M2RI — Systèmes de particules: Aspects analytiques et intégrables

6 février 2019, Durée : 2h

Niveau de difficulté :
(*) Challenge
(**) Difficile

Exercice 1 : (Produits de matrices)

Soit $|\cdot|$ une norme sur l'espace des matrices $M_r(\mathbb{C})$, où $r \in \mathbb{N}$ est un entier fixé. Soient $g_1, g_2, g_3, \dots$ une suite iid de variables dans $M_r(\mathbb{C})$. On supposera que $\log |g_1|$ a tout ses moments.

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe un $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |g_1 g_2 \dots g_n| = \gamma \ ,$$

la limite ayant lieu presque sûrement et dans L^1.

1. Pourquoi la limite $\gamma = -\infty$ est possible ?
2. Considérons la norme d'opérateur sur $M_r(\mathbb{C})$:

$$\forall g \in M_r(\mathbb{C}),\ |g|_{op} = \max_{x\in\mathbb{C}^r\setminus\{0\}} \frac{|gx|_2}{|x|_2} \ .$$

   Expliquer les assertions suivantes :

$$\exists \kappa > 0,\ \frac{1}{\kappa}|\cdot| \le |\cdot|_{op} \le \kappa|\cdot| \ ,$$

   et

$$\forall (a,b) \in M_r(\mathbb{C}) \times M_r(\mathbb{C}),\ |ab|_{op} \le |a|_{op}|b|_{op} \ .$$

3. Déduire de la première assertion que le résultat est vrai si et seulement si il est vrai pour la norme d'opérateur $|\cdot|_{op}$.
4. Posons pour $n < m$:

$$X_{n,m} := \log |g_{n+1}g_{n+2}\dots g_{m-1}g_m|_{op} \ .$$

   Démontrer grâce à la deuxième assertion que la suite X est sous-additive i.e pour tout $n < m$:

$$X_{0,m} \le X_{0,n} + X_{n,m} \ .$$

5. En déduire le résultat en vérifiant les hypothèses du théorème sous-additif de Kingman.
6. (Question ouverte) (*) Pensez-vous qu'il soit possible d'appliquer (le corollaire de) l'inégalité de Talagrand pour montrer que $\log |g_1 g_2 \dots g_n|_{op}$ se concentre autour de sa moyenne à l'échelle $n^{\frac{1}{2}}$?

   On supposera que les g_i sont à entrées positives. On pourra démontrer que si $[g_i]_{k,l} = e^{\omega^i_{k,l}}$, alors le logarithme de la norme d'opérateur $\log |g_1 \dots g_n|_{op}$ est convexe en les $\omega^i_{k,l}$.

(Intermède culturel)
— Il s'agit d'une version matricielle de la loi des grands nombres. Le coefficient γ est appelé "exposant de Lyapounov", et est aussi en général inconnu explicitement.
— Bien que cela ne soit pas clair à ce stade, il existe un lien fort entre exposant de Lyapounov et forme asymptotique en DLPP. Le lecteur peut déjà s'en convaincre en observant que les mêmes techniques analytiques sont applicables.

Exercice 2 : (Mesure de Haar sur U_n et fonctions de Schur)

Soit $u_n \in U_n$ une matrice unitaire distribuée selon la mesure de Haar. Rappelons que la mesure de Haar sur U_n, normalisée en une mesure de probabilité, est l'unique loi telle que :

$$\forall k \in U_n,\ u_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} k u_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} u_n k \ .$$

Le spectre de u_n est de la forme $e^{i\theta^{(n)}} = \left(e^{i\theta_j^{(n)}}\right)_{1\leq j\leq n} \in \left(S^1\right)^n$. On utilisera la notation :

$$a_\delta(e^{i\theta^{(n)}}) = \Delta(e^{i\theta^{(n)}}) = \prod_{1\leq k<l\leq n} \left(e^{i\theta_k^{(n)}} - e^{i\theta_l^{(n)}}\right) \ .$$

La formule de Weyl stipule que :

$$\mathbb{P}_n(\theta)\frac{d\theta}{(2\pi)^n} = \mathbb{P}\left(\theta^{(n)} \in d\theta\right) = \frac{1}{n!}\left|\Delta(e^{i\theta^{(n)}})\right|^2 \frac{d\theta}{(2\pi)^n} \ .$$

I. Produit scalaire

1. Montrer que $\mathbb{P}_n(\theta)\frac{d\theta}{(2\pi)^n}$ est une loi de probabilité sur $(S^1)^n$.
2. Rappelons que les fonctions de Schur $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ forment une base de Sym_n des polynômes symétriques en n variables. Définissons un produit scalaire sur Sym_n par :

$$\forall (f,g) \in Sym_n \times Sym_n,\ \langle f, g\rangle_n := \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(f(e^{i\theta^{(n)}})\overline{g(e^{i\theta^{(n)}})}\right) \ .$$

   Montrer que $(s_\lambda,\ \ell(\lambda) \leq n)$ forment en fait une base orthonormale de Sym_n.

II. Formule de la dimension de Weyl

1. Soit $|q| < 1$. Démontrer que pour une partition λ avec $\ell(\lambda) \leq n$:

$$s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{q^{\lambda_i+N-i} - q^{\lambda_j+N-j}}{q^{N-i} - q^{N-j}} \ .$$

2. En déduire que :

$$s_\lambda(1_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} \ .$$

   Ceci est la formule de la dimension de Weyl. Cela décompte le nombre de tableaux semi-standards remplis avec l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$.

III. Polynôme caractéristique

Considérons le polynôme caractéristique pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$X_n(e^{i\theta}) = \det\left(Id - e^{i\theta}u_n^*\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - e^{i(\theta-\theta_j^{(n)})}\right) \ .$$

1. Justifier l'invariance par rotation :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R},\ \left(X_n\left(e^{i(\theta+\varphi)}\right) ; \theta \in \mathbb{R}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(X_n(e^{i\theta}) ; \theta \in \mathbb{R}\right) \ .$$

2. Démontrer que pour $k, l \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left(X_n(1)^k\overline{X_n(1)}^l\right) = \mathbb{E}\left(e^{-ik\sum_{j=1}^n \theta_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{n}\left(1 + e^{i\theta_j^{(n)}}\right)^{k+l}\right) = \mathbb{E}\left(\overline{s_{k^n}(e^{i\theta^{(n)}})}\prod_{j=1}^{n}\left(1 + e^{i\theta_j^{(n)}}\right)^{k+l}\right) ,$$

   où k^n est la partition avec n parts, chacune de taille k.

3. En admettant la formule de Cauchy duale :

$$\prod_{i,j}(1+x_i y_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) \ ,$$

démontrer que

$$\mathbb{E}\left(X_n(1)^k \overline{X_n(1)}^l \right) = s_{n^k}(1_{k+l}) \ ,$$

où n^k est la partition constituée de k parts, chacune de longueur n.

4. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(X_n(1)^k \overline{X_n(1)}^l \right) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=k+1}^{k+l} \frac{j-i+n}{j-i} \ .$$

5. (**) Comment étendre l'égalité précédente à k, l dans $\mathbb{R}$, dans un voisinage de 0 ? On pourra se contenter de donner une expression à base de fonction Γ d'Euler.

6. En déduire un TCL :

$$\frac{\log X_n(1)}{\sqrt{\log n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}^{\mathbb{C}} \ ,$$

où $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ est une gaussienne complexe standard, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}\mathcal{N}^{\mathbb{C}} = 0, \quad \mathbb{E}\left|\mathcal{N}^{\mathbb{C}}\right|^2 = 1 \ .$$