LE THEOREME D'HAHN BANACH

Clement Rau

17 décembre 1998

Ce theoreme est un outil fondamental en mathematiques ,notament en analyse. Il existe plusieurs versions de ce theoreme ,mais on ne demontrera que la premiere .On peut montrer qu'elles sont toutes equivalentes. La demonstration utilise le lemme de Zorn . Commencons d'abord par quelques definitions :
Definition : Soient (E , $\| \|_E$)et(**F** , $\| \|_F$) deux espaces vectoriels normes ,pour toute application lineaire u : E $\longrightarrow$ F on pose $||| u |||$=sup$\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \neq 0_E\}$
Definition : Soit (X,$\prec$) un ensemble ordonne ,une chaine est une partie de X sur laquelle l'ordre induit est total. On dit que (X,$\prec$) est inductif si toute chaine est majoree.
Theoreme(Lemme de Zorn) *Tout ensemble inductif admet un element maximal.*

Venons en maintenant au theoreme qui fait l'objet de cet article :
Theoreme de Hahn Banach (version 1) : Soit E un R-espace vectoriel norme et φ une forme lineaire definie sur F ,sous espace vectoriel de E ,Alors il existe $\tilde{\varphi}$ forme lineaire definie sur E telle que $\tilde{\varphi}_{/F} = \varphi$ et $||| \varphi |||$=$||| \tilde{\varphi} |||$

Preuve : La methode exposee ,semblera assez peut naturelle ,mais elle est cependant tres efficace.On va d'abord regarder ce qui se passe si codim(F) $< \infty$

lemme : *si codim (F)$< \infty$,il existe bien $\tilde{\varphi}$ prolongement de φ telle que*
$||| \varphi |||$=$||| \tilde{\varphi} |||$.

Quitte a faire une recurrence finie ,on peut se restreindre au cas ou F est un hyperplan de E . Soit alors a$\in$E tel que F$\oplus$**R**a=E.
Le probleme est alors de trouver une valeur b $\in$ **R** telle qu'en posant b=$\tilde{\varphi}(a)$ on ait $\tilde{\varphi}$ forme lineaire et $||| \varphi |||$=$||| \tilde{\varphi} |||$
D'abord il est clair que quelque soit la valeur b que l'on prend $\tilde{\varphi}$ reste une forme lineaire et que $||| \varphi ||| \leq ||| \tilde{\varphi} |||$ puisque F$\subset$E .
Supposons avoir trouve un b qui convient.
Alors $\forall (f,t) \in F \times \mathbf{R}$ $\frac{|\tilde{\varphi}(f+ta)|}{\|f+ta\|} \leq ||| \tilde{\varphi} ||| = ||| \varphi |||$
donc $\forall f' \in F$ $\frac{|\varphi(f')+b|}{\|f'+a\|} \leq ||| \varphi |||$
et donc $\forall f' \in F$ $- ||| \varphi |||\ \| f'+a \| - | \varphi(f') | \leq b \leq ||| \varphi |||\ \| f'+a \| - | \varphi(f') |$
Existe t'il de tels b ? $(relation(*))$
Eh bien oui ,en effet on a $\forall (f_1', f_2') \in F^2$ $| \varphi(f_1') - \varphi(f_2') | \leq ||| \varphi |||\ \| f_1' - f_2' \|$
donc $\forall (f_1', f_2') \in F^2$ $| \varphi(f_1') | - | \varphi(f_2') | \leq ||| \varphi |||\ (\| f_1' - a \| + \| f_2' - a \|)$
d'ou $\forall (f_1', f_2') \in F^2$ $- | \varphi(f_2') | - ||| \varphi |||\ \| f_2' - a \| \leq - | \varphi(f_1') | + ||| \varphi |||\ \| f_1' - a \|$
et donc
$sup_{f_2' \in F}\{- | \varphi(f_2') | - ||| \varphi |||\ \| f_2' - a \|\} \leq inf_{f_1' \in F}\{- | \varphi(f_1') | + ||| \varphi |||\ \| f_1' - a \|\}$
et donc il existe bien b qui verifie (*) ,et en posant $\varphi(a) = b$ pour un tel b
on a bien $||| \tilde{\varphi} ||| = ||| \varphi |||$

D'ou le lemme .
Prouvons maintenant le cas general.
Considerons $X = \{ (\lambda , G) , F \subset G \quad G \; e.v$
$\lambda \in G^* , \lambda_{/F} = \varphi \; et \quad ||| \lambda ||| = ||| \varphi ||| \}$
On note que $X \neq \emptyset$ puisque $(\varphi , F) \in X$.
On va montrer que X est inductif pour $\prec$ definie de la maniere naturelle par :
$(\varphi_1 , F_1) \prec (\varphi_2 , F_2) \iff F_1 \subset F_2 \; et \; \varphi_1 = \varphi_{2/F_1}$.
Soit une $\sum$ chaine , $\sum = ((\varphi_i , F_i))_{i \in I}$
Soit $\Gamma = \cup_{i \in I} F_i$, c'est bien un sous espace vectoriel de E
(en effet si $(x, y) \in \Gamma^2 \; \exists (i, j) \in I^2 , x \in F_i \; et \; y \in F_j$ *avec par exemple* $F_i \subset F_j \; donc \; x + y \in F_j \subset \Gamma$)
Soit $\Psi \in \Gamma^*$ definie ainsi $\forall x \in \Gamma \; \exists i \in I \; x \in F_i$ *posons* $\Psi(x) = \varphi_i(x)$
Ceci definie bien une application (car par definition de $\prec$ les φ_i se "prolongent")
Par ailleurs elle est aussi bien lineaire puisque :
$\forall (x, y) \in \Gamma^2 \;\; \exists (i, j) \in I^2 , (x, y) \in F_i \times F_j$ avec par exemple $F_i \subset F_j$
donc $\Psi(x) + \Psi(y) = \varphi_i(x) + \varphi_j(y) = \varphi_j(x + y) = \Psi(x + y)$
Et on a enfin $\forall i \in I \quad (\varphi_i , F_i) \prec (\Psi , \Gamma)$
donc (Ψ , Γ) est un majorant de la chaine $\sum$,
par suite X est inductif .
Le lemme de Zorn nous fournit donc un element maximal ,notons le (Ω , Π)
Si $\Pi \neq E$ alors en prenant $a \in E \setminus \Pi$ et en considerant Ω forme lineaire, element de Π^*, dans l'espace $\Pi \oplus \mathbf{R}a$, par le lemme on pourrait construire un prolongement $\tilde{\Omega}$ qui contredirait le caractere maximal .
D'ou $\Omega = \tilde{\Phi}$ convient.

(Autres versions)
Theoreme de separation de Hahn Banach (version 2) : Soit E un espace de Banach et C un convexe ouvert ne contenant pas 0 ,
Alors $\exists X^* \setminus \{0\} \in E^*$, $\forall c \in C \quad X^*(c) \leq 0$

Theoreme de separation de Hahn Banach (version 3) : Soit E un espace de Banach, soit A un convexe ouvert et B un convexe avec A$\bigcap$B=$\emptyset$
Alors $\exists X^* \in E^* \setminus \{0\} \; \exists a \in \mathbf{R} , \; \forall x \in A \quad X^*(x) \leq a$
$et \; \forall x \in B \quad X^*(x) \geq a$

Theoreme de separation de Hahn Banach (version 4) : Soit E un espace de Banach, et soit F un convexe ferme et K un convexe compact avec F$\bigcap$K=$\emptyset$ Alors $\exists X^* \in E^* \setminus \{0\}$, $sup_{x \in K}\{X^*(x)\} \; < \; inf_{x \in F}\{X^*(x)\}$.

Theoreme de separation de Hahn Banach (version 4') : Soit E un espace de Banach, et soit F un convexe ferme et $x_0 \notin$**F**
Alors $\exists X^* \in E^* \setminus \{0\}$, $X^*(x_0) \; < \; inf_{x \in F}\{X^*(x)\}$.