Le Lemme de Cotlar

Clément Rau

22 octobre 1999

Ce lemme est un outil mathématique trés intéressant, et sa démonstration, qui met en oeuvre des raisonnements simples, illustre la beauté des maths bien *méritée* de temps en temps...

Ennoncé

Soit $(f_i)_{i\in[|1,n|]}$ *une famille de n fonctions continues sur* $[0,1]$. *On suppose que :*
(a) $\forall i \in [|1,n|]$ $||f_i||_\infty \leq 1$
(b) $\exists \epsilon \in [0,1[$ $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2$ $(i \neq j \Rightarrow ||f_i f_j||_\infty \leq \epsilon^{|i-j|})$
Alors, on a :
$|| \sum_{i\in[|1,n|]} \ f_i \ ||_\infty \leq \frac{1}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}$

Preuve : La methode utilisée est miraculeuse, laissez vous guider...
Soit $x \in [0,1]$ et posons pout tout i de $[|1,n|]$, $v_i = f_i(x)$
Soit alors N la fonction définie par :

$$\begin{aligned} N : [0,1] &\longrightarrow [|1,n|] \\ t &\longmapsto card\{i \in [|1,n|],\ v_i \geq t\} \end{aligned}$$

On a $\int_0^1 N(u)\,du = \sum_{i\in[|1,n|]} \ v_i$
En effet, rangeons les v_i par ordre croissant :
$v_{i_{(1,1)}} = v_{i_{(1,2)}} = ... = v_{i_{(1,\alpha_1)}} < v_{i_{(2,1)}} = v_{i_{(2,2)}} = ... = v_{i_{(2,\alpha_2)}} < ... < v_{i_{(q,1)}} = v_{i_{(q,2)}} = ... = v_{i_{(q,\alpha_q)}}$
alors on a sucessivement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 N(u)\,du &= \int_0^{v_{i_{(1,1)}}} N(u)\,du + \sum_{j\in[|1,q-1|]} \int_{v_{i_{(j,1)}}}^{v_{i_{(j+1,1)}}} N(u)\,du + \int_{v_{i_{(q,1)}}}^1 N(u)\,du \\ &= v_{i_{(1,1)}} (\textstyle\sum_{i=1..q} \alpha_i) + \sum_{j\in[|1,q-1|]} \ (v_{i_{(j+1,1)}} - v_{i_{(j,1)}})(\sum_{r=j+1..q} \alpha_r) + (1 - v_{i_{(q,1)}}) \times 0 \\ &= \textstyle\sum_{j=1..q} \alpha_j v_{i_{(j,1)}} \\ &= \textstyle\sum_{j=1..n} v_j \end{aligned}$$

Soit maintenant $u \in [|0,1|]$,
il existe k appartenant à $[|1,q|]$ tel que $u \leq v_{i(k,1)}$
Pour $(a,b) \succeq (k,1)$ et $(a',b') \succeq (k,1)$ on a donc $\quad u^2 \leq v_{i_{(a,b)}} v_{i_{(a',b')}} \leq \epsilon^{|i_{(a,b)} - i_{(a',b')}|}$
(*on a noté* $\preceq$ *l'ordre lexicographique sur* $\mathbb{N}^2$)
Ce que l'on peut reécrire ainsi $\quad |i_{(a,b)} - i_{(a',b')}| \leq 2\frac{ln(u)}{ln(\epsilon)}$
On peut choisir (a,b) et (a,b) tel que :
$|i_{(a,b)} - i_{(a',b')}| = max\{|i_{(c,d)} - i_{(c',d')}|, \ \ (c,d) \succeq (k,1) \ et \ (c',d') \succeq (k,1)\}$
ainsi $N(u) \leq |i_{(a,b)} - i_{(a',b')}|$

(L'écart entre les indices "extremaux" est plus grand que le nombre d'éléments indexés, car on croit au moins d'une unité d'indice entre deux éléments...)

D'où $\quad N(u) \leq 2\frac{ln(u)}{ln(\epsilon)}$
Et donc $\sum_{i\in[|1,n|]} \ v_i \leq \ \int_0^1 2\frac{ln(u)}{ln(\epsilon)}\,du = \frac{-1}{ln(\epsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{1-\epsilon^{\frac{1}{2}}}$
(Car pour $x > 0$ on a $\ ln(1+x) \leq x$)
Il suffit alors de choisir x tel que $\sum_{i\in[|1,n|]} \ v_i = || \sum_{i\in[|1,n|]} \ f_i||_\infty$

$\square$