_{M+1,J-1}$$

$$= \max_{1 \leq i \leq J} \left[L_{M,i} + w_{M+1,i} + \dots + w_{M+1,J} \right] \quad \text{OK}$$

$\boxtimes$

2 - ~~Le~~ processus de Schur

Le nom "processus" est trompeur car il s'agit juste d'un processus ponctuel sur $\mathbb{Z} + 1/2$ introduit par Okounkov à la fin des années 90.

Rappel: En général un processus ponctuel X sur un espace E est une mesure aléatoire de masses de Dirac

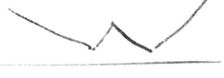
$$X = \sum_i \delta_{x_i}$$ où $X(B) = \#\{ i \mid x_i \in B \}$, B borel $\subset E$ et $X(B) < +\infty$ $\forall B$ compact

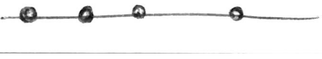
Ici on fait l'identification

Configuration de points sur $\mathbb{Z} + 1/2$ $\longleftrightarrow$ Partition $\lambda \in \mathbb{Y}$

$$\{x_i\} \subset \mathbb{Z} + 1/2 \longleftrightarrow \{ \lambda_i - i + 1/2 \}$$

Exercice: Se convaincre que c'est l'identification ~~corner gr~~ TASEP $\longleftrightarrow$ corner growth vue au chap 1.





Avant la définition, nous aurons besoin d'une formule

Thm [Formule de Cauchy] $|x_i|, |y_j| < 1$

$$\mathcal{Z} := \prod_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}} \frac{1}{1-x_iy_j} \underset{\text{résultat}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} s_\lambda(x)\, s_\lambda(y)$$

Preuve : Par ~~RSK~~ RSK. Plus en détail

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} s_\lambda(x)\, s_\lambda(y) \underset{\substack{\text{def}\\ \text{Combinatoire}\\ \text{des Schur}}}{=} \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} \Bigg(\sum_{\substack{P\in SST(A_N)\\ sh P=\lambda}} x^{wt(P)}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{Q\in SST(A_M)\\ sh Q=\lambda}} y^{wt(Q)}\Bigg)$$

$$= \sum_{\substack{(P,Q)\in SST(A_N)\times SST(A_M)\\ shP=shQ}} x^{wt(P)} \times y^{wt(Q)}$$

$$\overset{RSK^{-1}}{=} \sum_{A\in\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{N})} \Big(\prod_i x_i^{\sum_j A_{ij}}\Big)\times\Big(\prod_j y_j^{\sum_i A_{ij}}\Big)$$

$$= \sum_{A\in\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{N})} \prod_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}} (x_iy_j)^{A_{ij}}$$

produit sur chaque singleton

espace produit

$$= \prod_{\substack{1\leq i\leq M\\ 1\leq j\leq N}} \Bigg[\underbrace{\sum_{a_{ij}=0}^{+\infty} (x_iy_j)^{a_{ij}}}_{\frac{1}{1-x_iy_j}}\Bigg]$$

série géométrique

∎

La définition du processus de Schur devient une tautologie :

<u>Def</u>: Le processus de Schur de paramètres $\begin{cases} x = (x_i)_{1\leq i\leq N} \\ y = (y_j)_{1\leq j\leq N} \end{cases}$

est la loi de proba sur $\mathbb{Y}$

donnée par $\mathbb{P}(\lambda) = \frac{1}{Z} s_\lambda(x)\, s_\lambda(y)$

Ce processus a été introduit par Okounkov pour ses

~~Maintenant vient le petit miracle algébrique~~

~~de la loi géométrique~~ multiples liens avec la th. des représentations, les EDP dispersives etc...

Je recommande le papier " Okounkov - Infinite wedge & random partitions" où les propriétés déterminantales de ce processus sont démontrées.

Maintenant vient le petit miracle algébrique de la loi géométrique :

$$\frac{1}{Z} = \prod 1 - x_i y_j$$
$$= (1-q)^{NM}$$

<u>Lemme</u>: Si $(\omega_{ij}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Geom}(q)$

Alors $sh\left(RSK(\omega_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Schur}\left(x = \sqrt{q}\,\mathbb{1}_N,\ y = \sqrt{q}\,\mathbb{1}_M\right)$

<u>Preuve</u>: $\mathbb{P}\left(sh(RSK(\omega_{ij})) = \lambda\right)$

$$\stackrel{\forall a_{ij}}{=} \sum_{\substack{(P,Q) \\ shP = shQ = \lambda}} \mathbb{P}\left(\underbrace{RSK(\omega_{ij}) = (P,Q)}_{\omega_{ij} = RSK^{-1}(P,Q) = a_{ij}}\right)$$

$$= \sum_{A = (a_{ij})\ shP = shQ} (1-q)^{NM}\, q^{\sum_{ij} a_{ij}} = \frac{s_\lambda(x)\, s_\lambda(y)}{Z}$$

⚠ $q^{\sum_{ij} a_{ij}}$
$= \prod_i (\sqrt{q})^{\sum_j a_{ij}} \times \prod_j (\sqrt{q})^{\sum_i a_{ij}}$
$= x^{wt(P)}\, y^{wt(Q)}$