1 - 3 La correspondance de Robinson-Schensted-Knuth

Théorème [RSK]

Il existe une bijection

$$RSK : \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{N}) \xrightarrow{\sim} \{ (P,Q) \in SST(\mathbb{A}_N) \times SST(\mathbb{A}_M) \mid sh P = sh Q \}$$

Ayant les propriétés suivantes,

si $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq N}}$

$RSK(\mathcal{M}) = (P,Q)$

Alors
- $wt(P)_i = \sum_{j=1}^{M} \mathcal{M}_{ij}$
- $wt(Q)_j = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_{ij}$
- $\mathcal{M}$ matrice de permutation $\Leftrightarrow$ P, Q ST
- $\mathcal{M}$ matrice de $\{0,1\}$ $\Leftrightarrow$ $(P,Q) \in SST \times ST$

Ce théorème découlera d'une discussion le long d'un certain nombre de paragraphes.

§1. L'ancêtre : Robinson - Schensted

Pour décrire RSK, décrivons d'abord une bijection

$$RS : \mathbb{A}_N^M \xrightarrow{\sim} \{ (P,Q) \in SST(\mathbb{A}_N) \times ST(\mathbb{A}_M) \mid sh P = sh Q \}$$

$$m \longmapsto (P(m), Q(m))$$

mots de longueur M

(*)

Le tableau
- $P(m)$ est obtenu en insérant le mot m par "jeu de taquin"
- $Q(m)$ est un tableau d'enregistrement décrivant la croissance de P

(*) : Condition supplémentaire : Dans Q, chaque lettre apparaît exactement une fois

$m = m_1 m_2 \cdots m_M$

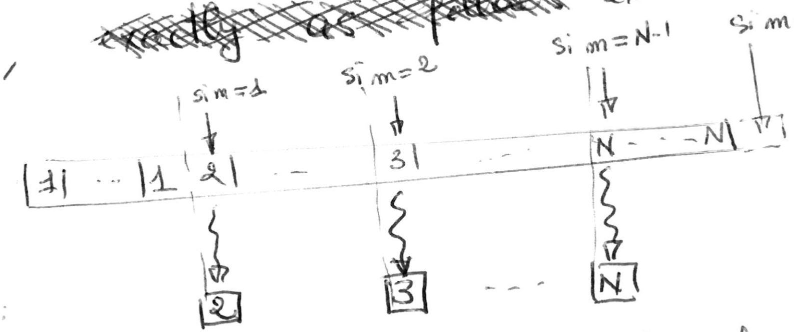
$$\emptyset, \emptyset \xrightarrow{m_1} (P_1, Q_1) \xrightarrow{m_2} \cdots\cdots \xrightarrow{m_M} (P_M, Q_M) = (P(m), Q(m))$$

Description de la procédure d'insertion :

$(P,Q) \xrightarrow{m} (P', Q')$? $*$ $Q \to Q'$: Ajouter la lettre $\boxed{\ell}$ à la case où P a grandi.

m_ℓ

$*$ $P \to P'$: Pour la première ligne de P, insérer la lettre $m_\ell = m$ de façon à préserver l'ordre (au sens large), ~~exactly as follows~~ exactement comme suit



Retenue :

Dans le cas où m s'insère à la place d'une case existante, il y a une retenue

La retenue est insérée à la ligne suivante conformément à la même procédure.

<u>Ex</u> : $m = 5\,4\,8\,2\,3\,4\,1\,7\,5\,3\,1$

$$P : \emptyset \xrightarrow{5} \begin{array}{l} 5 \end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{8} \begin{array}{ll} 4 & 8 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{ll} 2 & 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{ll} 2 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 \end{array}$$

$$\xrightarrow{4} \begin{array}{lll} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{7} \begin{array}{llll} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 8 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

$$\xrightarrow{5} \begin{array}{llll} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{llll} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{llll} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 8 \end{array}$$

$Q =$

1	3	6	8
2	5		
4	9		
7	10		
11			

Lemme:

> $RS : m \longmapsto (P(m), Q(m))$
>
> est une bijection

Preuve: Il suffit de voir que la procédure d'insertion peut-être renversée: $(P(m), Q(m)) \xrightarrow{m_M} (P', Q')$

- considérer la plus grande entrée de Q.
  Cela donne M et l'entrée de P qui a été rajoutée en dernier.
- Faire l'insertion de cette lettre en sens inverse dans le tableau P. ∎

Propriété: Si chaque lettre n'apparait qu'une seule fois,

> - le mot m s'identifie à une permutation de $\mathfrak{S}_M$
>
> $\cap$ A_N^M
> - (P, Q) sont standards

§2. La généralisation de Knuth.

L'idée de base est simple. Afin de généraliser et permettre $(P,Q) \in SST(A_N) \times SST(A_M)$, remarquons que la procédure inverse à RS consiste à essentiellement choisir l'unique + grande entrée de $Q \in ST(A_M)$ et faire l'insertion inverse dans P.

Si $Q \in SST(A_M)$, il suffit de choisir une plus grande entrée. On choisira celle la plus à droite.

Si $k = |\lambda| = |\mathrm{sh}\, P|$ — lettres extraites de (P_k, Q_k) respectivement

$$(P,Q) = (P_k, Q_k) \xrightarrow{(m_k, n_k)} (P_{k-1}, Q_{k-1})$$

$$\xrightarrow{(m_{k-1}, n_{k-1})} (P_{k-2}, Q_{k-2})$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow{(n_1, m_1)} (\emptyset, \emptyset)$$

On obtient $m = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k \end{pmatrix}$ avec n_i croissant (au sens large)

<u>Remarque</u>: Si Q standard à $k = M$ lettres, chacune n'apparaissent qu'une fois, alors

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k \end{pmatrix}$$ est tel et bien un mot

<u>Affirmation (Admise)</u>: $n_i = n_{i+1} \Rightarrow m_i \leq m_{i+1}$

(Hint : Observer la procédure d'insertion inverse).

Au final l'ensemble naturel auquel m appartient est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} m = \begin{pmatrix} n_1 & \cdots & n_k \\ m_1, & \cdots & m_k \end{pmatrix} & \text{pour un certain } k \\ m_i \in A_N & ; \quad n_i \leq n_{i+1} \ ; \quad n_i = n_{i+1} \Rightarrow m_i \leq m_{i+1} \\ n_i \in A_M & \end{array} \right\}$$

$\underline{\simeq}$ $\mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{N})$ où $m \mapsto \mathcal{M} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{N})$ s'obtient comme suit :

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_R \\ m_1 & \cdots & m_R \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & & N & \cdots & N \\ & \underbrace{*}_{} & & & * & & \cdots & & * & \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ Encodé dans la colonne $\mathcal{M}_1$

avec $(\mathcal{M}_1)_i = \#\{ i \mid i \text{ dans } * \}$

Ex: $m = \begin{pmatrix} 1\,1\,1 & 2\,2 & 3\,3\,3\,3\,3 \\ 1\,2\,2 & 1\,2 & 1\,1\,1\,1\,2 \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{M}$

$$= \begin{array}{c|ccc|} N=2 & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & \cdots & M=3 \end{array}$$

En conclusion

$$\text{RSK}: \quad \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{N}) \xrightarrow{\sim} \left\{ (P,Q) \in SST(A_N) \times SST(A_M) \;\middle|\; sh P = sh Q \right\}$$

$$\mathcal{M} \longmapsto (P,Q)$$

s'obtient • en insérant $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_M)$ colonne par colonne par jeu de taquin pour obtenir P.

Chaque colonne $C \in \mathbb{N}^N$ est identifiée à un mot $\# i = C_i$

• Dans le tableau d'enregistrement Q, on enregistre à la case de croissance le numéro de la colonne.

On en déduit assez simplement:

$$wt(P)_i = \#\{ i \text{ dans le tableau } P \}$$
$$= \sum_{j=1}^{M} (\mathcal{M}_j)_i = \sum_{j=1}^{M} \mathcal{M}_{ij}$$

$$\mathrm{wt}(Q)_j = \# \{ j \text{ dans le tableau } Q \}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{M}_j)_i = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{M}_{ij}$$

VI

$\boxed{\text{viii}}$