Séance 10 I

$\rightsquigarrow$ Une fin rapide en admettant un résultat de Okounkov

Ceci est un prétexte pour voir les objets d'intérêt avant de les définir proprement.

En effet, rappelons qu'à ce stade, on a:

$$w \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Geom}(q)$$

$$\Longrightarrow L_{N,M} \overset{\mathcal{L}}{=} \lambda_1 \left(\mathrm{Schur} \begin{pmatrix} x = \sqrt{q}\, \mathbb{1}_N \\ y = \sqrt{q}\, \mathbb{1}_M \end{pmatrix} \right)$$

L'objectif de la semaine prochaine sera de démontrer que

$$\frac{L_{\lfloor Nx \rfloor, \lfloor Ny \rfloor} - n\, S(x,y)}{\sigma(x,y)\, n^{1/3}} \xrightarrow{\mathcal{L}} TW$$

où TW est la loi de Tracy-Widom

Il nous reste donc à

- Définir la loi de TW, ce qui nécessitera la machinerie des déterminants de Fredholm & la fonction d'Airy.
- Prouver la limite par une analyse asymptotique où ces deux objets apparaîtront.

Thm [Okounkov - 99 "Infinite wedge & random partitions"]

Le processus de Schur est déterminantal

càd si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{\ell(\lambda)}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Schur}(x, y)$

si $\mathcal{S}(\lambda) := \{ \lambda_i - i \} \subset \mathbb{Z}$

~~Alors~~

Alors $\forall\, B = (\ell_1, \dots, \ell_m)$

$$\mathbb{P}(B \subset \mathcal{S}(\lambda)) = \det K(\ell_j, \ell_k)_{1 \leq j, k \leq m}$$

pour un certain noyau $K := K_{x,y}$

Pour $x = \sqrt{q}\, \mathbb{1}_N$, $y = \sqrt{q}\, \mathbb{1}_M$, $K = K_{N,M}$,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} K(i,j)\, \xi^i \eta^{-j} = \frac{e^{V^*(\xi) - V^*(\eta)}}{\xi/\eta - 1}$$

avec $V^*(\xi) = \sqrt{q}\,(N-M) \log(1-\xi)$

<u>Preuve</u> (Admis)

Remarquez qu'il suffit d'analyser K pour avoir toutes informations nécessaires. Cela est d'autant plus clair dans

$\longrightarrow$

Corollaire (*)

$$\mathbb{P}\left(L(M,N) \leqslant t\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\ell_1,\dots,\ell_k = t+1} \det\left(K_{N,M}(\ell_i,\ell_j)\right)$$

en fait (plus tard)
$$= \det\left[\mathrm{Id} - K_{N,M}\right]_{\ell^2(\{t+1, t+2, \dots\})}$$

Il ne restera qu'à prouver que $K_{N,M}$ converge vers un objet qui est le noyau d'Airy ... et ce sera la définition de la loi de TW

Preuve: On sait déjà $L(N,M) \overset{\mathcal{L}}{=} \lambda_1\left(\mathrm{Schur}\left(x = \sqrt{q}\,\mathbb{1}_N, y = \sqrt{q}\,\mathbb{1}_N\right)\right)$

Donc $\mathbb{P}\left(L(M,N) \leqslant t\right)$

où $A_i = \{\{i\} \subset \mathcal{S}(\lambda)\}$

$$= \mathbb{P}_{\mathrm{Schur}(x,y)}\left(\lambda_1 \leqslant t\right)$$
$$= \mathbb{P}_{\mathrm{Schur}(x,y)}\left(\lambda_1 - 1 < t\right)$$
$$= \mathbb{P}_{\mathrm{Schur}(x,y)}\left(\mathcal{S}(\lambda) \text{ n'a aucune particule dans } [\![t; +\infty[\![= \{t, t+1, t+2, \dots\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=t}^{+\infty} A_i\right)$$
$$= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=t}^{+\infty}\left\{\mathcal{S}(\lambda) \text{ a une particule en } i\right\}\right]^c$$

Principe d'inclusion - exclusion
$$= 1 - \sum \mathbb{P}(A_i) + \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

~~$1 - \sum \mathbb{P}(\mathcal{S}(\lambda)$ a une particule dans $[\![t, +\infty[\![)$~~

~~$+ \mathbb{P}(\mathcal{S}(\lambda)$ a 2 particules dans $[\![t, +\infty[\![)$~~

...

$\mathbb{P}$ totales
$$= 1 - \sum_{\ell_1 = t}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{\ell_1\} \subset \mathcal{S}(\lambda)\right)$$

$\det K(\ell_i, \ell_j)$

// Okounkov

$$+ \sum_{t \leqslant \ell_1 < \ell_2} \mathbb{P}\left(\{\ell_1, \ell_2\} \subset \mathcal{S}(\lambda)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\ell_1,\dots,\ell_k = t}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B = \{\ell_1, \dots, \ell_k\} \subset \mathcal{S}(\lambda)\right)$$

PTO

3. ~~Processus déterminantaux~~ Déterminants et loi de TW

3.1. ~~Chapeau~~ ~~Rappels d'algèbre multilinéaire~~ Déterminant de Fredholm

Rappelons :

Lemme [Développement en mineurs principaux]

Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$

Alors $$\det(I_N + A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ \in [\![1, N]\!]^k}} \det_{k \times k}(A_{i_r, i_s})$$

Preuve : $A = (A_1, \dots, A_N)$

Par multilinéarité du det,

$$\det(I_N + A) = 1 + \sum_{\emptyset \neq E \subset [\![1, N]\!]} \det_{N \times N}(B_E)$$

où les colonnes de B_E sont $(B_E)_j$

$$(B_E)_j = \begin{cases} e_j & \text{si } j \notin E \\ A_j & \text{si } j \in E \end{cases}$$

En développant par rapport aux colonnes e_j :

$$\det(I_N + A) = 1 + \sum_{\substack{\emptyset \neq E \subset [\![1, N]\!] \\ |E| = k \\ E = \{i_1, \dots, i_k\} \\ i_1 < \dots i_k}} \det_{k \times k}(A_{i_r, i_s})$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ \in [\![1, N]\!]^k}} \det_{k \times k}(A_{i_r, i_s})$$

en réordonnant près.

Soit X un ~~processus~~ espace ~~déterminantal~~ polonais muni d'une mesure de référence ν avec $|\nu| < +\infty$.

Ex: $\begin{cases} X = [0,1], & \nu = \lambda \\ X = \{1, 2, \dots, N\}, & \nu = \sum_{k=1}^{N} \delta_k \end{cases}$

Définition (Noyau)

Un noyau est une application $K : X \times X \to \mathbb{C}$ telle que

$$\|K\| := \sup_{(x,y) \in X \times X} |K(x,y)| < +\infty$$

Un noyau est aisément identifié à un opérateur linéaire

$$K : L^2(X,\nu) \longrightarrow L^2(X,\nu)$$
$$f \longmapsto \int K(\cdot, y) f(y) \, \nu(dy)$$

Exercice. Montrer que $\|K\| < +\infty$, $|\nu| < +\infty$ implique bien que $K : L^2(X,\nu) \to L^2(X,\nu)$

Remarque. Dans le cas où $\nu(X) = +\infty$, on demande des hypothèses d'intégrabilité supplémentaires sur K.

Définition: (Traces)

- La trace de K est $\operatorname{Tr} K = \int_X K(x,x) \, \nu(dx)$
- La trace de la k^e puissance extérieure est

$$\operatorname{Tr}(\Lambda^k K) = \int_{X^k} \nu(dx_1) \dots \nu(dx_k) \det_{k \times k}(K(x_i, x_j))$$

$\leqslant$ (Produit des normes)

Par l'inégalité de Hadamard, $|\det_{n \times n}(K(x_i, x_j))| \leqslant \|K\|^n n^{n/2}$

donc $|\operatorname{Tr} \Lambda^n K| \leqslant |\nu(X)|^n \|K\|^n n^{n/2}$

Def: [Fredholm]

Si K est un noyau $K : X \times X \to \mathbb{C}$ alors le déterminant de Fredholm de K sur $L^2(X, \nu)$ est

$$\det(I - K)_{L^2(X,\nu)} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \operatorname{Tr} \Lambda^k K$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{X^k} \nu^{\otimes k}(dx_1 \ldots dx_k) \det(K(x_i, x_j))$$

Remarquons 1/ qu'à cause de l'inégalité de Hadamard

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Tr} \Lambda^k K|}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(|\nu(X)|\,\|K\|)^k}{\underset{\text{Stirling}}{k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}} k^{k/2}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(e \frac{|\nu(X)|\,\|K\|\sqrt{k}}{k}\right)^k}$$

Sommable ! si $|\nu(X)| < +\infty$ et $\|K\| < +\infty$

2/ Si $\begin{cases} X = \{1, 2, \ldots, N\} \\ \nu = \sum \delta_k \end{cases}$ Alors $L^2(X, \nu) \simeq \mathbb{C}^N$

et un opérateur $K : L^2(X, \nu) \to L^2(X, \nu)$ s'identifie à une matrice.

Dans ce cas, le déterminant de Fredholm coïncide avec la définition des matrices :

$$\det(I - K)_{L^2(X,\nu)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\ell_1, \ldots, \ell_k = 1}^{N} \underbrace{\det_{k \times k} K(\ell_i, \ell_j)}_{0 \text{ si } k > N \text{ car deux lignes seront égales}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \subset [\![1, N]\!]^k} \det(K_{i_r, i_s})$$

développement en mineurs principaux.

$$= \det_{N \times N}(I_N - (K_{ij}))$$

3/ Cette définition permet de reformuler le corollaire (4) en

$$\mathbb{P}\left(L(M,N) \leq t \right) = \det\left(I - K_{N,M}\right)_{\ell^2(\{t, t+1, \dots\})}$$

Dans ce cas $\begin{cases} X = \{t, t+1, \dots\} \\ \nu = \sum_{k \geq t} \delta_k \end{cases}$ de masse infinie !

mais en fait, le noyau a les bonnes propriétés d'intégrabilité.

3_2. La loi de Tracy-Widom

La fonction d'Airy $Ai : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

est l'unique solution de

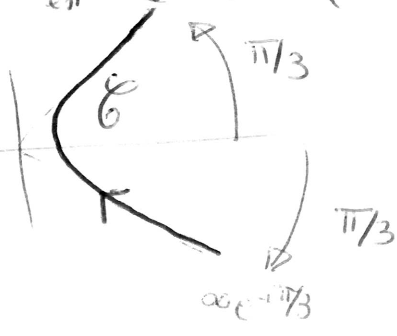
$$\begin{cases} Ai''(x) - x\, Ai(x) = 0 \\ Ai(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

Elle admet une extension à la variable complexe $z \in \mathbb{C}$

et l'expression intégrale :

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{\frac{1}{3}\zeta^3 - z\zeta}\, d\zeta$$

où $\mathcal{C}$ est le contour



Exercice : - Mq l'intégrale CV absolument

(Idée : $e^{\frac{1}{3}\zeta^3}$ décroit exponentiellement vite si $\zeta = t e^{-i\pi/3}$ $t \to +\infty$

ou $\zeta = t e^{i\pi/3}$ $t \to +\infty$)

- En dérivant sous le signe $\int$:

$$Ai''(z) - z\, Ai(z) = 0$$

Le noyau d'Airy est

$$Ai(x,y) = \frac{Ai(x)\, Ai'(y) - Ai'(x)\, Ai(y)}{x-y}$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \; Ai(x+t)\, Ai(y+t)$$

Au final, la loi de Tracy-Widom est

$$\mathbb{P}(TW \leqslant s) = \det\left(I - Ai\right)_{L^2([s;+\infty[, \lambda)}$$

det de Fredholm