Séance 7:



Rappel de l'énoncé de la dernière fois

Thm : $x \in \mathbb{C}^N$, $\lambda \in \mathbb{Y}$, $\ell(\lambda) \leq N$

Alors la fonction de Schur est donnée par

$$s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)}$$

$$= \sum_{\substack{P \in SST(A_N) \\ sh P}} x^{wt(P)} \quad \text{où } A_N = \{1, 2, \dots, N\}$$

Travail préparatoire pour la preuve:

Soit $$\mathcal{S}_\lambda(x) = \sum_{P \in SST(A_N)} x^{wt(P)} \stackrel{?}{=} s_\lambda(x)$$

→ Déjà pourquoi cela serait-il symétrique ?

Montrons cela directement par un argument bijectif. $$\mathcal{S}_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} x^\alpha \, \# \widetilde{T}_{\lambda,\alpha}$$

où $\widetilde{T}_{\lambda,\alpha} := \{P \in SST(A_N) \mid sh P = \lambda,\ wt P = \alpha\}$

ensemble de tableaux SST, forme $\lambda$ poids $\alpha$

$$\widetilde{T}_\lambda := \bigsqcup_\alpha \widetilde{T}_{\lambda,\alpha}$$

Il suffit de démontrer que $\widetilde{T}_{\lambda,\alpha} \underset{\text{en bij}^{\circ}}{\overset{\sim}{\underset{\mathcal{L}}{=}}} \widetilde{T}_{\lambda, s_i\alpha}$

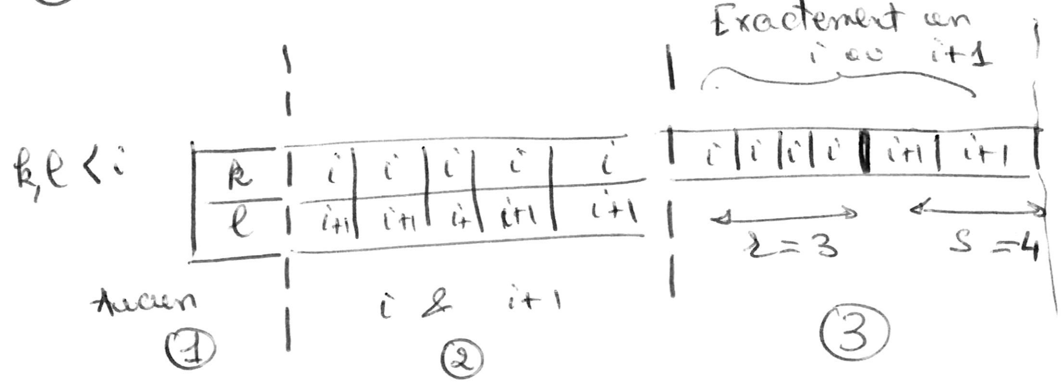
où $s_i(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \underbrace{\alpha_{i+1}, \alpha_i}_{\leftrightarrow}, \dots, \alpha_n)$

Pour cela nous allons construire une famille de $T_i : \mathcal{T}_{\lambda,\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\lambda, s_i\alpha}$

Soit $P \in \mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$. Observons les colonnes de $P$.

Il y en a de 3 genres.

1. Celles où n'apparait aucun $i$ ou $i+1$
2. Celles où apparaissent $i$ & $i+1$ (Motif $\boxed{\begin{smallmatrix} i \\ i+1 \end{smallmatrix}}$) — Ignorons ces cas
3. Celles où apparait exactement un $i$ ou un $i+1$

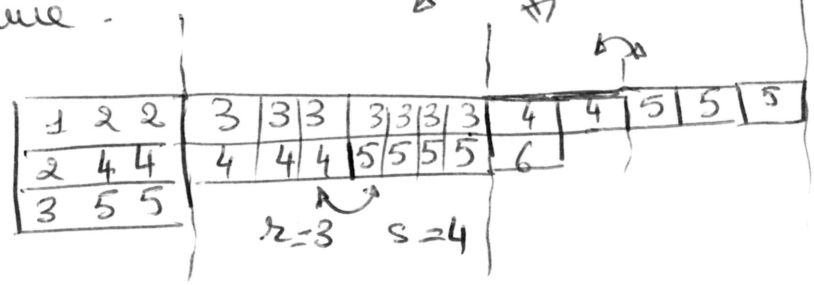



⤳ On définit $T_i P$ comme le même tableau où l'on a échangé $r$ & $s$.

⚠ Si le même motif a lieu ailleurs, répéter la procédure.

2 fois le motif

Ex:

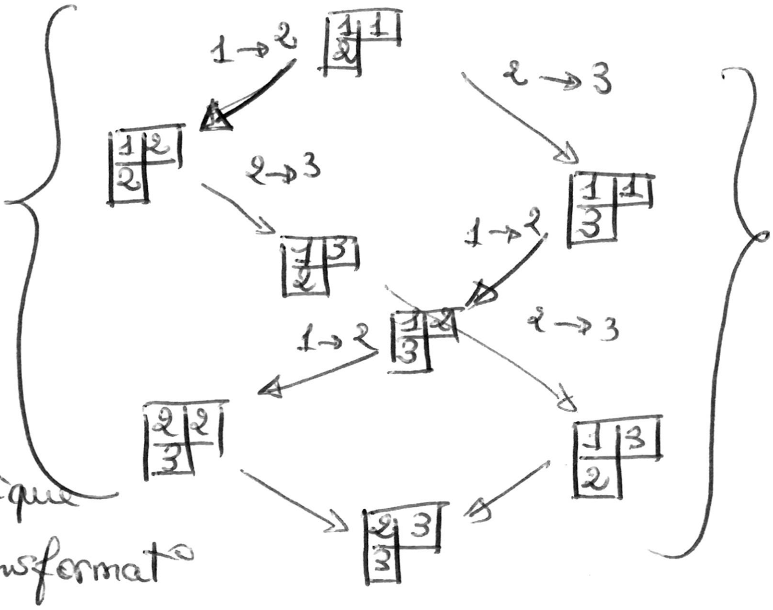


III

↳ **Exemple** : $N = 3$ ; $\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = (2,1,0)$

partition de $|\lambda| = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in SST(A_3) \\ sh\, P = \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \end{array} \right\} =$$



Par des flèches $\xrightarrow{2 \to 3}$ ou $\xrightarrow{1 \to 2}$ on indique une transformat° échangeant $i$ pour $i+1$

En lisant les poids sur les SST :

$$\leadsto s_\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + \underline{\underline{2}} x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1 x_3^2$$

$$= m_{2,1}^{(x)} + 2\, m_{1,1,1}$$

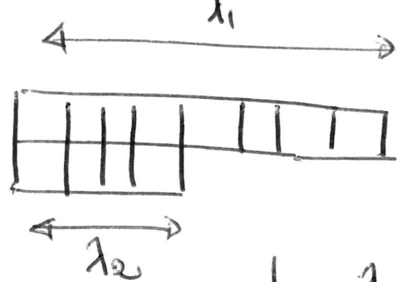
(sans répétition)

où $m_{\mu_1, \dots, \mu_N}$ est le symétrisé de $x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_N^{\mu_N}$

$$\left( \begin{array}{l} m_{1,1,1} = x_1 x_2 x_3 \\ m_{2,1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}^2 x_{\sigma(2)}^1 \end{array} \right)$$

## ↳ Preuve pour $N = 2$

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2) =$$




$$S_\lambda(x_1, x_2) = \frac{a_{\lambda+\delta}(x)}{a_\delta(x)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+1} & x_1^{\lambda_2} \\ x_2^{\lambda_1+1} & x_2^{\lambda_2} \end{vmatrix}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{x_1^{\lambda_1+1} x_2^{\lambda_2} - x_1^{\lambda_2} x_1^{\lambda_1+1}}{x_1 - x_2} = (x_1 x_2)^{\lambda_2} \underbrace{\frac{x_1^{\lambda_1-\lambda_2+1} - x_2^{\lambda_1-\lambda_2+1}}{x_1 - x_2}}$$

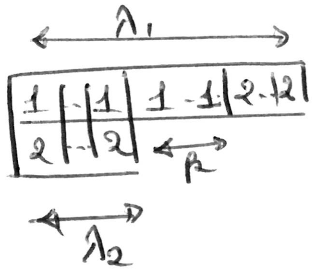
$$\sum_{k=1}^{N} X^k Y^{N-k} = \frac{X^N - Y^N}{X - Y}$$

↳ identité remarquable.

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_1-\lambda_2} \underbrace{(x_1 x_2)^{\lambda_2} \quad x_1^k \, x_2^{\lambda_1-\lambda_2-k}}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{P \in T_\lambda} x^{wt(P)}$$

$x^{wt(P)}$ où $P =$




↳ Une autre preuve pour $N=2$, celle qui se généralise ...

Soit $\Phi : SST(\mathbb{A}_N) \longrightarrow$ Chemins $\pi$ sur $\mathbb{R}^N$ à temps discret avec incréments dans $\{e_1, \dots, e_N\}$, $\pi_0 = 0$

$P \longmapsto$ Lecture du tableau $P$ de $\begin{cases} \text{droite à gauche} \\ \text{haut en bas} \end{cases}$

En identifiant un chemin et ses incréments, on a par exemple

$P =$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | |
| 3 | 4 | 5 | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

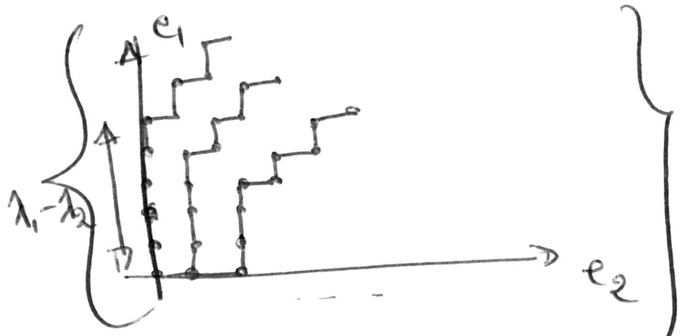
$\xmapsto{\Phi}$ 4 35 34 23 23135 124 123 5

⚠ $\Phi$ est une injection sur $\Gamma_\lambda$ car on peut aisément remplir la forme $\lambda$ et retrouver $P$ grâce "aux montées" de $\Phi(P)$.

<u>Fait (difficile)</u> - Admis : On peut aussi retrouver $\lambda$ !

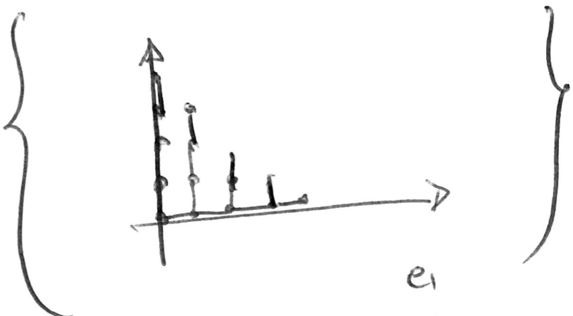
Maintenant dans le cas le plus simple de $N=2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in SST(\mathbb{A}_2) \\ sh P = (\lambda_1 \geq \lambda_2) \end{array} \right\} \simeq$$



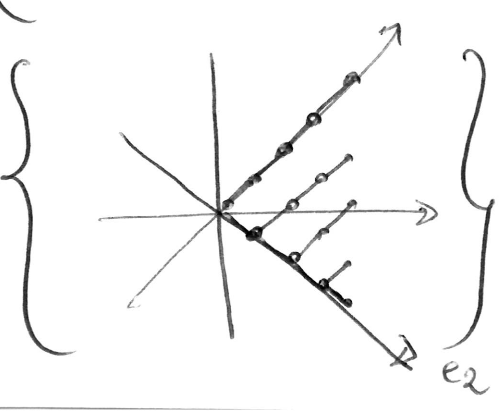

en se débarassant de la partie triviale $\rightarrow$ 12

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in SST(\mathbb{A}_2) \\ sh P = (\lambda_1-\lambda_2, 0) \end{array} \right\} \simeq$$



$45^\circ$

$\simeq$




<u>Remarque cruciale</u> : Un seul chemin dans le cone $C = \{x_1 \geq x_2\}$ et il permet de retrouver $\lambda_1 - \lambda_2$ ...

Maintenant $$s_\lambda \overset{?}{=} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

$$\Longleftrightarrow \quad s_\lambda \, a_\delta \overset{?}{=} a_{\lambda+\delta}$$

$$= \left( \sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda} x^{wt(P)} \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} x^{\sigma(\delta)} \varepsilon(\sigma) \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma) \sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda} x^{wt(P) + \sigma(\delta)}$$

$\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ et définir l'opérateur $T_\sigma = T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_k}$

$$\sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda} = \sum_{T_\sigma P \in \mathcal{T}_\lambda}$$ car $T_\sigma$ bijectᵒ & $wt(T_\sigma(P)) = \sigma(wt(P))$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma) \sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda} x^{\sigma(wt(P) + \delta)}$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(\lambda+\delta)}}_{a_{\lambda+\delta}} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma) \sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda / \{P_0\}} x^{\sigma(wt(P)+\delta)}$$

où $P_0 =$ ~~Etzonique~~

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1 \ldots & \ldots & 1 \\ \hline 2 \ldots & \ldots 2 & \\ \hline 3 \ldots & & \\ \hline \end{array}$$

$$wt(P_0) = \lambda$$

⇝ Il suffit de mq :

$$\square = \sum_{P \in \mathcal{T}_\lambda / \{P_0\}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(wt(P)+\delta)} \overset{?}{=} 0$$

**Fait 1 :** Si $C := \{ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N \}$

Alors $C + \delta = \{ x_1 > x_2 > \dots > x_N \}$

**Conséquence :** Soit un chemin $\pi$ d'incrément $\{ e_1, \dots, e_N \}$. $\pi$ reste dans $C$ (inégalités larges)

$\Longleftrightarrow$ $\pi + \delta$ reste dans $C + \delta$ (inégalités strictes)

**Fait 2 :** Le seul $P \in \tilde{T}_\lambda$ tel que $\Phi(P) + \delta$ reste à l'intérieur de $C$ est

$$P_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & \cdots & \\ \cline{1-2} 3 & & \\ \cline{1-1} \ell(\lambda) & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

**Preuve :** Par récurrence sur les lignes.

À la première ligne, si l'entrée $(\lambda_1, 1) \neq 1$, alors on sort du cone ! Donc $P(\lambda_1, 1) = 1$

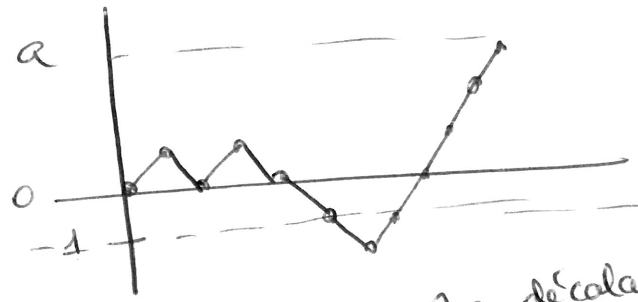
$\rightsquigarrow P(j, 1) = 1$ (Ligne de $1$)

Et ainsi de suite ... $\boxtimes$

Ainsi : $$\Box = \sum_{\substack{P \in \tilde{T}_\lambda \,/ \\ \Phi(P) + \delta \text{ sort} \\ \text{de } C + \delta}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(wt(P) + \delta)}$$

$\rightsquigarrow$ Le comptage de marches restant dans un cone (par exemple le cone $\mathbb{R}_+$) se fait en général par principe de réflexion ...

Rappelons l'idée du principe de reflexion :




$$p_n(a) := \#\{\pi : (0,0) \to (n,a)\} = \binom{n}{\frac{n+a}{2}}$$

(Exercice)

même décalage que $\delta$

$$q_n(a) = \#\{\pi : (0,0) \to (n,a) \, , \, \pi \text{ reste } \geq 0\}$$

$$= \#\{\pi : (0,1) \to (n,a+1) \, , \, \pi \text{ reste } > 0\}$$

$$\stackrel{\text{décompte}}{=} p_n(a) - \#\{\pi : (0,1) \to (n,a+1) \, , \, \pi \text{ touche } 0\}$$

$$\stackrel{\text{principe de reflexion}}{=} p_n(a) - \#\{\pi : (0,1) \to (n,-(a+1))\}$$

$$= p_n(a) - p_n(-a-2)$$

⚠ • Ce signe $\ominus$ est le même que dans un $\det_{2\times 2}$

• Le décalage de 1 puis 2 est l'effet de $\delta = (N-1, \dots, 0) = (1,0)$ si $N=2$.

Nous sommes prêts pour donner l'ingrédient essentiel de la preuve (Existence Admise).

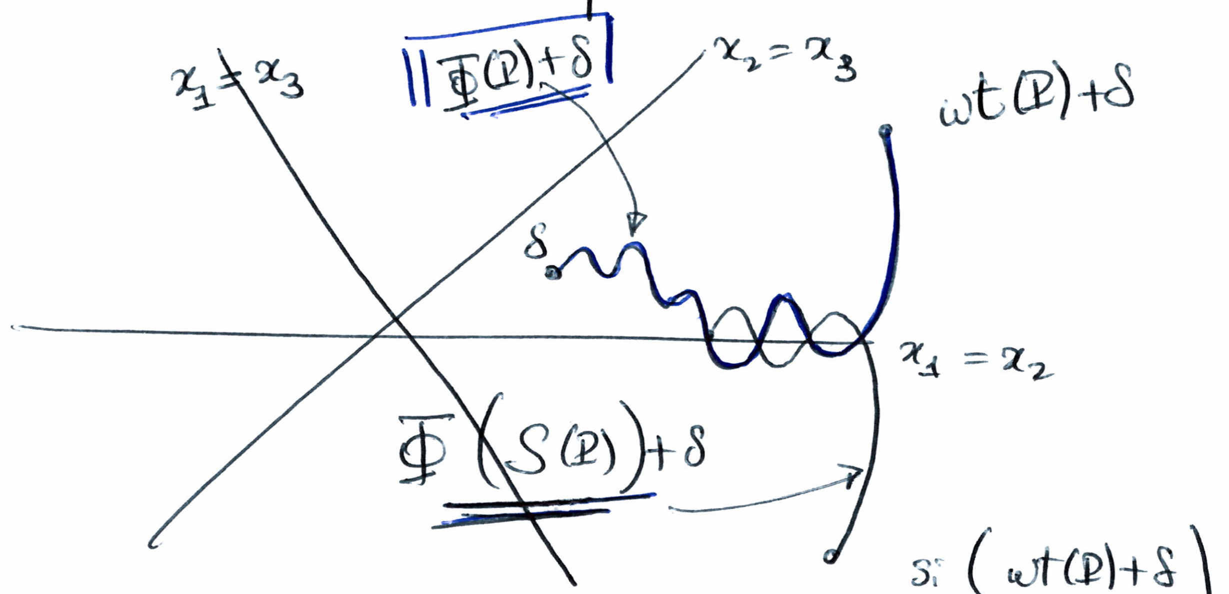
Fait (Admis)

Il existe $S : \widetilde{T}_\lambda \setminus \{P_0\} \xrightarrow{\sim} \widetilde{T}_\lambda \setminus \{P_0\}$

tq
- $wt(S(P)) + \delta = s_i(wt(P) + \delta)$

  où $\{x_i = x_{i+1}\}$ hyperplan par lequel sort $\Phi(P) + \delta$
- $S$ involution construite sur le modèle du principe de réflexion.

$N=3$




Ainsi $\square = \sum_{P \in \widetilde{T}_\lambda \setminus \{P_0\}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(wt(P)+\delta)}$

$$= \sum_{P \in \widetilde{T}_\lambda \setminus \{P_0\}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma\underbrace{(wt(S(P))+\delta)}_{\sigma s_i(P)(wt(P)+\delta)}}$$

$$= \sum_{P \in \widetilde{T}_\lambda \setminus \{P_0\}} \sum -\varepsilon(\sigma)\, x^{\sigma(wt(P)+\delta)} = -\square \rightsquigarrow \square = 0 \,!$$

$\boxtimes$