

Autour des champs et de la correspondance
géométrique de Langlands

Cécile Poirier

Remerciements

Le chemin qui a mené à cette thèse a débuté à Imperial College à Londres où j'ai effectué mon Master of Sciences. C'est grâce à Lynda White et Frank Berkshire que j'ai eu la chance de pouvoir étudier à Imperial College. J'ai passé là-bas des années merveilleuses et j'ai tout à fait conscience du fait que je n'écrirais pas ces remerciements s'ils ne m'avaient pas donné cette opportunité. Je voudrais aussi remercier Kevin Buzzard et Alexei Skorobogatov pour leurs cours passionnants de théorie des nombres. Alexei a également encadré mes premiers pas en recherche et je tiens à le remercier chaleureusement pour cela.

Je suis très reconnaissante à Marc Reversat d'avoir accepté de diriger ma thèse et pour m'avoir conseillé de passer tout d'abord l'agrégation. Il a été un directeur très disponible. Il m'a encouragé régulièrement et s'est assuré que je reste en bonne santé en me donnant des fruits de son jardin.

Je souhaite également remercier Marius van der Put qui a co-dirigé ma thèse et m'a invité à travailler à Groningen plusieurs fois avant de me proposer de passer cette dernière année à ses côtés. Chaque visite a été mathématiquement très fructueuse et je le remercie d'avoir partagé ses nombreuses idées sur le sujet avec moi.

Merci également aux rapporteurs G. Cornelissen and J. Top ainsi qu'aux membres du jury M. Matignon, J-M. Couveignes et particulièrement à J. Tapia qui a relu ce manuscrit avec beaucoup d'attention.

Je dois beaucoup à Mathieu Anel qui a passé des heures à m'aider à comprendre les champs et qui était toujours prêt à répondre à la ligne 'SOS champs' sur gmail. Sa vision très claire du sujet a été précieuse et il a eu la gentillesse et la patience de partager ses connaissances. Steve Meagher m'a aidé plus qu'il ne s'en est rendu compte cette dernière année, en m'écoutant attentivement et en me donnant son point de vue. Ces discussions mathématiques ont été intéressantes et éclairantes.

Ces années n'auraient pas été si douces si je n'avais pas été aussi bien entouré. Des pensées particulières à mes colocos Anne et Delphine avec qui j'ai partagé tant de bons moments et qui sont les seules à comprendre la grandeur des pâtes. Je veux mentionner mon cobureau Yohann pour toutes ces heures passées à travailler en écoutant Mylène Farmer et pour avoir fait de ce bureau le bureau le plus cool du couloir. Je n'oublie

pas les nombreuses heures passées avec Anne et Landry pendant que nous préparions l'agrégation ainsi que les innombrables déjeûners avec les doctorants, passés et présents, du laboratoire Picard.

J'ai toujours été accueillie très chaleureusement au département de Groningen et je voudrais remercier chacun de ses membres. Les doctorants ont tous été tellement gentils avec moi : merci à tous et à chacun ! J'ajouterai un merci particulier à Irene et Olga pour leur touche féminine dans ce monde d'hommes !

Je n'oublie pas l'équipe de Plutolaan qui a contribué à me faire sentir chez moi cette année et qui a supporté patiemment mes (nombreuses) sautes d'humeur.

Je profite des ces remerciements pour dire à ma famille combien je l'aime. Vous avez partagé mes hauts et mes bas et cru en moi dès le début de cette aventure : votre soutien a été mon rocher.

Enfin, je voudrais remercier mon fiancé Loïck pour son soutien et sa patience dans les moments difficiles. J'ai adoré voir 'champs' et 'Langlands géométrique' faire partie de ton vocabulaire commun. Chaque page de ce manuscrit t'es dédié.

Table des matières

Introduction	1
I Prerequis	5
I.1 Rappels sur les systèmes locaux sur \mathbb{C}	7
I.2 Catégories dérivées et faisceaux pervers	10
I.3 Rappels sur la topologie étale	14
I.3.1 Définitions et premières propriétés	14
I.3.2 Rappels sur la topologie de Grothendieck	17
II Introduction aux champs	19
II.1 Définition et premiers exemples	21
II.1.1 Catégorie fibrée en groupoïdes	21
II.1.2 Définition d'un champ	30
II.1.3 Premières propriétés des champs	36
II.2 Le champ des triangles	42
II.2.1 Le champ des triangles rectangles	42
II.2.2 Le champ des triangles : cas général	46
II.3 Le champ des fibrés vectoriels	63
II.3.1 Les fibrés vectoriels en tant que $GL_n(\mathbb{C})$ -torseur	63
II.3.2 Le point de vue faisceautique	64
II.3.3 $\text{Pic}^d X$ et $\text{Bun}_{1,X}^d$	69
II.3.4 Quelques propriétés de $\text{Bun}_{n,X}$	72
II.3.5 Sous-champs ouverts de $\text{Bun}_{n,X}^d$	76
II.3.6 Le champ $\text{Bun}_{n,X}$ dans des cas particuliers	79
II.3.7 Fibrés stables et représentations unitaires	82
II.4 Le champ des connexions	87
II.4.1 La structure de champs	87
II.4.2 Quelques propriétés du champ $\text{Conn}_{n,X}$	90
II.5 Le champ des représentations	93
II.6 Le champ des systèmes locaux	96

III La correspondance géométrique de Langlands dans des cas particuliers	97
III.1 La correspondance de Langlands géométrique	99
III.2 Le cas \mathbb{G}_m	102
III.2.1 Résultats préliminaires	102
III.2.2 Construction de la connexion	104
III.3 Le cas \mathbb{G}_a	107
III.4 Le cas Borel \mathbb{B}	113
III.4.1 Situation	113
III.4.2 Le cas <i>Hecke</i> ₂	114
III.4.3 Obstruction au cas Borel pour $n > 2$	115
IV Les cas singuliers	117
IV.1 Équivalences de catégories	119
IV.1.1 Cas d'une courbe singulière	119
IV.1.2 Cas d'une courbe non singulière munie d'une connexion singulière	133
IV.2 Connexions avec structure de niveau sur la normalisée	142
IV.3 Faisceaux localement libres munis d'une structure de niveau	147
IV.3.1 Définitions	147
IV.3.2 Courbes spéciales singulières et jacobiniennes généralisées	150
IV.3.3 Lien avec les faisceaux localement libres sur X	154
IV.4 Correspondance de Hecke	162
IV.4.1 Énoncé	162
IV.4.2 Preuve du théorème IV.4.1 en utilisant le cas G_m	163
Appendice	165
A De Langlands à Langlands géométrique	165
A.1 La correspondance en caractéristique positive	167
A.1.1 La théorie du corps des classes	167
A.1.2 Le côté galoisien :	168
A.1.3 Le côté automorphe	169
A.2 La correspondance de Langlands géométrique	174
A.2.1 Des représentations galoisiennes aux systèmes locaux	174
A.2.2 Des représentations automorphes aux faisceaux pervers	176
A.2.3 Énoncé de la correspondance géométrique pour les corps de fonctions	177
Appendice	179
B Fibration and homotopy groups	179
Index	183

<i>Table des matières</i>	v
Summary	187
Résumé	189

Liste des notations

$\underline{\mathbb{C}}$	Faisceau constant	7
$\pi_1(X)$	Groupe fondamental de X	7
$f^*\mathcal{M}$	Image inverse du faisceau \mathcal{M}	7
$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{V}$	Produit externe des faisceaux \mathcal{M} et \mathcal{V}	8
$\wedge^n(M)$	n ième puissance extérieure d'un module M	8
\wedge^n	n ième puissance extérieure d'un faisceau localement libre \mathcal{F}	8
$ X $	Points fermés de X	9
$C(\mathcal{A})$	Catégorie des complexes de \mathcal{A}	10
$H^k(A^\bullet)$	Foncteurs de cohomologie d'un complexe	10
$C^+(\mathcal{A})$	Catégorie des complexes bornés à gauche	10
$C^-(\mathcal{A})$	Catégorie des complexes bornés à droite	10
$C^b(\mathcal{A})$	Catégorie des complexes bornés	10
$K^*(\mathcal{A})$	Catégorie des complexes homotopes	11
\underline{A} ou A_X	Faisceau constant d'anneaux	11
$mod(A_X)$	Catégories des A_X -modules	11
$\mathcal{H}^k(F^\bullet)$	Faisceaux de cohomologie de F^\bullet	12
$D_c^b(X)$	Catégorie des complexes constructibles bornés	12
i^*F^\bullet	Image inverse dans la catégorie dérivée	12
$Perv(X, A)$	Catégorie des faisceaux pervers	12
X_{et}	Site étale de X	15
\mathcal{M}^{et}	Faisceau étale associé à un faisceau cohérent	17
Top	Catégorie des espaces topologiques	17
$Var_{\mathbb{C}}$	Catégorie des variétés analytiques complexes	17
$Sch_{\mathbb{C}}$	Catégorie des schémas sur \mathbb{C}	17
Gpd	Catégorie des groupoïdes	21
C_S	Sous-catégorie de C des objets au-dessus de S	23
\underline{X}	Catégorie associée à un objet X	23
$[G \setminus X]$	Champ quotient	24-36
$\dim(f)$	Dimension relative	40

$\dim(C)$	Dimension d'un champ	41
\mathcal{R}	Catégorie des triangles rectangles	42
Ens	Catégorie des ensembles	42
\mathcal{T}	Catégorie des triangles	47
$X \times_{\mathbb{C}} T$	Produit fibré $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{C})} T$	63
$\text{Fib}_{n,X}$	Catégorie des fibrés vectoriels géométriques	63
$\text{Bun}_{n,X}$	Champs des fibrés vectoriels	64
$B\mathbb{G}_m$	Espace classifiant	72
$\text{Conn}_{n,X}$	Champ des connexions	87
$\text{Repr}_n(\pi)$	Champ des représentations d'un groupe π	93
Loc_X^n	Champ des systèmes locaux	96
$X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$	Produit fibré $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_q)} \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})$	99
$Hecke_i$	Champ de Hecke de degré i	99
$f_!$	Pushforward à support compact	99
$\text{Bun}_{n,X}(\mathbb{C})$	\mathbb{C} -points du champ $\text{Bun}_{n,X}$	100
$\mathcal{L} D $	Ensemble des diviseurs effectifs équivalents à D	103
$l(D)$	Dimension de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$	103
\mathbb{G}_a	Groupe additif	107
\mathbb{B}	Groupe de Borel	113
$\underline{\Omega}$	Faisceau des différentielles sur une courbe singulière	119
\underline{d}	Dérivation sur une courbe singulière	119
X_-	Approximation de X par une courbe spéciale singulière	124
$(E, \{\varphi_{ij}\})$	Système local muni d'une structure de niveau	142
$\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_{ij}\}$	Connexions avec structure de niveau	143
$(\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_i\})$	Connexion avec structure de niveau	144
$(\mathcal{L}, \{\varphi_i\})$	Fibrés en droite avec structure de niveau	147
$F(D_1, \dots, D_r)$	Ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droite	148
Y_{D_1, \dots, D_r}	Courbe associée aux diviseurs D_1, \dots, D_r	150
Y'	Courbe singulière associée à Y	150
$\Omega_{Y'}$	Faisceau des différentielles régulières	151
J_{D_1, \dots, D_r}	Ensemble des classes d'équivalence de diviseurs	152
$(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$	Faisceau rigidifié muni d'une structure de niveau	157
$(\mathcal{U}, \psi_{\mathcal{U}})$	Fibré en droite rigidifié universel	158
$J(D)$	Schéma abélien représentant les fibrés en droite	159
\mathbb{A}	Anneau des adèles	167
G_F	Groupe de Galois de \overline{F} sur F	167
D_x	Groupe de décomposition	168
I_x	Sous-groupe d'inertie	168
Fr_x	Morphisme de Frobenius	168
\mathbb{Q}_l	Corps des nombres l -adiques	168
\mathcal{G}_n	Ensemble des classes d'équivalence des représentations l -adiques	168

$z_i(\sigma_x)$	Valeurs propres de Frobenius en x	168
\mathcal{A}_n	Ensemble des classes d'équivalence des représentations automorphes .	170
\mathcal{H}_x	Algèbre de hecke	171
$z_i(\pi_x)$	Valeurs propres de Hecke de π en x	173
$f!$	Image directe à support compact	178
π_i	Groupes d'homotopie d'ordre supérieur	181

Introduction

La conjecture de Langlands pour GL_n et les corps de fonctions sur les corps finis (qui est maintenant un théorème de Laurent Lafforgue) a une traduction géométrique appelée la 'conjecture de Langlands géométrique'. La formulation de cette dernière est assez compliquée et fait intervenir des champs et en particulier le champ $\text{Bun}_{n,X}$ des fibrés vectoriels de rang n sur une courbe X . Dans le deuxième chapitre sur les champs, nous étudions des champs 'simples' tels que le champ quotient ou le champ des triangles. On prouve dans ce chapitre des résultats souvent connus mais qui ne sont prouvés nulle part. Nous étudions en détail le champ $\text{Bun}_{n,X}$ qui apparaît dans l'énoncé de la conjecture. Nous traitons également les champs des connexions, des représentations et des systèmes locaux puisque ces trois notions (équivalentes) sont étroitement liées à l'énoncé de la conjecture de Langlands géométrique.

Nous nous concentrons sur le cas complexe c'est-à-dire le cas d'un corps de fonctions sur \mathbb{C} . La conjecture de Langlands ordinaire ne semble avoir aucun sens dans ce cas contrairement à l'énoncé de la conjecture de Langlands géométrique. Les auteurs E. Frenkel, D. Gaitsgory & K. Vilonen, qui ont prouvé la conjecture de Langlands géométrique dans le cas d'un corps de fonctions sur un corps fini, affirment que le résultat est également vrai dans le cas complexe. Dans ce cas, il existe au moins deux notions de système local. Il est probable que les énoncés et preuves de l'article [FGV] peuvent être imitées pour les deux notions.

Nous choisissons ici une approche différente : nous considérons la conjecture de Langlands géométrique dans des cas où

- $\text{Bun}_{n,X}$ peut être remplacé par un espace de module ordinaire et
- les faisceaux pervers ne sont pas nécessaires.

Dans ces cas-là, on peut donner des preuves explicites de la conjecture. On utilise souvent le vocabulaire des connexions sur les fibrés vectoriels sur des courbes et celui des représentations puisque ces deux catégories sont équivalentes à celle des systèmes locaux. Dans le troisième chapitre, on donne des preuves 'simples' de la correspondance de Langlands pour des connexions de rang 1 et 2 sur une courbe non singulière, ces connexions ayant des groupes de Galois différentiels commutatifs (respectivement inclus

dans \mathbb{G}_m et $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$). Plus précisément, on montre les deux résultats suivants, pour lesquels X désigne une courbe non singulière, projective, irréductible sur \mathbb{C} .

Proposition 1. *On note $H_1 : \text{Pic}X \times X \rightarrow \text{Pic}X, (\mathcal{L}, x) \mapsto \mathcal{L}([x])$. Soit (\mathcal{E}, ∇) une connexion de rang 1 sur X . Alors, il existe une connexion intégrable $(\mathcal{K}, \nabla_{\mathcal{K}})$ de rang 1 sur la variété de Picard $\text{Pic}X$ possédant la propriété $H_1^* \mathcal{K} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}$, où l'isomorphisme désigne ici un isomorphisme de connexions (i.e. isomorphisme des faisceaux et des connexions dont ils sont munis)*

(Cf proposition III.2.1)

On montre ce résultat en utilisant la fibration $X^{(n)} \rightarrow \text{Pic}X$ pour $n > 2g - 2$, où $X^{(n)}$ désigne le produit symétrique de X .

Pour le second résultat, on montre tout d'abord qu'une connexion $(\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ de rang 2 ayant un groupe de Galois différentiel inclus dans $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ est déterminée par un couple $((\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}), (\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}))$, où $(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}})$ est une connexion de rang 1 et $(\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}})$ est une connexion de rang 2 vérifiant

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow (\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

On note $H_2 : X \times \text{Pic}X \times \mathbb{C}^g \rightarrow \text{Pic}X \times \mathbb{C}^g, (x, [\mathcal{L}], \mu) \mapsto ([\mathcal{L}([x])], \mu)$.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{E} = ((\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}), (\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}))$ une connexion de rang 2 sur X ayant un groupe de Galois différentiel inclus dans $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$. Il existe une connexion intégrable \mathcal{K} de rang 2 sur $\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g$ satisfaisant $H_2^* \mathcal{K} \cong \wedge^2 \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}$ (isomorphisme de connexions)*

(Cf proposition III.3.1)

Pour montrer cet énoncé, on utilise l'isomorphisme canonique entre $\pi_1(X)_{ab}$ et $\pi_1(\text{Pic}X)$ et le fait que le groupe de Galois différentiel est commutatif. On utilise également le résultat précédent pour les connexions de rang 1.

Nous indiquons également un cas (celui du groupe de Borel) où une approche naïve ne permet pas de conclure même pour des connexions de rang 2. Il semble dans ce cas qu'il faille considérer les faisceaux pervers (et pas simplement les systèmes locaux) pour prouver la conjecture.

Un autre but de la thèse, traité dans le dernier chapitre, est d'étendre la conjecture de Langlands géométrique pour les corps de fonctions et le cas de la dimension 1 à certaines courbes singulières. En se restreignant à des courbes singulières particulières, on peut montrer que la correspondance de Langlands est vérifiée pour les connexions de rang 1.

On commence par définir la notion correcte de connexions pour les courbes singulières, c'est-à-dire la notion équivalente à celle de système local. On introduit ensuite les structures de niveau sur les connexions afin de pouvoir travailler sur la désingularisée de la courbe. On rappelle que les notions de désingularisée et de normalisée sont équivalentes puisque l'on travaille sur une courbe. On utilisera indifféremment les deux notions. Une

connexion avec structure de niveau en une collection de diviseurs effectifs D_1, \dots, D_r est la donnée d'une connexion (\mathcal{L}, ∇) sur la normalisée \tilde{X} de X et d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules

$$\varphi_i : \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D_i)$$

définis à multiplication scalaire près. Cette notion va nous permettre d'énoncer la correspondance de Langlands géométrique sur une courbe singulière X en considérant une connexion sur la normalisée \tilde{X} de X , munie d'une structure de niveau. On montre en effet, que la catégorie des connexions sur une courbe singulière X est équivalente à la catégorie des connexions sur sa normalisée, munies d'une structure de niveau. On a le même résultat pour les systèmes locaux. (Cf proposition IV.2.6)

Une partie du dernier chapitre est également consacré aux jacobiniennes généralisées et à leurs liens avec les fibrés vectoriels munis d'une structure de niveau, c'est-à-dire les fibrés vectoriels sur une courbe lisse X munis d'une collection d'isomorphismes de \mathcal{O}_X -modules

$$\psi_i : \varphi_i : \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D_i).$$

On montre en effet que le foncteur associé aux classes d'équivalence des fibrés vectoriels munis d'une structure de niveau est représentable par un schéma abélien qui est en fait une jacobienne généralisée (celle associée aux diviseurs D_1, \dots, D_r). On se place ensuite dans le cas d'une courbe singulière X n'ayant que des points multiples ordinaires et on note \tilde{X} sa normalisée. Au dessus de chaque point singulier Q_i , on a un ensemble fini $\{P_{ij}\}$ de points de \tilde{X} . On note $D_i := \sum_j [P_{ij}]$ pour tout i , J_{D_1, \dots, D_r} l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés vectoriels munis d'une structure de niveau en ces diviseurs et $S := \cup \text{supp}(D_i)$. On note $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}]$ la classe d'équivalence contenant $(\mathcal{L}, \{\varphi_i\})$. On définit l'application

$$H : \begin{array}{ccc} \tilde{X} \setminus S \times J_{D_1, \dots, D_r} & \rightarrow & J_{D_1, \dots, D_r} \\ (x, (\mathcal{L}, \{\varphi_i\})) & \mapsto & (\mathcal{L}([x]), \{\varphi_i\}) \end{array} .$$

On a alors

Théorème 1. *Soit $(\mathcal{L}, \nabla, \{\varphi_i\})$ une connexion de rang 1 sur \tilde{X} avec structure de niveau. Il existe une unique connexion $(\mathcal{K}, \nabla_{\mathcal{K}})$ de rang 1 sur J_{D_1, \dots, D_r} qui vérifie $H^* \mathcal{K} \simeq \mathcal{L}|_{\tilde{X} \setminus S} \boxtimes \mathcal{K}$ (isomorphisme de connexions)*

(Cf théorème IV.4.1)

On montre ce résultat en utilisant le cas précédent d'une connexion de rang 1 sur une courbe non singulière et la suite exacte satisfaite par le schéma abélien qui représente le foncteur associé aux fibrés en droite sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau.

Enfin, dans l'appendice, on explique le passage de la conjecture de Langlands ordinaire à la conjecture de Langlands géométrique en se basant sur l'article de Frenkel 'recent advances in geometric Langlands' [Fre] et le livre édité par Bernstein et Gelbart 'an

introduction to the Langlands program'[BG]. On définit les représentations galoisiennes et automorphes qui apparaissent dans l'énoncé de la correspondance de Langlands ordinaire. On explique ensuite comment les représentations galoisiennes peuvent se traduire par des systèmes l -adiques et le passage des représentations automorphes aux faisceaux pervers sur le champ des fibrés vectoriels. On peut alors énoncer la correspondance en termes de systèmes locaux et de faisceaux pervers, c'est-à-dire énoncer la correspondance de Langlands géométrique.

Avant de conclure cette introduction, observons que cette thèse contient des résultats de différentes natures :

1. Certains peuvent être trouvés facilement dans la littérature. Ils apparaissent ici par commodité pour le lecteur. C'est le cas du chapitre I et de la section II.1.
2. Certains sont connus mais sont difficiles à trouver dans la littérature et/ou il n'existe pas de preuves détaillées. C'est le cas du contenu des sections II.2, II.3 sauf les sous sections II.3.3 II.3.6, les sections II.6, III.1 et III.2
3. Des résultats qui sont probablement nouveau. C'est le cas de la section II.2, les sous sections II.3.3 et II.3.6, les sections II.4, II.5 et II.6, III.2,III.3 et III.4 et le chapitre IV.
4. Des résultats qui sont déjà très bien expliqués et qui apparaissent ici parce que nous pensons qu'ils peuvent intéresser le lecteur. Nous avons copié les textes originaux et rajouté plus de détails. C'est le cas de l'appendice A.

Chapitre I

Prerequis

I.1 Rappels sur les systèmes locaux sur \mathbb{C}

Soit X une variété analytique lisse, connexe, de dimension d sur \mathbb{C} . Les trois catégories suivantes sont équivalentes (cf [Del1] et [vdPS])

1. La catégorie des représentations complexes de dimension finie de $\pi_1(X) := \pi_1(X, *)$.
2. La catégorie des systèmes locaux complexes, c'est-à-dire les faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur X localement isomorphes au faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}^n$.
3. La catégorie des connexions intégrables (\mathcal{M}, ∇) sur X .

On rappelle qu'une **connexion** sur X est la donnée d'un fibré vectoriel \mathcal{M} sur X et d'un homomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = f\nabla(s) + df \otimes s \in \Gamma(U, \Omega_Z^1 \otimes \mathcal{M}), \forall f \in \mathcal{O}_X(U),$$

pour tout ouvert U de X . La condition d'intégrabilité se traduit par $\nabla^2 = 0$, où l'action de ∇ est étendue à $\Omega_Z^1 \otimes \mathcal{M}$ par

$$\nabla(w \otimes s) = dw \otimes s - \nabla(s) \wedge w, \forall w \in \Omega_Z^1(U), \forall s \in \mathcal{M}(U)$$

pour tout ouvert U de X .

Remarque I.1.1. *Toute connexion sur une courbe est intégrable.*

Cette équivalence de catégories nous permet de travailler selon les cas avec le langage des représentations, des systèmes locaux ou des connexions.

Rappelons quelques faits sur les connexions que nous allons utiliser par la suite. Soient X, Y deux variétés et $f : X \rightarrow Y$. On se donne maintenant une connexion (\mathcal{M}, ∇) sur Y . L'image inverse du faisceau de \mathcal{O}_Y -module localement libre \mathcal{M} est $f^{-1}\mathcal{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, notée $f^*\mathcal{M}$ et c'est un faisceau de \mathcal{O}_X -module, localement libre de même rang que \mathcal{M} . Voyons maintenant comment on peut transporter la connexion ∇ . Le pullback de la connexion ∇ est l'application

$$f^*\mathcal{M} \rightarrow f^*\Omega_Y^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}.$$

En composant par l'application $f^*\Omega_Y^1 \rightarrow \Omega_X^1$, on en déduit une application que nous noterons

$$f^*\nabla : f^*\mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M},$$

et qui vérifie bien la propriété de Leibniz. A partir de maintenant, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précisera pas la connexion sur le pullback d'un fibré vectoriel. Plus précisément, on notera souvent $f^*\mathcal{M}$ le pullback de la connexion (\mathcal{M}, ∇) en sous-entendant que le fibré vectoriel $f^*\mathcal{M}$ est muni de la connexion construite ci-dessus.

De la même manière, si $(\mathcal{M}, \nabla_{\mathcal{M}})$ et $(\mathcal{V}, \nabla_{\mathcal{V}})$ sont deux connexions respectivement sur X et Y , on écrira

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{V} := p_1^* \mathcal{V} \otimes p_2^* \mathcal{M},$$

où p_i désigne la projection sur le i -ème facteur pour le faisceau sur $X \times Y$ muni de la connexion construite ci-après. On sait déjà ce que sont les pullbacks des connexions $(\mathcal{V}_1, \nabla_1) := p_1^*(\mathcal{V}, \nabla_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{V}_2, \nabla_2) := p_2^*(\mathcal{M}, \nabla_{\mathcal{M}})$, il suffit donc de savoir comment construire une connexion sur le produit tensoriel $\mathcal{V}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{V}_2$. Soit x un point fermé de X et

$$f \otimes g \in (\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2)_x = \mathcal{V}_{1x} \otimes \mathcal{V}_{2x}.$$

On définit alors

$$(\nabla_1 \otimes \nabla_2)(f \otimes g) = \nabla_1(f) \otimes g + f \otimes \nabla_2(g),$$

où par abus on note

$$f \otimes \nabla_2(g) := \Omega_2^1(g) \otimes f \otimes a_2(g) \text{ si } \nabla_2(g) = \Omega_2^1(g) \otimes a_2(g).$$

Ceci définit bien une application de $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ et on montre facilement qu'elle vérifie la règle de Leibniz. Ainsi par la suite, $\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{M}$ désignera le faisceau de $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -module muni de la connexion $p_1^* \nabla_{\mathcal{V}} \otimes p_2^* \nabla_{\mathcal{M}}$.

Enfin, étant donnée une connexion (\mathcal{V}, ∇) , on peut munir le faisceau $\wedge^i \mathcal{V}$ d'une connexion naturelle. Rappelons d'abord la définition de produit extérieur d'un module. Soit A un anneau et soit M un A -module. On note $T^n(M)$ le produit tensoriel de n copies de M et $T(M) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$. Alors l'algèbre extérieure

$$\wedge(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \wedge^n(M)$$

est définie comme le quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par toutes les expressions $x \otimes x$ pour $x \in M$. La n ème composante $\wedge^n(M)$ est appelée la **n ème puissance extérieure** de M . Étant donné un faisceau \mathcal{F} de \mathcal{O}_X -module, on définit la **puissance extérieure** de \mathcal{F} comme le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \wedge^n \mathcal{F}(U)$. Si \mathcal{F} est un faisceau localement libre, alors $\wedge^n \mathcal{F}$ est aussi localement libre (Cf [Har]). D'après ce qui précède, il est clair que si \mathcal{F} est muni d'une connexion, on peut munir le faisceau $\wedge^n \mathcal{F}$ d'une connexion que nous omettrons de préciser par la suite.

On suppose maintenant que X est une courbe et qu'elle est de plus l'analytification d'une courbe lisse complète, projective et irréductible. On termine ce paragraphe en rappelant que si (\mathcal{M}, ∇) est une connexion sur une courbe X lisse complète et irréductible, alors le faisceau \mathcal{M} est de degré 0. Soit n le rang du faisceau \mathcal{M} , alors le fibré en droite $\mathcal{L} := \wedge^n \mathcal{M}$ hérité d'une connexion provenant de ∇ . Il suffit donc de prouver qu'un fibré en droite muni d'une connexion est de degré nul. Notons $\mathbb{C}(X)$ le corps des fonctions de X . La fibre générique de \mathcal{L} est de la forme $\mathbb{C}(X)e$ et la connexion $\nabla : \mathbb{C}(X)e \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}}^1 \otimes e$ au point générique est donnée par $\nabla e = \Omega^1 \otimes e$. La connexion ∇ n'a pas de singularité et ceci équivaut au fait que Ω^1 ait des pôles d'ordre au plus 1 et que les résidus

de Ω^1 soient dans \mathbb{Z} . On considère le diviseur $D = \sum_{p \in X} \text{Res}_P(\Omega^1)[P]$ sur X . Soient $Q \in |X|$ et t un paramètre local en Q , où $|X|$ désigne l'ensemble des points fermés de X . Alors $\mathcal{L}_Q = t^d \mathcal{O}_{X,s} e$ pour un certain entier d . La condition $\nabla \mathcal{L}_Q \subset \Omega_{X,s}^1 \otimes \mathcal{L}_Q$ implique que $d = -\text{Res}_Q(\Omega^1)$. On conclut que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ et puisque la somme des résidus est nulle, on obtient $\text{deg } \mathcal{L} = 0$. Dans la suite, nous travaillerons essentiellement avec les représentations du groupe fondamental $\pi_1(X)$ et les connexions. Tous les énoncés et preuves peuvent être réécrits dans le langage des systèmes locaux en utilisant le dictionnaire suivant :

Connexions		systèmes locaux
(\mathcal{M}_E, ∇)	\leftrightarrow	$E := \ker(\mathcal{M}_E, \nabla)$
$(\mathcal{O}_X, 1)$	\leftrightarrow	$\underline{\mathbb{C}}$
$(f^* \mathcal{M}_E, f^* \nabla)$	\leftrightarrow	$f^{-1} E$
$(\mathcal{M}_E \boxtimes \mathcal{M}_F, \nabla_E \boxtimes \nabla_F)$	\leftrightarrow	$p_1^{-1} E \otimes p_2^{-1} F$

où le produit tensoriel de deux systèmes locaux est sur le faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$ sur $X \times Y$.

Notations : Dans toute la suite, on désignera par des lettres calligraphiées les connexions et par des lettres capitales les systèmes locaux.

I.2 Catégories dérivées et faisceaux pervers

Ce qui suit provient de [Dim] et [DB]

Soit \mathcal{A} une catégorie. On définit la catégorie $C(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes d'objets de \mathcal{A} , c'est-à-dire

$$A^\bullet : \dots \rightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

et un morphisme $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet$ est donné par

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{-1} & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & u^{-1} \downarrow & & u^0 \downarrow & & u^1 \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{-1} & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & B^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

L'ensemble de ces morphismes est noté $Hom(A^\bullet, B^\bullet)$. On a une injection de catégories donné par

$$c_0 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A}) \\ A \mapsto \dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{array} \right.$$

où A est sur la position zéro dans le complexe.

Remarque I.2.1. Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, alors $C(\mathcal{A})$ l'est aussi.

On suppose dorénavant que \mathcal{A} est abélienne. On peut alors définir les foncteurs de cohomologie

$$H^k : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}, H^k(A^\bullet) = \frac{\ker d^k}{\text{im} d^{k-1}}.$$

Ces foncteurs satisfont la propriété suivante : Si

$$0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$$

est une suite exacte dans $C(\mathcal{A})$, alors on a une suite exacte longue dans \mathcal{A}

$$\dots \rightarrow H^k(A^\bullet) \rightarrow H^k(B^\bullet) \rightarrow H^k(C^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

Notations :

- Soit $C^+(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes bornés à gauche c'est-à-dire pour lesquels il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $A^m = 0$, pour tout $m \leq n_0$ et les objets sont donc de la forme

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow A^{-1} \rightarrow A^0 \rightarrow \dots$$

- Soit $C^-(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes bornés à droite, c'est-à-dire pour lesquels il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $A^m = 0$, $\forall m \geq n_0$ et les objets sont donc de la forme

$$\dots \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

- Soit $C^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $C(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes bornés, c'est-à-dire bornés à droite et à gauche.

A partir de maintenant, on écrit $C^*(\mathcal{A})$ où l'exposant peut être remplacé par $+$, $-$, b ou rien.

Définition I.2.2. *Let $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Obj}(C(\mathcal{A}))$*

1. Un morphisme $X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet$ est appelé **quasi-isomorphisme** si le morphisme

$$H^k(X^\bullet) \xrightarrow{H^k(u)} H^k(Y^\bullet)$$

est un isomorphisme pour tout k .

2. Deux morphismes $u, v : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ sont dits **homotopes** s'il existe des morphismes $h_k : X^k \rightarrow Y^{k-1}$ pour tout k tels que $u - v = d_{Y^\bullet} \circ h + h \circ d_{X^\bullet}$ autrement dit $(u - v)_k = d_{Y^\bullet}^{k-1} \circ h_k + h_{k+1} \circ d_{X^\bullet}^k, \forall k$. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{k-1} & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{d_{X^\bullet}^k} & X^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & \swarrow h_k & \downarrow & \swarrow h_{k+1} & \downarrow & & \\
 & & (u-v)_{k-1} & & (u-v)_k & & (u-v)_{k+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{k-1} & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^{k-1}} & Y^k & \xrightarrow{d_{Y^\bullet}^k} & Y^{k+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

On note $u \sim v$ deux morphismes homotopes.

Définition I.2.3. *On peut maintenant définir la catégorie $K^*(\mathcal{A})$ des complexes homotopes de la catégorie \mathcal{A} . Ses objets sont les mêmes que ceux de $C^*(\mathcal{A})$ et ses morphismes sont les classes d'homotopie des morphismes de $C^*(\mathcal{A})$. En d'autres termes, on a*

$$\text{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet) / \sim.$$

Ce dernier est noté $[X^\bullet, Y^\bullet]$.

Remarque I.2.4. *La catégorie $K^*(\mathcal{A})$ est additive mais en général pas abélienne.*

La catégorie \mathcal{A} est toujours supposée abélienne et on note His l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K^*(\mathcal{A})$. On peut montrer (Cf [Bor]) que l'ensemble His est un système multiplicatif dans $K^*(\mathcal{A})$.

Définition I.2.5. *On appelle catégorie dérivée de la catégorie abélienne \mathcal{A} la localisation $D^*(\mathcal{A})$ de $K^*(\mathcal{A})$ par rapport au système multiplicatif His .*

Soit X une variété analytique complexe et notons $Ab(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens sur X . Soit A un anneau commutatif noethérien ($A = \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$). On note A_X ou \underline{A} , le faisceau constant d'anneau et on note $mod(A_X)$ la catégorie des A_X -modules.

Définition I.2.6. On appelle **stratification** de X une partition $\mathcal{P} = (X_j)_{j \in J}$ de X localement finie, en sous-ensembles finis non vides connexes appelés **strates** de X . La stratification est dite **admissible** si elle satisfait une des conditions suivantes :

1. Chaque frontière $\delta X_j := \overline{X_j} \setminus X_j$ est une union de strates appartenant à \mathcal{P} (condition aux frontières).
2. Pour tout $j \in J$, les espaces $\overline{X_j}$ et δX_j sont des sous-espaces analytiques complexes fermés de X (condition de constructibilité).

Nous arrivons à la définition de faisceau constructible.

Définition I.2.7.

1. Un faisceau $\mathcal{F} \in \text{mod}(A_X)$ est dit **faiblement constructible** s'il existe une stratification admissible $\mathcal{P} = (X_j)_{j \in J}$ de X telle que la restriction $\mathcal{F}|_{X_j}$ est un système local pour tout $j \in J$.
2. Un faisceau $\mathcal{F} \in \text{mod}(A_X)$ est **constructible** s'il est faiblement constructible et si toutes ses fibres \mathcal{F}_x sont des A -modules de type fini, pour tout $x \in |X|$.
3. Un complexe $F^\bullet \in D^+(\text{Mod}(A_X))$ est dit **faiblement constructible** (respectivement **constructible**) si tous ses faisceaux de cohomologie, notés $\mathcal{H}^k(F^\bullet)$, sont faiblement constructibles (respectivement constructibles).

On note $D_c^b(X)$ la catégorie des complexes constructibles bornés de A_X -modules. Soit $p : 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction décroissante telle que $0 \leq p(n) - p(m) \leq n - m$ pour tout $n \leq m$. Une telle fonction est appelée **fonction de perversité**. Pour une strate S d'une stratification, on pose $p(S) := p(2 \dim S)$. L'exemple souvent trouvé dans la littérature est $p(S) = -\dim(S)$.

Définition I.2.8. On considère une stratification admissible $\mathcal{P} = (X_\alpha)$, avec un nombre fini de strates et on se donne une fonction de perversité $p : 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. Si $F^\bullet \in D_c^b(X)$ est un complexe constructible borné de faisceaux sur X , on dit que $F^\bullet \in {}^p D^{\leq 0}(X)$ (resp. ${}^p D^{\geq 0}(X)$) vis-à-vis de la stratification \mathcal{P} si

$$\mathcal{H}^j(i_S^{-1} F^\bullet) = 0 \quad \forall j > p(S) \quad \forall S \in \mathcal{P}$$

$$\text{(resp. } \mathcal{H}^j(i_S^! F^\bullet) = 0 \quad \forall j < p(S) \quad \forall S \in \mathcal{P})$$

où $i_S : S \rightarrow X$ désigne l'inclusion, i_S^{-1} l'image inverse et $i_S^!$ est donné par

$$i_S^! F^\bullet := i_S^{-1} R\Gamma_S(F^\bullet).$$

Définition I.2.9. La catégorie des **faisceaux pervers** est définie comme suit :

$$\text{Per}(X, A) = {}^p D^{\leq 0}(X) \cap {}^p D^{\geq 0}(X)$$

Nous allons donner deux exemples de faisceaux pervers pour la fonction de perversité $p(n) = -\frac{1}{2}n$, et donc $p(S) = -\dim(S)$.

- On suppose tout d'abord que X est réduit à un point et $A = \mathbb{C}$. Alors la catégorie des complexes constructibles bornés de A_X -modules est tout simplement la catégorie des complexes bornés de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie. La dualité de Verdier montre alors qu'un faisceau pervers est quasi-isomorphe à un complexe nul partout sauf en la position zero. La catégorie des faisceaux pervers est dans ce cas équivalente à la catégorie des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie.

- Supposons maintenant que X est une courbe algébrique ou analytique et soit F^\bullet un faisceau pervers sur X . Alors le théorème d'annulation d'Artin donne

$$\mathcal{H}^i(F^\bullet) = 0 \quad \forall i \notin \{-1, 0\}.$$

On peut prouver que dans ce cas, F^\bullet est quasi-isomorphe à un complexe de la forme

$$F'^\bullet : 0 \rightarrow \mathcal{F}'^{-1} \rightarrow \mathcal{F}'^0 \rightarrow 0$$

La perversité du faisceau F'^\bullet impose que $\mathcal{H}^0(F'^\bullet)$ ait un support fini et $\Gamma_{\{x\}}(\mathcal{H}^{-1}(F'^\bullet)) = 0$ pour tout $x \in X$.

Dans la formulation de la conjecture de Langlands géométrique, on trouve des faisceaux pervers sur le champ $\text{Bun}_{n,X}$ (Cf section II.3). Cette définition est similaire à celle donnée ici sauf pour la définition de stratification et de système local sur un champ. Pour la définition de stratification d'un champ, nous avons besoin d'introduire les sous champs ouverts et fermés de $\text{Bun}_{n,X}$ et ceci est étudié dans la section II.3.5. Un système local sur un espace analytique T sur \mathbb{C} est ici, par définition, un faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels pour la topologie sur T , localement isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}^d$.

Un **système local** E sur, disons $\text{Bun}_{n,X}$, signifie la donnée d'un système local $Q(\mathcal{L}, T)$ pour tout objet (\mathcal{L}, T) de $\text{Bun}_{n,X}$ tel que pour tout morphisme

$$(m, \varphi) : (\mathcal{L}_1, T_1) \rightarrow (\mathcal{L}_2, T_2)$$

dans la catégorie $\text{Bun}_{n,X}$, on a un isomorphisme

$$m^*Q(\mathcal{L}_1, T_1) \xrightarrow{\sim} Q(\mathcal{L}_2, T_2),$$

qui dépend de φ .

I.3 Rappels sur la topologie étale

I.3.1 Définitions et premières propriétés

On rappelle ici les bases de la topologie étale. Ces rappels proviennent principalement de [Mil2] et [SGA4]. Dans toute cette section, X désigne un schéma sauf mention explicite.

Définition I.3.1. *Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est appelé **localement de présentation finie** si pour tout point $x \in X$ il existe des voisinages affines U et V respectivement de x et $f(x)$ avec $f(U) \subset V$ tels que la $\mathcal{O}_Y(V)$ -algèbre $\mathcal{O}_X(U)$ soit de présentation finie. Le morphisme est dit **plat** (respectivement **fidèlement plat**) si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ -module plat (respectivement fidèlement plat) pour tout point $x \in X$. On rappelle qu'un A -module M est dit plat si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$, avec $N \in \text{Mod}A$, est exact. Un A -module M est dit fidèlement plat si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$ est fidèle. Autrement dit, M est fidèlement plat s'il satisfait : une suite de A -modules*

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow 0$$

est exacte si et seulement si la suite

$$0 \rightarrow P \otimes_A M \rightarrow Q \otimes_A M \rightarrow S \otimes_A M \rightarrow 0$$

est exacte.

Définition I.3.2. *Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$, localement de présentation finie, est dit **étale** s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes :*

- *Le morphisme f est plat et non ramifié c'est-à-dire que pour tout point $y \in Y$, la fibre $X_y = X \times_Y \text{spec}(k(y))$ est égale en tant que $k(y)$ -schéma à la somme des spectres d'extensions séparable et finie de $k(y)$.*
- *Pour tout schéma affine Y' au-dessus de Y et tout sous-schéma Y'_0 de Y' défini par un idéal nilpotent, l'application canonique*

$$\text{Hom}_Y(Y', X) \rightarrow \text{Hom}_Y(Y'_0, X)$$

est bijective.

Par exemple, les immersions ouvertes sont étales. On a la définition équivalente suivante :

Définition I.3.3. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre deux variétés algébriques lisses. Il est dit **étale en x** s'il est lisse et s'il induit un isomorphisme entre les espaces tangents $df : T_x(Y) \rightarrow T_{f(x)}$. Un tel morphisme est dit **étale** s'il l'est en tout ses points.*

Remarquons qu'un morphisme étale entre variétés régulières est ouvert et quasi fini (i.e. ses fibres sont finies)

Proposition I.3.4.

- Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont étales, la composée $g \circ f$ l'est aussi.
- Si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont des S -morphisms étales, alors $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$ est étale.
- Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ et g sont étales, alors f l'est aussi.

Soit X un schéma. On note X_{et} la catégorie dont les objets sont les morphismes étales $U \rightarrow X$ et les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

où les morphismes $V \rightarrow X$ et $U \rightarrow X$ sont étales (et donc automatiquement $V \rightarrow U$ aussi).

Définition I.3.5. Une famille $\{X'_i \xrightarrow{\varphi_i} X'\}$ de morphisme de X_{et} est appelée **recouvrement étale** ou **famille couvrante** si $X' = \cup_i \varphi_i(X'_i)$. On appelle **site étale** de X la catégorie X_{et} munie de l'ensemble de familles surjectives de morphismes de X_{et} .

Par définition, un voisinage ouvert d'un point $x \in X$ est une application étale $U \rightarrow X$ ainsi qu'un point $u \in U$ s'envoyant sur x .

Définition I.3.6. Un **préfaisceau** sur X_{et} est un foncteur contravariant $\mathcal{F} : X_{et} \rightarrow \text{Ens}$. C'est un **faisceau** si de plus la suite

$$\mathcal{F}(U) \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \tag{I.1}$$

est exacte pour tout recouvrement étale $\{U_i \rightarrow U\}$.

Notons que si \mathcal{F} est un faisceau sur X_{et} et $U \rightarrow X$ est étale, alors $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau sur U muni de la topologie de Zariski. Nous voulons maintenant considérer des recouvrements galoisiens.

Soit $\varphi : Y \rightarrow X$ un morphisme, et G un groupe fini. Rappelons qu'une action à droite de G sur Y sur X est une application $Y \times G \rightarrow Y, (y, g) \mapsto y.g$ telle que

$$\varphi(y.g) = \varphi(y), \forall g \in G, y \in Y.$$

On demande aussi

$$(y.g).h = y.(gh), \quad \forall g, h \in G, \forall y \in Y.$$

Si X et Y sont affines, alors φ correspond à un homomorphisme d'anneau $A \rightarrow B$ et donner une action à droite de G sur Y au-dessus de X est équivalent à se donner une action à droite de G sur la A -algèbre B .

Définition I.3.7. Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme fidèlement plat et soit G un group agissant à droite sur Y au-dessus de X . Alors $Y \rightarrow X$ est appelé **recouvrement galoisien de X de groupe G** si le morphisme $Y \times G \rightarrow Y \times_X Y$ donné par $(u, g) \mapsto (y, y.g)$ est un isomorphisme.

Le produit $Y \times G$ désigne la réunion disjointe de copies de Y indicées par les éléments de G . On remarque que si φ est un recouvrement galoisien, alors φ est surjective, finie, étale de degré égal à l'ordre de G . Réciproquement, on peut aussi montrer qu'étant donnée une application $Y \rightarrow X$ surjective, finie, et étale de degré l'ordre de $\text{Aut}_X Y$, alors c'est un recouvrement galoisien de groupe $\text{Aut}_X Y$. Nous allons maintenant donner un critère pour qu'un préfaisceau soit un faisceau sur X_{et} .

Proposition I.3.8. Afin de vérifier qu'un préfaisceau \mathcal{F} sur X_{et} est un faisceau, il suffit de vérifier que \mathcal{F} satisfait la condition faisceautique I.1 pour les recouvrements de Zariski et pour les recouvrements étale de la forme $V \rightarrow U$ (i.e. qui consistent en une unique application) où V, U sont tous les deux affines.

(Cf [Mil2, prop 6.6] et [SGA4])

Nous pouvons maintenant donner des exemples de faisceaux étales.

Exemples :

- *Le faisceau structural sur X_{et} :* Pour tout $U \rightarrow X$ étale, on définit $\mathcal{O}_{X_{et}}(U) = \mathcal{O}_X(U)$. Sa restriction à U munie de la topologie de Zariski est un faisceau. On peut montrer que c'est un faisceau sur X_{et} en utilisant des résultats d'algèbre commutative.

- *Le faisceau constant :* Soit X une variété ou un schéma quasi-compact. Pour tout ensemble S et toute application étale $U \rightarrow X$, on pose

$$\mathcal{F}(U) = S^{\pi_0(U)}$$

ce qui signifie le produit de copies de l'ensemble S indicés par le nombre $\pi_0(U)$ de composantes connexes de U . Ceci définit un faisceau sur X_{et} appelé le **faisceau constant** défini par S .

- *Le faisceau définie par un \mathcal{O}_X -module cohérent :* Soit \mathcal{M} un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules, où X est muni de la topologie de Zariski. Pour tout morphisme étale $\varphi : U \rightarrow X$,

on obtient un \mathcal{O}_U -module cohérent $\varphi^*\mathcal{M}$ sur U (muni de la topologie de Zariski). On définit un préfaisceau sur X_{et} en posant

$$U \mapsto \Gamma(U, \varphi^*\mathcal{M}).$$

On peut montrer que ce préfaisceau est en fait un faisceau. On le note \mathcal{M}^{et} . On a par exemple $(\mathcal{O}_X)^{et} = \mathcal{O}_{X_{et}}$ (où \mathcal{O}_X est le faisceau structural de X muni de la topologie de Zariski).

I.3.2 Rappels sur la topologie de Grothendieck

Définition I.3.9. Une (pré)topologie de Grothendieck \mathcal{T} sur une catégorie \mathcal{S} est la donnée pour tout ouvert U d'un ensemble $\text{Cov}(U)$ de familles de morphismes $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U\}_{\alpha \in A}$, où chaque φ_α est un morphisme de \mathcal{S} . Cette donnée est appelée **recouvrement de U** et satisfait les propriétés suivantes :

- Si $\varphi : V \rightarrow U$ est un isomorphisme de \mathcal{S} , alors $\{\varphi : V \rightarrow U\}$ est un recouvrement.
- Si $\{U_\alpha \rightarrow U\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement et $\{V_{\alpha,\beta} \rightarrow U_\alpha\}_{\beta \in B_\alpha}$ est un recouvrement pour tout α , alors la famille $\{V_{\alpha,\beta} \rightarrow U\}_{\alpha \in A, \beta \in B_\alpha}$, obtenue par composition, est un recouvrement.
- Si $\{U_\alpha \rightarrow U\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement et $V \rightarrow U$ est un morphisme de \mathcal{S} , alors chaque produit fibré $U_\alpha \times_U V$ existe dans \mathcal{S} et $\{U_\alpha \times_U V \rightarrow V\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement.

Par abus de langage, on appellera **site** dans cette thèse, une catégorie munie d'une (pré)topologie de Grothendieck comme définie ci-dessus.

Exemples :

1. Quand \mathcal{S} est la catégorie Top des espaces topologiques, on obtient un prétopologie de Grothendieck en prenant pour recouvrement d'un espace U une famille de sous ensembles ouverts $U_\alpha \subset U$ avec $\cup U_\alpha = U$.
2. Pour les espaces topologiques, on définit aussi un recouvrement en prenant considérant les immersions ouvertes $T_\alpha \rightarrow T$ avec $\coprod_\alpha T_\alpha \rightarrow T$ est surjective.
3. On définit similairement des recouvrements pour la catégorie $Var_{\mathbb{C}}$ des variétés analytiques complexes.
4. Dans la catégorie des schémas munis de la topologie de Zariski, un recouvrement de U est une famille d'ouverts de Zariski U_α , avec $\cup U_\alpha = U$.
5. Dans la catégorie des schémas, munis de la topologie étale, un recouvrement est une collection de morphismes étales $\{S_i \xrightarrow{f_i} S\}$ tels que $\cup f_i(S_i) = S$.

Chapitre II

Introduction aux champs

II.1 Définition et premiers exemples

Soient X un espace topologique ayant certaines propriétés et G un groupe agissant à gauche sur X . En général $G \backslash X$ n'est pas un espace de même type que X et/ou ne satisfait pas les propriétés attendues d'un quotient. C'est une des raisons pour lesquelles les champs ont été introduits. Dans le cas d'une action de groupe, le champ $[G \backslash X]$ a toutes les bonnes propriétés que ne possède pas l'espace $G \backslash X$. Dans cette section, nous allons développer les bases sur les champs, définir la catégorie $[G \backslash X]$ et vérifier que c'est un champ.

II.1.1 Catégorie fibrée en groupoïdes

Définition II.1.1. *Un diagramme commutatif (dans une catégorie donnée)*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

est dit **cartésien** si pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p'} & B \\ q' \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

il existe un unique morphisme $h : U \rightarrow A$ tel que $p \circ h = p'$ et $q \circ h = q'$. On appelle A le **produit fibré** de B et C sur D .

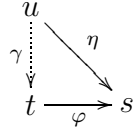
Définition II.1.2. *Un **groupoïde** est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes. La catégorie notée Gpd des groupoïdes a pour objets les groupoïdes et pour morphismes les foncteurs entre groupoïdes.*

Définition II.1.3. *Soit \mathcal{S} une catégorie. Une catégorie \mathcal{C} est dite **fibrée en groupoïdes** sur \mathcal{S} si l'on a un foncteur $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ vérifiant :*

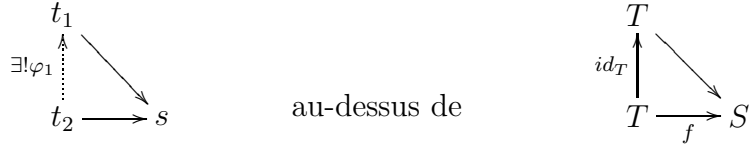
1. *Pour tout morphisme $f : T \rightarrow S$ dans \mathcal{S} et tout objet $s \in \mathcal{C}$ tel que $p(s) = S$ il existe un objet $t \in \mathcal{C}$ tel que $p(t) = T$ et un morphisme $\varphi : t \rightarrow s$ dans \mathcal{C} tel que $p(\varphi) = f$.*
2. *Étant donné un diagramme commutatif dans \mathcal{S}*

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ g \downarrow & \searrow h & \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

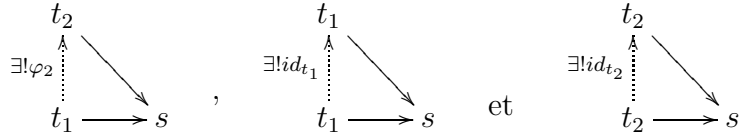
et des morphismes $\varphi : t \rightarrow s$ et $\eta : u \rightarrow s$ dans C tels que $p(\varphi) = f$ et $p(\eta) = h$, il existe un unique morphisme $\gamma : u \rightarrow t$ dans C tel que $p(\gamma) = g$ et tel que le diagramme suivant est commutatif :



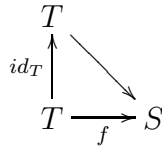
La deuxième propriété appliquée à $U = T, h = f$ et $g = id_T$ implique qu'étant donné $f : T \rightarrow S$ et $s \in \text{Obj}(C)$ tel que $p(s) = S$, l'objet t tel que $p(t) = T$ et $p(t \xrightarrow{\varphi} s) = f$, dont l'existence est garantie par le premier axiome, est déterminé à isomorphisme unique près. En effet, supposons que l'on ait t_1 et t_2 deux pullbacks de s par f . On a d'une part



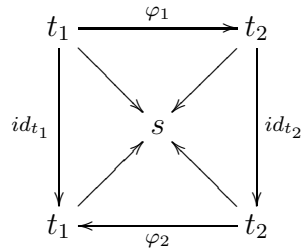
et d'autre part, on a les diagrammes commutatifs



tous trois au dessus du diagramme suivant dans \mathcal{S} :



Ceci implique que le diagramme suivant commute :



d'où $\varphi_1 \circ \varphi_2 = id_{t_2}$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1 = id_{t_1}$. Ceci montre l'unicité à isomorphisme unique près. On notera f^*s un pullback de s par f . On peut considérer que le premier axiome donne l'existence des pullbacks des objets et que le deuxième garantit l'unicité à isomorphisme canonique près des pullbacks.

Remarque II.1.4. *La démonstration précédente montre également que le morphisme unique au-dessus de id_T est un isomorphisme.*

Notations :

Soit S un objet de \mathcal{S} . On note C_S la sous catégorie de \mathcal{C} dont les objets sont les objets X de \mathcal{C} tels que $p(X) = S$ et les morphismes sont les morphismes au-dessus de id_S .

Montrons que le deuxième axiome implique que tous les morphismes de C_S sont des isomorphismes. Soit donc $\varphi : t \rightarrow s$ un morphisme de C_S alors d'après l'axiome 2, il existe γ tel que :

$$\begin{array}{ccc} s & & \\ \text{---} id_s & \searrow & \\ \exists! \gamma & & s \\ \text{---} \varphi & \nearrow & \\ t & & \end{array}$$

donc $\gamma = \varphi$ par unicité et le calcul précédent montre que c'est un isomorphisme. Ainsi, la catégorie C_S est un groupoïde, ce qui justifie la terminologie 'fibrées en groupoïdes'. On va montrer dans la sous-section II.1.2 que si $T \rightarrow S$ est un morphisme de \mathcal{S} , alors on a un foncteur contravariant $C_S \rightarrow C_T$.

Si X est un objet de la catégorie \mathcal{S} , on note \underline{X} la catégorie dont les objets sont les morphismes $Y \rightarrow X$ (dans \mathcal{S}) et les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow & \searrow & \\ Y' & \longrightarrow & X \end{array}$$

où toutes les applications qui apparaissent dans le diagramme sont des morphismes dans \mathcal{S} . Il est facile de montrer que la catégorie \underline{X} est fibrée en groupoïdes au-dessus du site \mathcal{S} .

On va traiter l'exemple de la catégorie $[G \backslash X]$ au-dessus de $\mathcal{S} = Top, Var_{\mathbb{C}}$ ou $Sch_{\mathbb{C}}$ et G est un groupe agissant sur l'objet X .

Définition II.1.5. *Soit G un groupe. Un G -torseur est une fibration localement triviale de fibre G et sur laquelle G agit globalement. En d'autres termes, c'est une application continue $f : E \rightarrow M$ entre deux objets de \mathcal{S} telle qu'il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de M et des isomorphismes ψ_i vérifiant*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & U_i \times G \\ f \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U_i & & \end{array}$$

De plus, pour tout i, j , on veut

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (u, \sigma) \mapsto (u, g_{ij}\sigma)$$

pour tout $(u, \sigma) \in U_i \cap U_j \times G$ et un certain élément $g_{ij} \in G$. Le groupe G agit globalement sur E autrement dit les actions locales se recollent en une action globale.

Remarque II.1.6. Soit $E \xrightarrow{f} M$ un G -torseur, alors pour $\sigma \in G$ et $x \in E$, on a $f(\sigma * x) = f(x) \in M$ et on peut voir M comme le quotient de E par l'action de G .

Il existe diverses définitions de G -torseur. On peut considérer qu'un G -torseur est un revêtement $E \xrightarrow{f} M$ sur lequel G agit et qui est localement isomorphe à $U \times A$, où G agit transitivement et fidèlement sur A . On parle aussi dans ce cas d'espace homogène G -principal. La différence par rapport à la définition précédente est que l'on ne choisit qui joue le rôle de l'élément neutre dans A .

Une dernière définition qui apparaît dans la littérature est la suivante : Etant donné un groupe discret G et une action $G \times E \xrightarrow{*} E$ sur un espace topologique E , ce dernier est appelé G -torseur lorsque l'application $G \times E \rightarrow E \times E, (g, e) \mapsto (e, g * e)$ est un isomorphisme. Cette définition n'est pas équivalente aux deux précédentes.

Dans toute la suite du texte, on utilise la définition II.1.5 de G -torseur. De plus, lorsque l'on travaille au-dessus de Top , on préfère considérer des groupes discrets avec une action discontinue. On rappelle qu'un groupe G qui agit sur un espace topologique est dit avoir un **action discontinue** si

$$\forall x \in X, \exists U \ni x \text{ tel que } \#\{g \in G, U \cap gU \neq \emptyset\} < \infty$$

Quand le site \mathcal{S} est la catégorie $Sch_{\mathbb{C}}$ des schémas, on suppose que G est un groupe (linéaire) algébrique (ce qui inclut les groupes finis) et pour la catégorie $Var_{\mathbb{C}}$ des variétés analytiques, on autorise les groupes analytiques.

On revient à l'étude de la catégorie $[G \backslash X]$. On rappelle que les objets de $[G \backslash X]$ sont les couples $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$, où $E \rightarrow M$ est un G -torseur et l'application $E \rightarrow X$ est G -équivariante. Un morphisme entre $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ et $(E' \rightarrow M', E' \rightarrow X)$ est la donnée d'une application G -équivariante $\Phi : E \rightarrow E'$ et d'une application $\psi : M \rightarrow M'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M' \end{array}$$

est cartésien et telles que l'on a $(E \rightarrow E' \rightarrow X) = (E \rightarrow X)$.

Lorsque l'on considère une action discontinue et sans point fixe, la catégorie $[G \backslash X]$ est équivalente à une catégorie plus 'simple' :

Lemme II.1.7. *Soit X un espace topologique localement compact et G un groupe agissant sur X sans point fixe et de manière discontinue. Alors les catégories $\underline{G \backslash X}$ et $[G \backslash X]$ sont équivalentes.*

On rappelle qu'un espace topologique est dit **localement compact** s'il est séparé et si chacun de ses points admet un voisinage compact.

Démonstration. On note $\underline{G \backslash X}$ la catégorie dont les objets sont les applications continues $M \rightarrow G \backslash X$ et un morphisme entre $M \rightarrow G \backslash X$ et $M' \rightarrow G \backslash X$ est la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & \searrow & \\ G \backslash X & & \end{array}$$

On se donne maintenant un objet $(E \xrightarrow{f} M, E \xrightarrow{h} X)$ de $[G \backslash X]$. On note $\{U_i\}$ une trivialisations de f , ϕ_i les isomorphismes et $\alpha_{i,j}$ les fonctions de transition. On a donc

$$\begin{array}{ccccc} U_i \times G & \xleftarrow{\phi_i} & f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{h} & X \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow & & \\ & & U_i & & \end{array}$$

ce qui permet de construire un unique morphisme $U_i \rightarrow G \backslash X$ donné par

$$m \mapsto \pi \circ h \circ \phi_i^{-1}(m, 1)$$

où π désigne la projection $X \rightarrow G \backslash X$. Le morphisme est bien unique puisque

$$\pi \circ h \circ \phi_i^{-1}(m, g) = \pi \circ h \circ \phi_i^{-1}(m, 1), \quad \forall g \in G$$

par équivariance de h . On peut ensuite recoller ces morphismes en un unique morphisme $M \rightarrow G \backslash X$. On a $\alpha_{i,j} \circ \phi_j = \phi_i$ donc si $m \in U_i \cap U_j$, on a

$$\phi_i^{-1}(m, 1) = \phi_j^{-1} \circ \alpha_{i,j}^{-1}(m, 1) = \phi_j^{-1}(m, \sigma_{i,j}(m) * 1)$$

où $\sigma_{i,j}(m) \in G$ et par équivariance de h on a bien

$$\pi \circ h \circ \phi_i^{-1}(m, 1) = \pi \circ h \circ \phi_j^{-1}(m, 1).$$

On vérifie facilement que l'on définit ainsi un foncteur.

Construisons maintenant le foncteur inverse. Soit $(M \rightarrow G \backslash X)$ un objet de $\underline{G \backslash X}$. On a alors le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} M \times_{G \backslash X} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & G \backslash X \end{array}$$

et nous allons montrer que $(M \times_{G \backslash X} X \rightarrow M, M \times_{G \backslash X} X \rightarrow X)$ est un objet de $[G \backslash X]$. Montrons tout d'abord que l'application $X \rightarrow G \backslash X$ est un G -torseur. On sait que toutes ses fibres sont isomorphes à G puisque G agit sans point fixe. De plus, le fait que G agisse discontinûment et sans point fixe, implique que nous avons

$$\forall x \in X, \exists U \ni x \text{ tel que } gU \cap U = \emptyset \text{ pour tout } g \in G \setminus \{1\}$$

où 1 désigne l'élément neutre de G . En effet, étant donné un élément $x \in X$, la discontinuité de l'action nous donne l'existence d'un ouvert U tel que

$$\{g \in G, gU \cap U \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_r\}$$

De plus, vu que X est localement compact, on peut raffiner U en un ouvert de X , contenant x et inclus dans un compact K . Puisque G agit sans point fixe, $x \notin \cup_{i=1}^r g_i K$. On pose $V := U \setminus (U \cap \cup_i g_i K)$. C'est un ouvert contenant x et il satisfait $gV \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \{1\}$. En d'autres termes, il existe un recouvrement de X tel que pour tout ouvert V de ce recouvrement, on a $gV \cap V = \emptyset$, pour tout $g \in G \setminus \{1\}$.

Montrons maintenant pourquoi cela implique que $X \xrightarrow{\pi} G \backslash X$ est un G -torseur. Soient $y \in G \backslash X$ et $x \in X$ un représentant de cette classe d'équivalence. Soit V un voisinage ouvert de x tel que $gV \cap V = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{1\}$ et posons $W := \pi(V)$. C'est un ouvert de $G \backslash X$ puisque $\pi^{-1}(W) = \cup_{g \in G} gV$ est un ouvert de X . De plus, pour tout $a \in \pi^{-1}(W)$, il existe un unique couple $(g, b) \in G \times V$ tel que $a = g.b$. Ceci montre que l'on a $\pi^{-1}(V) \simeq G \times V$. Nous devons maintenant montrer que $M \times_{G \backslash X} X \rightarrow M$ est G -torseur mais ceci est clair en prenant les ouverts de la forme $h^{-1}(V)$, où V est un ouvert de $G \backslash X$ trivialisant le toseur $X \rightarrow G \backslash X$. L'application envoyant $(M \xrightarrow{h} G \backslash X)$ sur $(M \times_{G \backslash X} X \rightarrow M, M \times_{G \backslash X} X \rightarrow X)$ est fonctorielle et on montre que ce dernier est 'inverse' du foncteur précédent au sens où ils donnent un équivalence de catégorie entre les catégories $\underline{G \backslash X}$ et $[G \backslash X]$. \square

Remarque II.1.8. *Ce lemme est également satisfait dans d'autres cas :*

- *Si X est un schéma affine au dessus d'un corps k et G est un groupe fini d'automorphismes de X sans points (fermés) fixes.*

- Le résultat est aussi valable lorsque X est une réunion d'ouverts affines, invariant sous l'action de G .
- Si $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $G = \mathbb{G}_m$, le résultat est encore valide puisque l'on obtient l'espace projectif \mathbb{P}^{n-1} .
- Si on considère les variétés grassmanniennes, on obtient un exemple où on divise par des groupes linéaires GL_n .

Avant de considérer le cas général, on étudie un autre cas particulier, celui où G agit trivialement sur un objet X du site \mathcal{S} . Un objet de la catégorie $[G \backslash X]$ est un couple $(E \xrightarrow{f} M, E \xrightarrow{h} X)$. On sait que M est le quotient de E par l'action de G et que h est G -équivariante. Puisque G agit trivialement sur X , on en déduit qu'il existe une application g telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & X \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ M & & \end{array}$$

On peut donc considérer un objet comme la donnée d'un couple $(E \xrightarrow{f} M, M \xrightarrow{g} X)$, où f est un G -torseur et g une application continue ce qui est exactement l'ensemble des G -torseurs au-dessus d'un objet de \underline{X} . On montre facilement qu'il n'existe pas d'objet universel Y dans cette catégorie pour lequel on aurait $[G \backslash X] \simeq \underline{Y}$. La preuve est similaire à celle des triangles (Cf sous-section II.2.1). On peut aussi montrer qu'il est isomorphe au champ produit $[G \backslash \{*\}] \times \underline{X}$, où chaque terme est considéré comme un champ au-dessus de \mathcal{S} (défini plus tard dans la sous-section II.1.3). L'isomorphisme de champs est donné en envoyant un objet $(E \rightarrow M, M \rightarrow X)$ sur le couple $((E \rightarrow M), (M \rightarrow X))$. On a

Proposition II.1.9. *Soit X un objet de \mathcal{S} et G un groupe d'automorphismes de X . Alors la catégorie $[G \backslash X]$ est fibrée en groupoïdes au-dessus de \mathcal{S} .*

Démonstration. Intuitivement, c'est le cas car ses fibres sont des groupoïdes. En effet, soit M un objet de \mathcal{S} , alors la catégorie $[G \backslash X]_M$ a pour objets les $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ et les morphismes sont les (φ, id_M) . Montrons que ce sont des isomorphismes. Soit (φ, id_M) un morphisme dans $[G \backslash X]_M$ entre $(E \xrightarrow{f} M, E \rightarrow X)$ et $(E' \xrightarrow{f'} M, E' \rightarrow X)$. Du fait que le diagramme est cartésien, E est isomorphe à $E' \times_M M$ par $x \mapsto (\varphi(x), f(x))$ et $E' \times_M M$ est isomorphe à E' par la première projection (dont l'inverse est (Id, f')). Le morphisme φ est donc un isomorphisme et la catégorie $[G \backslash X]_M$ est bien un groupoïde pour tout M .

Montrons maintenant de manière plus rigoureuse que la catégorie est bien fibrée en groupoïdes. Soient $f : N \rightarrow M$ un morphisme de \mathcal{S} et $(E \rightarrow N, E \rightarrow X)$ un objet de

$[G \backslash X]$ au-dessus de N . On définit l'application équivariante $(E \times_N M \rightarrow X)$ comme la composée $(E \times_N M \rightarrow E \rightarrow X)$. Alors

$$(E \times_N M \rightarrow M, E \times_N M \rightarrow X)$$

est un objet de $[G \backslash X]$ au-dessus de M et le couple $(p_1, f \circ p_1)$, où $p_1 : E \times_N M \rightarrow E$, est un morphisme de $[G \backslash X]$ au-dessus de f . Le premier axiome est donc satisfait.

On se donne maintenant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & \\ \downarrow g & \searrow h & \\ & & M \\ & \nearrow f & \\ M_2 & & \end{array}$$

et deux morphismes $\varphi : E_2 \rightarrow E$ et $\eta : E_1 \rightarrow E$ tels que (φ, f) (respectivement (η, h)) est un morphisme entre $(E_1 \rightarrow M_1, E_1 \rightarrow X)$ et $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ (respectivement entre $(E_2 \rightarrow M_2, E_2 \rightarrow X)$ et $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$). On veut montrer qu'il existe un unique morphisme $\gamma : E_1 \rightarrow E_2$ tel que (γ, g) soit un morphisme dans $[G \backslash X]$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & \\ \vdots \downarrow \gamma & \searrow \eta & \\ & & E \\ & \nearrow \varphi & \\ E_2 & & \end{array}$$

On note λ (resp. λ_1, λ_2) les G -torseurs $E \rightarrow M$ (resp. $E_i \rightarrow M_i, i = 1, 2$) des objets $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ (resp. $(E_i \rightarrow M_i, E_i \rightarrow X), i = 1, 2$). On commence par traduire la donnée des deux morphismes (φ, f) et (η, h) dans $[G \backslash X]$ en termes de diagrammes. On sait que

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\eta} & E \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda \\ M_1 & \xrightarrow{h} & M \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \lambda_2 \downarrow & & \downarrow \lambda \\ M_2 & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

sont cartésiens. On a donc des isomorphismes (λ_1, η) et (λ_2, φ) respectivement entre E_1 et $M_1 \times_M E$, et entre E_2 et $M_2 \times_M E$. On pose

$$\gamma = (\lambda_2, \varphi)^{-1} \circ (g \times id) \circ (\lambda_1, \eta)$$

c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{(\lambda_1, \eta)} & M_1 \times_M E \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow (g \times id) \\
 E_2 & \xrightarrow{(\lambda_2, \varphi)} & M_2 \times_M E
 \end{array}$$

L'application γ est bien définie, montrons qu'elle satisfait $\varphi \circ \gamma = \eta$. On remarque que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{(\lambda_1, \eta)} & M_1 \times_M E \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow (g \times id) \\
 E_2 & \xrightarrow{(\lambda_2, \varphi)} & M_2 \times_M E \\
 & \searrow \varphi & \downarrow p_2 \\
 & & E
 \end{array}$$

On a donc $\varphi \circ \gamma = p_2 \circ (g \times id) \circ (\lambda_1, \eta)$. Soit $y \in E_1$, on a

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \gamma(y) &= p_2 \circ (id \times g) \circ (\lambda_1, \eta)(y) \\
 &= p_2 \circ (g \times id)(\lambda_1(y), \eta(y)) \\
 &= p_2(g \circ \lambda_1(y), \eta(y)) \\
 &= \eta(y)
 \end{aligned}$$

ce qui achève de montrer l'existence d'un tel morphisme. Reste à montrer qu'il est unique. On suppose par l'absurde qu'il existe un autre morphisme γ' satisfaisant les mêmes propriétés. On a donc le double diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 E_2 \times_{M_2} M_1 & \xleftarrow{(\gamma', \lambda_1)} & E_1 & \xrightarrow{(\gamma, \lambda_1)} & E_2 \times_{M_2} M_1 \\
 \downarrow (\varphi, \lambda_2) \times id & & \downarrow (\eta, \lambda_1) & & \downarrow (\varphi, \lambda_2) \times id \\
 E \times_M M_2 \times_{M_2} M_1 & \equiv & E \times_M M_1 & \equiv & E \times_M M_2 \times_{M_2} M_1
 \end{array}$$

où les signes égaux désignent les isomorphismes canoniques. Chaque flèche étant un isomorphisme, on a $\gamma = \gamma'$ ce qui achève de montrer que la catégorie $[G \setminus X]$ est fibrée en groupoïdes. \square

II.1.2 Définition d'un champ

On se donne C une catégorie fibrée en groupoïde au dessus d'un site \mathcal{S} . Soit x un objet de C au dessus d'un objet S de \mathcal{S} . Si $f : T \rightarrow S$ est un morphisme dans \mathcal{S} , on peut choisir un pullback $f^*(x)$ défini à isomorphisme canonique près.

Proposition II.1.10. $f^* : \begin{cases} C_S & \rightarrow & C_T \\ s & \mapsto & f^*(s) \end{cases}$ est un foncteur covariant.

Démonstration. Soit $\varphi : t_1 \rightarrow t_2$ un morphisme de C_T . Alors par le premier axiome d'une catégorie fibrée en groupoïdes, on sait qu'il existe des objets f^*t_1 et f^*t_2 au-dessus de S et des morphismes $\theta_i : f^*t_i \rightarrow t_i$ pour $i = 1, 2$, chacune au-dessus de f . On applique maintenant le second axiome au diagramme suivant dans \mathcal{S}

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ \text{id}_S \downarrow & \searrow f & \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

et aux morphismes $f^*t_1 \xrightarrow{\varphi \circ \theta_1} t_2$ et $f^*t_2 \xrightarrow{\theta_2} t_2$. Ces deux morphismes s'envoient sur f donc, puisque C est fibrée en groupoïdes, on sait qu'il existe un unique morphisme $f^*t_1 \rightarrow f^*t_2$ au-dessus de id_S tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} f^*t_1 & & \\ \text{---} \downarrow & \searrow \varphi \circ \theta_1 & \\ f^*t_2 & \xrightarrow{\theta_2} & t_2 \end{array}$$

et on note $f^*(\varphi)$ ce morphisme. Ceci montre que f^* est un foncteur contravariant. \square

On rappelle que l'on note \underline{S} la catégorie dont les objets sont les $(X \rightarrow S)$ de \mathcal{S} et les morphismes sont tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

Lemme II.1.11. Soient $S \rightarrow T$ un objet de \underline{T} et $x, y \in \text{Obj}(C_T)$. On note $\text{Isom}_C(x, y)(S)$ l'ensemble $\text{Mor}_{C_S}(f^*(x), f^*(y))$ des morphismes dans C_S de $f^*(x)$ vers $f^*(y)$. Alors $\text{Isom}_C(x, y)(-)$ est un foncteur contravariant de \underline{T} vers la catégorie Ens des ensembles. C'est donc un préfaisceau.

Démonstration. Soit h un morphisme entre deux objets $S_1 \xrightarrow{f_1} T$ et $S_2 \xrightarrow{f_2} T$ de \underline{T} . D'après la proposition précédente, on sait que h^* est un foncteur. Soit $\alpha \in \text{Isom}_C(x, y)(S_2)$, on a un morphisme

$$h^*(\alpha) : h^* f_2^*(x) \rightarrow h^* f_2^*(y).$$

De plus, on a des isomorphismes canoniques de $h^* f_2^*(x)$ vers $f_1^*(x)$ et de $h^* f_2^*(y)$ vers $f_1^*(y)$. Par composition, on obtient un isomorphisme de $f_1^*(x)$ vers $f_1^*(y)$ ce qui montre que l'on a un foncteur contravariant. \square

Définition II.1.12. *On rappelle qu'une suite d'ensemble $A \rightarrow B \rightrightarrows C$ est dite **exacte** si A est en bijection avec l'ensemble des éléments de B ayant la même image dans C par les deux applications de B dans C .*

Avant de donner la définition formelle de champ, on va donner une définition plus intuitive. On se donne une catégorie fibrée en groupoïdes $C \rightarrow \mathcal{S}$ sur un site \mathcal{S} . On a alors un foncteur de la catégorie \mathcal{S} vers la catégorie Gpd qui à un objet S associe C_S . Étant donné un morphisme $f : T \rightarrow S$, on a vu qu'on peut définir un foncteur $f^* : C_S \rightarrow C_T$ contravariant. On voudrait avoir des propriétés de recollement. Plus précisément, on voudrait pouvoir dire qu'étant donné un recouvrement $\{T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T\}$, $\{C_T \xrightarrow{f_\alpha^*} C_{T_\alpha}\}$ est aussi un 'recouvrement' dans la catégorie des groupoïdes, même si cette notion n'a pas encore été définie. Pour recoller, on veut un recollement

- des morphismes et
- des objets

Le recollement des morphismes s'énonce de manière rigoureuse par l'axiome suivant :

Axiome 1. *Si $\{T_\alpha \rightarrow T\}$ est une famille couvrante dans la catégorie \mathcal{S} , alors on a la suite exacte d'ensemble suivante :*

$$\text{Isom}_C(x, y)(T) \rightarrow \prod_{\alpha} \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha \times_T T_\beta)$$

Définition II.1.13. *Une catégorie C fibrée en groupoïdes sur \mathcal{S} qui satisfait l'axiome 1 pour tout objet $T \in \mathcal{S}$ et tous objets x, y de C au dessus de T est appelé un **préchamp**. De manière équivalente, une catégorie fibrée en groupoïdes est un préchamp si le préfaisceau $\text{Isom}_C(x, y)$ est un faisceau.*

Pour le recollement des objets, nous avons besoin d'introduire des notations.

Notations :

On notera $p_1 : T_\alpha \times_T T_\beta \rightarrow T_\alpha$ et $p_2 : T_\alpha \times_T T_\beta \rightarrow T_\beta$ et pour $T' \rightarrow T$, on pose $T'' = T' \times_T T'$ et p_1, p_2 désignent les deux projections $T'' \rightarrow T'$.

On peut maintenant énoncer l'axiome correspondant au recollement des objets :

Axiome 2. Soit $\{T_\alpha \rightarrow T\}$ une famille couvrante et $x, y \in \text{Obj}(C_T)$. Étant donné une collection $\{t_\alpha\}$ d'objets au-dessus de T_α et des isomorphismes $\varphi_{\alpha,\beta} : p_1^*t_\alpha \rightarrow p_2^*t_\beta$ au-dessus de $T_\alpha \times_T T_\beta$ satisfaisant la condition de cocycle, il existe un objet x au-dessus de T et des isomorphismes de C_{T_α} $\lambda_\alpha : x_\alpha \rightarrow t_\alpha, \forall \alpha$ où x_α est le pullback de x sur T_α . On demande que ces isomorphismes soient compatibles sur $T_\alpha \times_T T_\beta$.

Dans cet axiome, on utilise les notations introduites dans le lemme II.1.11 avec $S = T$ et $f = id_T$.

Détaillons les conditions de cocycle et de compatibilité qui apparaissent dans cet axiome. On note les différentes projections $p_{12} : T_\alpha \times_T T_\beta \times_T T_\gamma \rightarrow T_\alpha \times_T T_\beta$ etc...

la condition de cocycle : elle demande que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} p_{12}^*p_1^*t_\alpha & \xrightarrow{p_{12}^*\varphi_{\alpha,\beta}} & p_{12}^*p_2^*t_\beta & \equiv & p_{23}^*p_1^*t_\beta \\ \parallel & & & & \downarrow p_{23}^*\varphi_{\beta,\gamma} \\ p_{13}^*p_1^*t_\alpha & \xrightarrow{p_{13}^*\varphi_{\alpha,\gamma}} & p_{13}^*p_2^*t_\gamma & \equiv & p_{23}^*p_2^*t_\gamma \end{array}$$

où les signes égaux désignent les isomorphismes canoniques.

la condition de compatibilité sur $T_\alpha \times_T T_\beta$: elle impose la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} p_1^*x_\alpha & \xrightarrow{p_1^*\lambda_\alpha} & p_1^*t_\alpha \\ \parallel & & \downarrow \varphi_{\alpha,\beta} \\ p_2^*x_\beta & \xrightarrow{p_2^*\lambda_\beta} & p_2^*t_\beta \end{array}$$

Définition II.1.14. Une catégorie C fibrée en groupoïde sur un site \mathcal{S} qui satisfait les axiomes 1 et 2 est appelée un **champ**.

Définition II.1.15. On appelle **donnée de descente** la donnée d'objets $\{x_\alpha\}$ et d'isomorphismes $\varphi_{\alpha,\beta}$ comme dans l'axiome 2 satisfaisant la condition de cocycle. Lorsque les conditions de l'axiome 2 sont vérifiées, on dit que la donnée de descente est **effective**.

Proposition II.1.16. Comme précédemment, X est un objet de $\mathcal{S} = \text{Top}, \text{Var}_{\mathbb{C}}$ ou $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$ et G est un groupe de ses automorphismes. Alors $[G \backslash X]$ est un préchamp.

Démonstration. Pour simplifier les notations, C désignera cette catégorie dans cette démonstration et la suivante.

On doit d'abord définir les pullbacks des objets. Soit donc $(E \xrightarrow{g} S, E \rightarrow X)$ un objet au-dessus de S et $f : T \rightarrow S$ un morphisme de \mathcal{S} . On définit

$$f^*((E \xrightarrow{g} S, E \rightarrow X)) = (E \times_S T \rightarrow T, E \times_S T \rightarrow X).$$

Montrons que cela définit bien un objet de C . Montrons que la deuxième projection $E \times_S T \rightarrow T$ est un G -torseur. Soit U un ouvert de S tel que $g^{-1}(U) \simeq U \times G$. Alors $V := f^{-1}(U)$ est un ouvert de T pour lequel on a

$$p_2^{-1}(V) = p_2^{-1}(f^{-1}(U)) = \{(x, y) \in g^{-1}(U) \times_S f^{-1}(U)\}$$

ce qui est en bijection avec $f^{-1}(U) \times G$. De plus, ces isomorphismes satisfont

$$\begin{array}{ccc} p_2^{-1}(V) & \longrightarrow & V \times G \\ \downarrow & \swarrow & \\ V & & \end{array}$$

par construction. L'action de G sur $E \times_T V$ est donnée par

$$\forall \sigma \in G, (x, y) \in E \times_T V, \sigma.(x, y) = (\sigma.x, y).$$

L'élément $(\sigma.x, y)$ appartient bien à $E \times_T V$ puisque $g(\sigma.x) = g(x)$ et on vérifie que les axiomes d'une action sont satisfaits. On voit que l'action est globale et donc que la deuxième projection est un G -torseur. L'application $E \times_S T \rightarrow X$ est clairement équivariante.

Le pullback d'un morphisme est également bien défini. En effet, soit φ un morphisme entre deux objets x, y de C avec $x = (E \xrightarrow{g} T, E \rightarrow X)$ et $y = (F \xrightarrow{g} T, F \rightarrow X)$. Soit $h_1 : T_1 \rightarrow T$ un morphisme dans \mathcal{S} . On définit un morphisme $h_1^*(\varphi)$ entre $h_1^*(x)$ et $h_1^*(y)$ en posant $h_1^*(\varphi)(a, b) = (\varphi(a), b)$. On vérifie aisément que c'est un morphisme dans C_{T_1} .

Maintenant que l'on a bien défini la notion de pullback on va montrer que l'axiome de préchamp est satisfait. On commence par expliciter les applications qui apparaissent dans l'axiome. Soit $h_\alpha : T_\alpha \rightarrow T$ une famille couvrante de T . Soit $\varphi \in \text{Isom}_C(x, y)(T)$, on note $\eta(\varphi)$ la collection $(h_\alpha^*(\varphi))_\alpha$ ce qui définit une flèche de $\text{Isom}_C(x, y)(T)$ vers $\prod_\alpha \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha)$. On définit les deux applications vers $\prod_{\alpha, \beta} \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha \times_T T_\beta)$ en donnant leurs images coordonnées par coordonnées. Soit $(\varphi_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha)$, alors la coordonnée dans $\text{Isom}_C(x, y)(T_\beta \times_T T_\gamma)$ de son image par θ_1 est $p_1^*(\varphi_\beta)$ tandis que celle par θ_2 est $p_2^*(\varphi_\gamma)$ où p_1 et p_2 désignent respectivement la première et la deuxième projection de $T_\beta \times_T T_\gamma$. Par définition du produit fibré, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_\beta \times_T T_\gamma & \xrightarrow{p_1} & T_\beta \\ p_2 \downarrow & & \downarrow h_\beta \\ T_\gamma & \xrightarrow{h_\gamma} & T \end{array}$$

ce qui montre que l'image de η est incluse dans l'ensemble des éléments ayant même image par θ_1 et θ_2 . En effet, soit $\varphi \in \text{Isom}_C(x, y)(T)$, alors son image par $\theta_1 \circ \eta$ a pour coordonnée $p_1^*h_\beta^*(\varphi)$ dans $\text{Isom}_C(x, y)(T_\beta \times_T T_\gamma)$. Son image par $\theta_2 \circ \eta$ est $p_2^*h_\gamma^*(\varphi)$ ce qui

égal à $p_1^*h_\beta^*(\varphi)$ par commutativité du diagramme précédent. Montrons maintenant que l'image de η est exactement l'ensemble des éléments vérifiant cette propriété. Soit donc $(\varphi_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha \text{Isom}_C(x, y)(T_\alpha)$ tel que

$$\forall \beta, \gamma, p_1^*(\varphi_\beta) = p_2^*(\varphi_\gamma) \in \text{Isom}_C(x, y)(T_\beta \times_T T_\gamma)$$

et montrons qu'il existe $\varphi \in \text{Isom}(T)$ tel que $h_\alpha^*(\varphi) = \varphi_\alpha, \forall \alpha$. Si $\mathcal{S} = \text{Top}$ ou $\text{Var}_\mathbb{C}$, on prend pour famille couvrante les immersions ouvertes. Si $\mathcal{S} = \text{Sch}_\mathbb{C}$, une famille couvrante est une famille d'inclusions d'ouverts de Zariski (resp. étale) si $\text{Sch}_\mathbb{C}$ est muni de la topologie de Zariski (resp. étale). On a donc des isomorphismes φ_α dans C_{T_α} qui font commuter tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} E \times_T T_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & F \times_T T_\alpha \\ \downarrow & \swarrow & \\ T_\alpha & & \end{array}$$

Soit $a \in g^{-1}(h_\alpha(T_\alpha))$, alors il existe un unique $t_\alpha \in T_\alpha$ tel que $h_\alpha(t_\alpha) = g(a)$ puisque h_α est une immersion ouverte et on pose $\varphi(a) = q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha)$ où $q_1 : F \times_T T_\alpha$ désigne la première projection. On définit une application de E dans F puisque $\text{II}T_\alpha \rightarrow T$ est surjective. De plus, la commutativité du diagramme précédent donne l'égalité suivante :

$$\varphi_\alpha(a, t_\alpha) = (q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha), t_\alpha) \quad \forall a \in E, t_\alpha \in T_\alpha \text{ tel que } g(a) = h_\alpha(t_\alpha).$$

Ceci va nous permettre de montrer que c'est bien défini sur les intersections. En effet, si $a \in g^{-1}(h_\alpha(T_\alpha)) \cap g^{-1}(h_\beta(T_\beta))$, on veut montrer que $q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha) = q_1 \circ \varphi_\beta(a, t_\beta)$. Pour cela, on utilise l'hypothèse $p_1^*\varphi_\alpha = p_2^*\varphi_\beta$ et on explicite ces deux applications :

$$\begin{aligned} p_1^*\varphi_\alpha : E \times_T T_\alpha \times_T T_\beta &\rightarrow F \times_T T_\alpha \times_T T_\beta \\ (a, t_\alpha, t_\beta) &\mapsto (q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha), t_\alpha, t_\beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2^*\varphi_\beta : E \times_T T_\alpha \times_T T_\beta &\rightarrow F \times_T T_\alpha \times_T T_\beta \\ (a, t_\alpha, t_\beta) &\mapsto (q_1 \circ \varphi_\beta(a, t_\beta), t_\alpha, t_\beta) \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'égalité souhaitée. On a donc construit $\varphi : E \rightarrow F$ dans C_T et par construction $h_\alpha^*(\varphi) = \varphi_\alpha, \forall \alpha$. Il reste à montrer que cette application est équivariante. Soit donc $\sigma \in G$ et $a \in E$. On note comme ci-dessus $t_\alpha \in T_\alpha$ tel que $h_\alpha(t_\alpha) = g(a)$. Par définition on a $\varphi(a) = q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha)$ et φ_α est équivariante. On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma * a) &= q_1 \circ \varphi_\alpha(\sigma * a, t_\alpha) \\ &= q_1(\sigma * \varphi_\alpha(a, t_\alpha)) \\ &= \sigma * q_1 \circ \varphi_\alpha(a, t_\alpha) \\ &= \sigma * \varphi(a) \end{aligned}$$

L'application φ est donc équivariante, ce qui achève de montrer le premier axiome et ainsi montre que la catégorie $C = [G \setminus X]$ est un préchamp sur \mathcal{S} . □

Proposition II.1.17. Soient X et G comme avant, alors $[G \setminus X]$ est un champ au-dessus de \mathcal{S} où $\mathcal{S} = \text{Top}, \text{Var}_{\mathbb{C}}$ ou $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Il nous reste seulement à montrer que le préchamp $C = [G \setminus X]$ vérifie l'axiome 2. On se donne donc une famille couvrante $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ et une collection d'objets $(E_\alpha \rightarrow U_\alpha, E_\alpha \rightarrow X)$ de C , ainsi que des isomorphismes

$$(\varphi_{\alpha\beta} : E_\alpha \times_{U_\alpha} U_{\alpha\beta} \rightarrow E_\beta \times_{U_\beta} U_{\alpha\beta}) \text{ avec } U_{\alpha\beta} = U_\alpha \times_M U_\beta,$$

qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha \times_{U_\alpha} U_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\quad} & U_{\alpha\beta} \\ \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & \nearrow & \\ E_\beta \times_{U_\beta} U_{\alpha\beta} & & \end{array}$$

On note $h_\alpha : E_\alpha \rightarrow U_\alpha$. On considère l'union disjointe $\amalg E_\alpha$ et la relation d'équivalence suivante pour $x_\alpha \in h_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta})$ et $x_\beta \in h_\beta^{-1}(U_{\alpha\beta})$, $\alpha \neq \beta$

$$x_\alpha \sim x_\beta \Leftrightarrow i_\alpha \circ h_\alpha(x_\alpha) = i_\beta \circ h_\beta(x_\beta)$$

On note ensuite E le quotient de la réunion disjointe $\amalg E_\alpha$ par cette équivalence. On a une application $E \xrightarrow{h} M$ définie par $h(\overline{x_\alpha}) = i_\alpha \circ h_\alpha(x_\alpha)$ où $\overline{x_\alpha}$ désigne la classe d'équivalence dans E contenant $x_\alpha \in E_\alpha$. C'est bien définie par définition de l'équivalence. Il faut maintenant vérifier que $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ est bien un objet de C . On vérifie aisément que $E \rightarrow M$ est un G -torseur. En effet, on note $\{W_\beta^\alpha\}_\beta$ une trivialisations de $U_\alpha \rightarrow M$. Alors $\{i_\alpha(W_\beta^\alpha)\}_{\alpha,\beta}$ sont des ouverts de M puisque les i_α sont des immersions ouvertes et on vérifie que c'est une trivialisations de $E \rightarrow M$, qui est donc un G -torseur. De plus, si $g \in G$ et $x \in E$, on pose $g.x := \overline{g.x_\alpha}$, si $x_\alpha \in E_\alpha$ est tel que $\overline{x_\alpha} = x$. Ceci définit une action car si $x_\beta \in E_\beta$ est tel que $\overline{x_\beta} = x$, alors $i_\alpha \circ h_\alpha(x_\alpha) = i_\beta \circ h_\beta(x_\beta)$ mais vu que h_α et h_β sont des G -torseurs, on a

$$h_\alpha(g.x_\alpha) = h_\alpha(x_\alpha) \text{ and } h_\beta(g.x_\beta) = h_\beta(x_\beta)$$

ce qui montre que l'action sur E est bien définie et donc que h est un G -torseur. Par ailleurs, il est clair que l'application $E \rightarrow X$ est équivariante, on a donc bien un objet de C . Les isomorphismes $E \times_M U_\alpha \rightarrow E_\alpha$ sont donnés par les inclusions $E_\alpha \rightarrow E$ et les applications h_α . On vérifie facilement que ce sont des isomorphismes et on les note ν_α (avec les notations de l'axiome 2, on a $\nu_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}$). Il reste à montrer qu'ils vérifient la condition de compatibilité. Il faut pour cela vérifier que le diagramme suivant est

commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E_\alpha \times_{U_\alpha} U_{\alpha\beta} & \xrightarrow{p_1^* \nu_\alpha} & (E \times_M U_\alpha) \times_{U_\alpha} U_{\alpha\beta} \\
 \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & & \parallel \\
 E_\beta \times_{U_\beta} U_{\alpha\beta} & \xrightarrow{p_1^* \nu_\beta} & (E \times_M U_\beta) \times_{U_\beta} U_{\alpha\beta}
 \end{array}$$

On se donne donc $(x, y) \in E_\alpha \times_{U_\alpha} U_{\alpha\beta}$. Par définition, on a $h_\alpha(x) = p_1(y) \in U_\alpha$ et $i_\alpha \circ p_1(y) = i_\beta \circ p_2(y)$. Notons $(z, y) := \varphi_{\alpha\beta}(x, y)$. On a alors

$$p_1^* \nu_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta}(x, y) = (\bar{z}, h_\beta(z), y)$$

et

$$p_1^* \nu_\alpha(x, y) = (\bar{x}, h_\alpha(x), y)$$

où on note \bar{x} la classe d'équivalence de x dans E . On a de plus $\bar{x} = \bar{z}$ puisque $h_\alpha(x) = p_1(y)$ et $h_\beta(z) = p_2(y)$ ce qui implique

$$i_\alpha \circ h_\alpha(x) = i_\beta \circ h_\beta(z).$$

On a donc montré la commutativité du diagramme ce qui achève la preuve de la proposition. □

II.1.3 Premières propriétés des champs

Dans cette section, on utilise pour références [LMB], [Fan], [BCEFFGK], [Noo1] et [Noo2].

On commence par définir un morphisme de champs.

Définition II.1.18. *Un foncteur $C_1 \rightarrow C_2$ entre deux champs au-dessus d'un même site \mathcal{S} est un **morphisme de champs** s'il commute avec les deux foncteurs $C_i \rightarrow \mathcal{S}$.*

Définition II.1.19. *Deux champs sont **équivalents** s'il existe un morphisme de champs entre les deux champs qui donne une équivalence entre les deux catégories.*

On définit maintenant le produit fibré de deux champs.

Définition II.1.20. *Soient $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ et $\mathcal{G} : Z \rightarrow Y$ deux morphismes de champs au-dessus de \mathcal{S} . On définit le **produit fibré** comme la catégorie dont les objets sont les triplets (x, z, α_{xz}) où $x \in X_S, z \in Z_S$ pour un certain objet $S \in \mathcal{S}$ et $\alpha_{xz} : \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{G}(z)$ est un morphisme de Y_S , c'est-à-dire un morphisme de Y au-dessus de id_S . Un*

morphisme $(x, z, \alpha_{x,z}) \rightarrow (x', z', \alpha'_{x',z'})$ est la donnée d'un couple de morphismes $(\beta_1 : x \rightarrow x', \beta_2 : z \rightarrow z')$ de X_S et Z_S respectivement tels que

$$\mathcal{F}(\beta_1) \circ \alpha_{xy} = \alpha'_{x'y'} \circ \mathcal{G}(\beta_2) : \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(z').$$

Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\beta_1)} & \mathcal{F}(x') \\ \alpha_{xz} \downarrow & & \downarrow \alpha'_{x'z'} \\ \mathcal{G}(x) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\beta_2)} & \mathcal{G}(x') \end{array}$$

On peut montrer que la catégorie ainsi construite, notée $X \times_Y Z$, vérifie les propriétés d'un champ sur \mathcal{S} .

Remarque II.1.21. 1. Si X, Y et Z sont des schémas, on a l'équivalence de champs

$$\underline{X} \times_Y \underline{Z} \simeq \underline{X \times_Y Z}$$

2. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{p_2} & Z \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ X & \xrightarrow{\mathcal{F}} & Y \end{array}$$

n'est pas commutatif mais 2-commutatif, c'est-à-dire que les deux foncteurs composés de $X \times_Y Z$ vers Y ne sont pas égaux mais canoniquement 2-isomorphes. De plus, le 2-morphisme que l'on note η , est donné par α . Plus précisément, si $\zeta = (x, z, \alpha_{xz})$ est un objet de $X \times_Y Z$, on a $\mathcal{F} \circ p_1(\zeta) = \mathcal{F}(x)$, $\mathcal{G} \circ p_2(\zeta) = \mathcal{G}(z)$ et l'isomorphisme η_ζ entre $\mathcal{F} \circ p_1(\zeta)$ et $\mathcal{G} \circ p_2(\zeta)$ est égal à α_{xz} .

Le produit fibré de deux catégories satisfait la propriété universelle suivante :

Étant donnés deux foncteurs $q_1 : A \rightarrow X$ et $q_2 : A \rightarrow Z$ ainsi qu'une transformation naturelle β entre $\mathcal{F} \circ q_1$ et $\mathcal{F} \circ q_2$, il existe un unique foncteur $\mathcal{H} : A \rightarrow X \times_Y Z$ tel que $p_1 \circ \mathcal{H} = q_1$, $p_2 \circ \mathcal{H} = q_2$ et β est donné par η . Plus précisément, pour tout $\xi \in \text{Obj}(A)$, on a $\beta_\xi = \eta_{h(\xi)} : \mathcal{F} \circ q_1(\xi) \rightarrow \mathcal{G} \circ q_2(\xi)$.

Définition II.1.22. Un morphisme $C_1 \rightarrow C_2$ entre deux champs au dessus d'un site \mathcal{S} est dit **représentable** si pour tout $S \in \text{Obj}(\mathcal{S})$ et pour tout morphisme $\underline{S} \rightarrow C_2$ il existe $Y \in \text{Obj}(\mathcal{S})$ tel que $\underline{S} \times_{C_2} C_1 \simeq \underline{Y}$.

Cette notion de morphisme représentable va nous permettre de définir beaucoup de notions pour les champs.

Définition II.1.23. *Un morphisme de champs représentable $C_1 \rightarrow C_2$ est **lisse** si pour tout morphisme de champs $\underline{X} \rightarrow C_2$, avec $X \in \text{Obj}(X)$, tel que le morphisme sous-jacent $Z \rightarrow X$, où $\underline{Z} \simeq C_1 \times_{C_2} \underline{X}$ (un tel champ existe par représentabilité du morphisme), est un morphisme lisse dans \mathcal{S} .*

Définition II.1.24. *Un morphisme de champs représentable $C_1 \rightarrow C_2$ est une **immersion ouverte** (resp. **immersion fermée**) si pour tout morphisme de champs $\underline{X} \rightarrow C_2$ tel que le morphisme $Z \rightarrow X$, où $\underline{Z} \simeq C_1 \times_{C_2} \underline{X}$, est une immersion ouverte (resp. immersion fermée) dans \mathcal{S} .*

Ceci nous permet de définir la notion de sous champs ouverts et fermés d'un champ. On commence par rappeler la définition de sous-champ :

Définition II.1.25. *Soit C un champ au-dessus d'un site \mathcal{S} . Un **sous-champ de C** est une sous-catégorie pleine B de C telle que*

- Pour tout morphisme $\varphi : V \rightarrow U$ de \mathcal{S} , on a $\varphi^*(\text{Obj}(B_U)) \subset \text{Obj}(B_V)$.
- Pour toute famille couvrante $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow U$ et tout $x \in \text{Obj}(C_U)$, on a $x \in \text{Obj}(B_U)$ si et seulement si $i_\alpha^*x \in \text{Obj}(B_{U_\alpha}), \forall \alpha$.

Définition II.1.26. *Un sous-champ B de C est dit **ouvert** (resp. **fermé**) si le morphisme d'inclusion $B \rightarrow C$ est représentable et est une immersion ouverte (resp. fermée).*

Définition II.1.27. *Un morphisme représentable $C_1 \rightarrow C_2$ entre deux champs au dessus d'un site \mathcal{S} est un **revêtement de champs** si pour tout objet S de \mathcal{S} et tout morphisme $\underline{S} \rightarrow C_2$, l'application naturelle $Y \rightarrow S$, avec $\underline{Y} \simeq \underline{S} \times_{C_2} C_1$ comme ci-dessus, est un revêtement.*

On observe que si on a un revêtement de champ $C_1 \rightarrow \underline{Y}$ pour un certain espace topologique Y , alors $C_1 \simeq \underline{Z}$ et $Z \rightarrow Y$ est un revêtement au sens des espaces topologiques. En effet, on considère le morphisme identité $\underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$, alors par hypothèse il existe Z tel que $C_1 \times_{\underline{Y}} \underline{Y} \simeq \underline{Z}$ et tel que $Z \rightarrow Y$ soit un revêtement. Comme le champ $C_1 \times_{\underline{Y}} \underline{Y}$ est isomorphe à C_1 , on a bien le résultat souhaité.

Définition II.1.28. *Un morphisme $C_1 \rightarrow C_2$ entre deux champs au-dessus d'un site \mathcal{S} est un **revêtement trivial** si pour tout morphisme $\underline{S} \rightarrow C_2$, le morphisme $Z \rightarrow S$ dans \mathcal{S} induit par le morphisme naturel $C_1 \times_{C_2} \underline{S} \simeq \underline{Z} \rightarrow \underline{S}$ est un revêtement trivial (dans \mathcal{S}).*

Ceci nous permet de définir un champ simplement connexe :

Définition II.1.29. *Un champ C sur \mathcal{S} est **simplement connexe** s'il n'admet que des revêtements triviaux.*

On montre que cette notion étend celle existante pour les espaces topologiques :

Lemme II.1.30. *Soit Y un espace topologique vu comme un champ \underline{Y} au dessus de la catégorie Top des espaces topologiques. Alors \underline{Y} est simplement connexe si et seulement si Y l'est.*

Démonstration. La première implication est claire. En effet, on se donne un revêtement $Z \rightarrow Y$ de Y , alors le morphisme de champ $\underline{Z} \rightarrow \underline{Y}$ est un revêtement du champ \underline{Y} donc il est trivial. Donc si on considère le foncteur identité $\underline{Y} \rightarrow \underline{Y}$ alors l'application naturelle $Z \times_Y Y \rightarrow Y$ est un revêtement trivial ce qui donne le résultat souhaité.

Réciproquement, supposons que Y soit un espace topologique simplement connexe. Alors il n'admet que des revêtements triviaux. Soit $C \rightarrow \underline{Y}$ est un revêtement de champs et montrons qu'il est trivial. On peut supposer que C est isomorphe à un champ de la forme $\underline{Y} \times \underline{F}$ où F est un ensemble discret. En effet, par hypothèse, il existe $Z \in Obj(Top)$ tel que $\underline{Y} \times_{\underline{Y}} C \simeq \underline{Z}$ (en appliquant la définition de revêtement d'un champ au foncteur identité) et l'application $Z \rightarrow Y$ est un revêtement (de Y) donc un revêtement trivial. Ceci signifie $Z \simeq Y \times F$ où F est un ensemble discret donc

$$\underline{Z} \simeq \underline{Y} \times \underline{F} \simeq \underline{Y} \times_{\underline{Y}} C \simeq C$$

On peut donc supposer sans nuire à la généralité que $C = \underline{Y} \times \underline{F}$ avec F un ensemble discret. On se donne maintenant un morphisme $\underline{S} \rightarrow \underline{Y}$. Alors on a

$$\underline{Y} \times \underline{F} \times_{\underline{Y}} \underline{S} \sim (\underline{Y} \times \underline{F}) \times_{\underline{Y}} \underline{S} \sim \underline{S} \times \underline{F}$$

et l'application naturelle $S \times F \rightarrow S$ induite entre les espaces topologiques est un revêtement trivial donc on a bien un revêtement trivial de champs et ceci achève la preuve. \square

Définition II.1.31. *Un morphisme de champs $C_1 \rightarrow C_2$ est le **revêtement universel** de C_2 si c'est un revêtement et si C_1 est simplement connexe.*

Dans le cas des espaces topologiques, le revêtement universel $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de X , s'il existe, satisfait la propriété suivante :

Pour tout revêtement $Y \xrightarrow{p} X$ il existe une application $p' : \tilde{X} \rightarrow Y$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \pi \downarrow & \searrow p' & \\ X & \xleftarrow{p} & Y \end{array}$$

commute.

On peut montrer que le revêtement universel d'un champ satisfait une propriété universelle similaire.

Il existe diverses définitions du groupe fondamental d'un champ (Cf [Noo1], [Noo2]). Ici on considère une définition naïve :

Définition II.1.32. *Le groupe fondamental d'un champ est le group des automorphismes du revêtement universel du champ (s'il existe).*

Nous allons maintenant définir la dimension d'un champ. Rappelons tout d'abord la définition de dimension relative d'un morphisme de schémas. Si X est un schéma et x un point de X , on note $\dim_x X := \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

Définition II.1.33. *Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas localement de type fini et x un point de X d'image $y := f(x)$ alors la **dimension relative de f en x** est par définition l'entier*

$$\dim_x(f) := \dim_x(X_y)$$

(où $X_y = X \times_{\{y\}} Y$)

On rappelle la proposition suivante

Proposition II.1.34. [LMB, prop11.13]

Soient X et Y deux schémas localement noethériens et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse. Alors pour tout point x de X d'image $y \in Y$ on a l'égalité

$$\dim_x(X) = \dim_x(f) + \dim_y(Y)$$

On suppose maintenant que le site \mathcal{S} au-dessus duquel vivent les champs que nous considérons, a un objet final. On fixe un objet final $*$ dans cette catégorie \mathcal{S} . Un **point d'un champ** C au-dessus d'un site \mathcal{S} , est un morphisme de champs $x : \underline{\{*\}} \rightarrow C$.

Remarque II.1.35.

- Lorsque $\mathcal{S} = \text{Top}$ et que le champ est simplement \underline{X} où $X \in \text{Obj}(\mathcal{S})$, on obtient la définition usuelle de point de X .
- Lorsque \mathcal{S} est la catégorie Sch_k des schémas au-dessus d'un corps k , un point du champ C est un morphisme de champs $\text{Spec}(k) \rightarrow C$. On utilisera cette notion dans le cas de $C = \text{Bun}_{n,X}$ et $k = \mathbb{F}_q$ ou \mathbb{C} (Cf III.1).
- On peut aussi définir un point d'un champ comme une classe d'équivalence de morphismes $\underline{\{*\}} \rightarrow C$. Dans ce cas, les points du champ $\text{Bun}_{n,X}$ par exemple sont exactement les classes d'équivalence des fibrés vectoriels.

Définition II.1.36. *Une **présentation d'un champ** C au-dessus d'un \mathcal{S} est un morphisme de champs lisse, surjectif et représentable $\underline{Y} \rightarrow C$, où Y est un objet de \mathcal{S} .*

Nous pouvons maintenant définir la dimension d'un champ en un point.

Définition II.1.37. Si $P : \underline{X} \rightarrow C$ est une présentation et x un point de X , alors la dimension relative $\dim_x(P)$ est la dimension relative en (x, x) de la première projection $X \times_C X \rightarrow X$, où $X \times_C X$ désigne l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times X$ satisfaisant

$$P(\{x\} \rightarrow X) = P(\{y\} \rightarrow X).$$

Maintenant, si C est un champ localement noethérien et c est un point de C alors la **dimension de C en c** est

$$\dim_c(C) = \dim_x(X) - \dim_x(P)$$

où $P : \underline{X} \rightarrow C$ est une présentation arbitraire de C et x est un point de X au-dessus de c . On définit la **dimension de C** (aussi appelée **dimension pure**) par

$$\dim(C) = \sup_c(\dim_c(C))$$

Remarque II.1.38. La définition de dimension ne dépend pas du choix de la présentation.

On revient à l'étude du champ quotient. On suppose que le site de base \mathcal{S} est Top , $Var_{\mathbb{C}}$, ou $Sch_{\mathbb{C}}$, X est un objet de \mathcal{S} et G est un groupe qui agit sur X (cf ce qui suit la remarque II.1.6 pour les hypothèses supplémentaires que l'on fait). Alors il existe une présentation $\underline{X} \rightarrow [X \backslash G]$ de dimension relative $\dim G$ et donc

$$\dim([G \backslash X]) = \dim X - \dim G.$$

On remarque que lorsque X est réduit à un point on a alors $\dim[G \backslash \{*\}] = -\dim G$. Supposons maintenant que l'on a un produit de deux champs C_1 et C_2 et on se donne deux présentations $p_i : \underline{Y}_i \rightarrow C_i, i = 1, 2$, alors on a une présentation $\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2 \rightarrow C_1 \times C_2$ et il est clair que ce morphisme a une dimension relative $\dim p_1 + \dim p_2$, donc on a

$$\dim(C_1 \times C_2) = \dim(C_1) + \dim(C_2)$$

On considère un autre cas particulier. On se donne trois champs C_1, C_2 et C_3 et deux morphismes de champs $f_1 : C_1 \rightarrow C_2, f_3 : C_3 \rightarrow C_2$. On suppose de plus que chaque champ admet une présentation $p_i : \underline{Y}_i \rightarrow C_i, \forall i = 1 \dots 3$. On considère le produit fibré $\underline{C}_1 \times_{C_2} \underline{C}_3$ de ces trois champs et on voudrait montrer que sa dimension est $\dim(C_1) + \dim(C_3) - \dim(C_2)$. On observe que ce champ admet une présentation

$$p : \underline{Y}_1 \times_{\underline{Y}_2} \underline{Y}_3 \rightarrow \underline{C}_1 \times_{C_2} \underline{C}_3.$$

Dans le cas des variétés par exemple, la dimension du produit fibré n'est en général pas égale à la somme des deux variétés à laquelle on soustrait la dimension de la variété sur laquelle on fait le produit. Toutefois dans notre cas, il semble que ce résultat ne soit vrai que lorsque les morphismes de champs sont des morphismes transversaux. Lorsque tous les champs impliqués sont des champs quotients, le résultat est vrai (Cf [LMB, chp17]).

II.2 Le champ des triangles

II.2.1 Le champ des triangles rectangles

Familles de triangles rectangles

On commence par regarder le cas des triangles rectangles ordonnés. On considère les triangles à similarité près, un triangle est donc déterminé par la donnée de deux réels $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$ tels que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Une famille de triangles rectangles ordonnés paramétrée par un espace topologique M est la donnée de deux applications continues f_1, f_2 de M vers $]0, \frac{\pi}{2}[$ telles que pour tout $m \in M$, $f_1(m) + f_2(m) = \frac{\pi}{2}$. Pour considérer les triangles non ordonnés, on se donne un revêtement non ramifié à 2 feuillets.

Définition II.2.1. On appelle **famille de triangles rectangles paramétrée par M** la donnée d'un revêtement $f : \triangle \rightarrow M$ non ramifié à 2 feuillets et d'une application continue τ de \triangle vers $]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $\forall m \in M, f^{-1}(m) = \{a, b\}, a \neq b$ et $\tau(a) + \tau(b) = \frac{\pi}{2}$.

On considère la catégorie \mathcal{R} des familles de triangles rectangles paramétrées par un espace topologique. Les objets sont les familles $(\triangle \rightarrow M, \tau)$ de triangles rectangles non ordonnés, paramétrées par un espace topologique M . Un morphisme entre deux objets $(\triangle_1 \xrightarrow{f_1} M_1, \tau_1)$ et $(\triangle_2 \xrightarrow{f_2} M_2, \tau_2)$ est la donnée de deux applications continues :

$$- \varphi : \triangle_1 \rightarrow \triangle_2 \text{ telle que } \tau_2 \circ \varphi = \tau_1$$

$$- \text{ et } \psi : M_1 \rightarrow M_2 \text{ telle que le diagramme suivant est cartésien :}$$

$$\begin{array}{ccc} \triangle_1 & \xrightarrow{\varphi} & \triangle_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\psi} & M_2 \end{array}$$

Définition II.2.2. Soient deux telles familles $(\triangle_1 \xrightarrow{f_1} M_1, \tau_1)$ et $(\triangle_2 \xrightarrow{f_2} M, \tau_2)$. Elles seront dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme (g, id_M) dans la catégorie \mathcal{R} .

Pour tout espace topologique, on note $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des classes d'équivalences de familles paramétrées par M :

$$\mathcal{F}(M) = \{ \text{familles de triangles } (\triangle \xrightarrow{f} M, \tau) \} / \simeq$$

Proposition II.2.3. L'application \mathcal{F} s'étend en un foncteur contravariant $\mathcal{F} : Top \rightarrow Ens$ de la catégorie des espaces topologiques vers celle des ensembles.

Démonstration. On se donne une application continue $g : M_1 \rightarrow M_2$. Montrons que celle-ci donne un morphisme entre les ensembles de classes d'équivalence de familles

paramétrées par M_2 et M_1 . Soit donc un triangle $(\triangleleft \rightarrow M_2, \tau)$ représentant la classe d'équivalence à laquelle il appartient. On lui associe la classe d'équivalence qui contient le pullback $(\triangleleft \times_{M_2} M_1 \rightarrow M_1, \tau \circ p_1)$ de $(\triangleleft \rightarrow M_2, \tau)$ par g . Pour montrer que ceci définit bien une application entre les deux ensembles, il nous faut montrer que les pullbacks de deux objets équivalents sont équivalents. On se donne donc deux objets équivalents $(\triangleleft_1 \xrightarrow{f_1} M_2)$ et $(\triangleleft_2 \xrightarrow{f_2} M_2)$ au-dessus de M_2 et on suppose que l'équivalence est donnée par un isomorphisme h . Alors $h \times id_{M_1}$ est un isomorphisme et on vérifie facilement qu'il donne l'équivalence souhaitée entre les deux pullbacks ce qui montre que nous avons un foncteur contravariant. \square

Si ce foncteur est représentable par un espace topologique R , c'est-à-dire si l'on a $\mathcal{F}(-) \simeq Mor(-, R)$, alors l'image réciproque de $id_R \in Mor(R, R)$ dans $\mathcal{F}(R)$ est un triangle rectangle universel.

Non existence d'un triangle rectangle universel

Montrons qu'il n'existe pas de triangle rectangle universel. Un tel objet $(\blacktriangleleft \xrightarrow{r} R, c)$, s'il existait, vérifierait la propriété universelle suivante :

Pour tout $(\triangleleft \xrightarrow{f} M, \tau)$ il existe une unique application $h : M \rightarrow R$ telle que

$$h^*(\blacktriangleleft \xrightarrow{r} R, c) \simeq (\triangleleft \xrightarrow{f} M, \tau)$$

où $h^*(\blacktriangleleft \xrightarrow{r} R, c)$ désigne le pullback de $(\blacktriangleleft \xrightarrow{r} R, c)$ défini ci-dessus.

On se donne un revêtement non ramifié à deux feuillets non trivial $f : \triangleleft \rightarrow M$ et le revêtement trivial $f_0 : \triangleleft_0 \rightarrow M$ qu'on considère comme des familles de triangles paramétrées par M en les munissant des applications τ et τ_0 constantes et égales à $\frac{\pi}{4}$. Par hypothèse, il existe $h : M \rightarrow R$ et $h_0 : M \rightarrow R$ telles que

$$h^*(\blacktriangleleft \xrightarrow{r}, c R) \simeq (\triangleleft \xrightarrow{f} M, \tau)$$

et

$$h_0^*(\blacktriangleleft \xrightarrow{r} R, c) \simeq (\triangleleft_0 \xrightarrow{f_0} M, \tau_0)$$

D'autre part, il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M tel que la restriction de $(\triangleleft \rightarrow M, \tau)$ à U_i , c'est-à-dire son pullback par $U_i \hookrightarrow M$, est trivial. Ce dernier est donc isomorphe à la restriction de $(\triangleleft_0 \rightarrow M, \tau_0)$ à U_i donc par unicité $h|_{U_i} = h_0|_{U_i} \forall i$ d'où $h = h_0$. Ceci implique que les images réciproques sont identiques donc que les triangles $\triangleleft \xrightarrow{f} M$ et $\triangleleft \xrightarrow{f_0} M_0$ sont équivalents ce qui est une contradiction. On a donc montré qu'il n'existait pas de famille de triangles rectangles universelle. La catégorie \mathcal{R} au-dessus de Top peut cependant être munie d'une structure de champs. Pour montrer cela, nous allons montrer qu'elle est équivalente à un champ quotient puis que cette équivalence de catégories transporte la structure de champ.

Equivalence de catégories

On note $X := \{(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\}$. On a le résultat suivant :

Théorème II.2.4. *Les catégories $[\mathfrak{S}_2 \backslash X]$ et \mathcal{R} sont équivalentes en tant que catégories fibrées en groupoïdes.*

Démonstration. Le groupe \mathfrak{S}_2 agit par permutation sur $X = \{(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\}$. On note p_1 et p_2 respectivement la première et la deuxième projection. On commence par définir un foncteur $\mathcal{G} : [\mathfrak{S}_2 \backslash X] \rightarrow \mathcal{R}$. Soit $(E \xrightarrow{f} M, E \xrightarrow{h} M)$ un objet de $[\mathfrak{S}_2 \backslash X]$ où $E \xrightarrow{f} M$ est un \mathfrak{S}_2 -torseur et $h : E \rightarrow X$ est \mathfrak{S}_2 -équivariante. On pose $\tau := p_1 \circ h$ et $(\triangleleft := E \xrightarrow{f} M, \tau)$ est alors un objet de \mathcal{R} . En effet, f peut être vue comme un revêtement à deux feuilletés si l'on oublie l'action de \mathfrak{S}_2 . De plus si $m \in M$, on a $f^{-1}(m) = \{e_1, e_2\}$, avec $e_1 \neq e_2$, et c'est une orbite de E sous l'action de \mathfrak{S}_2 . On pose $h(e_1) = (\alpha, \beta)$, on a alors $h(e_2) = (\beta, \alpha)$ d'où :

$$p_1 \circ h(e_1) + p_2 \circ h(e_2) = \frac{\pi}{2}$$

ce qui montre que c'est bien une famille de triangles rectangles.

Remarque II.2.5. *Si on choisit $\tau' := p_2 \circ h$, on obtient une famille équivalente.*

On se donne maintenant un morphisme de $[\mathfrak{S}_2 \backslash X]$ entre deux objets $(E_1 \rightarrow M_1, E_1 \rightarrow X)$ et $(E_2 \rightarrow M_2, E_2 \rightarrow X)$ c'est-à-dire la donnée du diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

avec de plus $(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow X) = (E_1 \rightarrow X)$. En composant à droite par la première projection p_1 , on obtient

$$(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[) = (E_1 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[)$$

ce qui achève la preuve de la functorialité de \mathcal{G} .

On construit maintenant un foncteur \mathcal{F} dans l'autre sens. On se donne un objet $(\triangleleft \xrightarrow{f} M, \tau)$ de \mathcal{R} . On pose $E := \triangleleft$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_2 = \{1, \sigma\}$ où σ désigne la transposition. L'action est définie localement sur E , par permutation des deux éléments de la fibre. On pose $h(e) = (\tau(e), \tau(\sigma e)) \in X$ ce qui définit une application $h : E \rightarrow X$ équivariante. Ainsi,

$$(E \rightarrow M, E \rightarrow X) \in \text{Obj}([\mathfrak{S}_2 \backslash X]).$$

Ceci définit clairement un foncteur et il est facile de vérifier que ce dernier commute avec les deux foncteurs oubliés $[\mathfrak{S}_2 \backslash X] \rightarrow \text{Top}$ et $\mathcal{R} \rightarrow \text{Top}$. Enfin, il reste à montrer que l'on a bien $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \sim \text{Id}$ et $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \sim \text{Id}$ ce qui est clair par construction. \square

Structure de champs de \mathcal{R}

Il est clair que la catégorie \mathcal{R} est fibrée en groupoïdes au-dessus de la catégorie Top des espaces topologiques. On note $C = [\mathfrak{S}_2 \setminus X]$ pour simplifier les notations. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{R} \\ p \downarrow & \swarrow q & \\ Top & & \end{array}$$

On a vu ci-dessus que la catégorie \mathcal{R} des familles de triangles rectangles paramétrées par Top était équivalente à C qui est un champ sur la catégorie Top . Il reste à montrer que cette équivalence de catégories transporte la structure de champ ce qui permettra de conclure que la catégorie \mathcal{R} a une structure de champ. Pour cela, il nous faut vérifier que les pullbacks sont préservés par l'équivalence :

Lemme II.2.6. *L'équivalence de catégories entre $C := [\mathfrak{S}_2 \setminus X]$ et \mathcal{R} donnée par \mathcal{F} et \mathcal{G} commute avec les pullbacks.*

Démonstration. Le foncteur envoie un objet $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ sur la famille de triangles

$$(E \rightarrow M, E \rightarrow X \xrightarrow{p_1} 0, \frac{\pi}{2}[])$$

où l'application $E \rightarrow M$ est désormais considérée comme un revêtement non ramifié à deux feuilletés. On se donne une application continue $g : M_1 \rightarrow M_2$, c'est-à-dire un morphisme dans Top , et un objet $(E \rightarrow M_2, E \rightarrow X)$ e C au-dessus de M_2 . Alors son pullback

$$(E \times_{M_2} M_1 \rightarrow M_1, E \times_{M_2} M_1 \rightarrow E, \rightarrow X)$$

par g est envoyé par \mathcal{G} sur le pullback de

$$(E \rightarrow M_2, E \rightarrow X \xrightarrow{p_1} 0, \frac{\pi}{2}[]).$$

On montre la même propriété pour les morphismes et la preuve est similaire pour le foncteur \mathcal{F} . □

Montrons maintenant que cette équivalence transporte la structure de préchamp, c'est-à-dire que \mathcal{R} satisfait l'axiome 1. Les applications qui apparaissent dans cet axiome sont des combinaisons de pullbacks de morphismes. Par hypothèse, cette suite est exacte dans la catégorie C et puisque \mathcal{G} (et \mathcal{F}) commute avec les pullbacks, son image par \mathcal{G} est également exacte ce qui est le résultat souhaité pour la catégorie C . On a donc démontré que \mathcal{R} avait une structure de préchamp.

Montrons maintenant que \mathcal{R} satisfait l'axiome 2 ce qui montrera que cette catégorie est un champ sur Top . Soit $i_\alpha : T_\alpha \rightarrow T$ une famille couvrante de T . On se donne une collection d'objets $\delta_\alpha := (\Delta_\alpha \rightarrow T_\alpha, \tau_\alpha)$ de \mathcal{R} indicée par α ainsi que des isomorphismes

$$\varphi_{\alpha,\beta} : (\Delta_\alpha \times_{T_\alpha} T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta}, \tau_\alpha) \xrightarrow{\sim} (\Delta_\beta \times_{T_\beta} T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta}, \tau_\beta)$$

où on note $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \cap_T T_\beta$. On passe dans la catégorie C . On obtient une collection d'objets $t_\alpha = \mathcal{F}(\Delta_\alpha \rightarrow U_\alpha, \tau_\alpha)$ de C , avec t_α au-dessus de U_α pour tout α . De plus, pour tout α, β , $\mathcal{F}(\varphi_{\alpha\beta})$ est un isomorphisme entre $\mathcal{F} \circ p_1^*(\delta_\alpha)$ et $\mathcal{F} \circ p_2^*(\delta_\beta)$ donc d'après le lemme II.2.6, c'est un isomorphisme entre $p_1^* \circ \mathcal{F}(\delta_\alpha)$ et $p_2^* \circ \mathcal{F}(\delta_\beta)$. Il satisfait clairement la condition de cocycle et comme C est un champ sur Top , on sait qu'il existe un objet $(E \rightarrow T, E \rightarrow X)$ de C au-dessus de T et des isomorphismes

$$\nu_\alpha : i_\alpha^*(E \rightarrow T, E \rightarrow X) \rightarrow t_\alpha$$

vérifiant la condition de compatibilité. On note

$$\mathcal{G}(E \rightarrow T, E \rightarrow X) \text{ et } \lambda_\alpha := \mathcal{G}(\nu_\alpha), \forall \alpha := (\Delta, T, \tau).$$

On vérifie facilement que les isomorphismes $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$ vérifient la condition de compatibilité. Ceci achève de montrer que \mathcal{R} est un champ sur Top . Une autre preuve du fait que \mathcal{R} est un champ et qui sera donnée plus tard, est de vérifier que \mathcal{R} est un sous-champ du champ \mathcal{T} des triangles que nous définissons dans la section suivante.

II.2.2 Le champ des triangles : cas général

Définitions

On s'intéresse maintenant aux triangles quelconques, toujours à similarité près. On note

$$X = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in]0, \pi[^3 / \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$$

L'ensemble X peut être muni d'une structure de champ en considérant le champ $[\{*\}/X]$ sur la catégorie des espaces topologiques. Ses objets sont les morphismes $M \rightarrow X$ où M est un espace topologique et un morphisme entre $M \rightarrow X$ et $M' \rightarrow X$ est un morphisme $M \rightarrow M'$ tel que

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & \searrow & \\ & & X \end{array}$$

commute.

On considèrera aussi le champ $[X/\mathfrak{S}_3]$ sur la catégorie Top des espaces topologiques. On rappelle que ses objets sont les couples $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ où $E \rightarrow M$ est un

\mathfrak{S}_3 -torseur, M un espace topologique et $E \rightarrow X$ est une application équivariante. Un morphisme entre $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ et $(E' \rightarrow M', E' \rightarrow X)$ est la donnée de deux morphismes $\varphi : E \rightarrow E'$ et $\psi : M \rightarrow M'$, avec φ équivariant, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array}$$

est cartésien et tels que $(E \rightarrow E' \rightarrow X) = (E \rightarrow X)$.

Définition II.2.7. On dira que deux objets de cette catégorie sont **équivalents** s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \rightarrow E'$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \downarrow & \searrow & \\ M & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \downarrow & \searrow & \\ X & & \end{array}$$

soient commutatifs.

Définition II.2.8. Une famille de triangles non ordonnés paramétrée par M est la donnée d'un revêtement non ramifié à trois feuillets et d'une application continue vers $]0, \pi[$:

$$\begin{array}{c} \Delta \xrightarrow{3:1} M \text{ telle que } \forall m \in M \text{ on a } f^{-1}(m)\{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ et } \tau(\alpha) + \tau(\beta) + \tau(\gamma) = \pi \\ \tau \downarrow \\]0, \pi[\end{array}$$

On considère la catégorie \mathcal{T} :

1. Les objets sont les familles de triangles non ordonnés $(\Delta \rightarrow M, \Delta \xrightarrow{\tau}]0, \pi[)$ notées plus simplement $(\Delta \rightarrow M, \tau)$
2. Un morphisme entre $(\Delta_1 \rightarrow M_1, \tau_1)$ et $(\Delta_2 \rightarrow M_2, \tau_2)$ est la donnée de deux applications continues :
 - (a) $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ telle que $(\Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow]0, \pi[) = (\Delta_1 \rightarrow]0, \pi[)$
 - (b) et $f : M_1 \rightarrow M_2$ et telle que le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

Remarque II.2.9. *Le fait que le diagramme est cartésien impose comme précédemment que trois sommets distincts sont envoyés sur trois sommets distincts.*

Comme pour les triangles rectangles on considère la relation d'équivalence suivante :

Définition II.2.10. *Soient deux telles familles $(\Delta_i \xrightarrow{f_i} M, \Delta_i \xrightarrow{\tau_i} 0, \pi[])$, $i = 1, 2$. Elles seront dites **équivalentes** s'il existe un morphisme (g, id_M) dans \mathcal{T} entre les deux familles.*

De manière totalement identique au cas des triangles rectangles, on montre qu'il n'y a pas de triangle universel.

On considère maintenant la catégorie, notée $\tilde{\mathcal{T}}$ des familles de triangles ordonnés :

1. Les objets sont les triangles $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ comme précédemment ainsi que la donnée de trois sections s_1, s_2, s_3 de $M \rightarrow \Delta$, chacune correspondant à un 'sommets' du triangle.
2. Un morphisme entre $(\Delta \rightarrow M, \tau, s_1, s_2, s_3)$ et $(\Delta' \rightarrow M', \tau', s'_1, s'_2, s'_3)$ est un morphisme entre $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ et $(\Delta' \rightarrow M', \tau')$ qui est de plus compatible avec les sections. Plus précisément, si on note $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$, $\psi : M \rightarrow M'$ et f, f' les revêtements, on doit avoir $\varphi \circ s_i(m) = s'_i \circ \psi(m)$, $\forall i = 1, 2, 3$ et $\forall m \in M$.

Equivalence de catégories

Lemme II.2.11. *Les catégories $\tilde{\mathcal{T}}$ et \underline{X} sont équivalentes.*

Démonstration. On considère le foncteur $O : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \underline{X}$ défini par

$$O(\Delta \rightarrow M, \tau, s_1, s_2, s_3) = (M \rightarrow X, m \mapsto (\tau \circ s_1(m), \tau \circ s_2(m), \tau \circ s_3(m)))$$

Montrons que c'est bien un foncteur. Considérons (φ, ψ) un morphisme entre les objets $(\Delta \rightarrow M, \tau, s_1, s_2, s_3)$ et $(\Delta' \rightarrow M', \tau', s'_1, s'_2, s'_3)$, montrons qu'il induit un morphisme entre les images. On a

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\varphi} & \Delta' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array}$$

et les sections sont compatibles avec les τ donc il suffit de montrer que

$$(M \rightarrow M' \rightarrow X) = (M \rightarrow X).$$

Soit $m \in M$ et montrons que l'on a

$$\tau \circ s_i(m) = \tau' \circ s'_i \circ \psi(m), \forall i = 1, 2, 3$$

Par hypothèse, on a

$$s'_i \circ \psi(m) = \varphi \circ s_i(m), \forall i = 1, 2, 3$$

et $\tau' \circ \varphi = \tau$ d'où

$$\tau' \circ s'_i \circ \psi(m) = \tau' \circ \varphi \circ s_i(m) = \tau \circ s_i(m), \forall i = 1, 2, 3$$

Les deux applications sont donc bien égales et on montré que O est un foncteur.

On veut maintenant définir un foncteur inverse. On se donne un élément de \underline{X} , c'est-à-dire une application $h : M \rightarrow X$. On pose $\Delta = M \times \{1, 2, 3\}$ et $s_i(m) = (m, i)$, $i = 1, 2, 3$. On définit ensuite τ en posant

$$(\tau(m, 1), \tau(m, 2), \tau(m, 3)) = h(m)$$

et on note $\mathcal{N}(M \rightarrow X)$ le triangle $(\Delta \rightarrow M, \tau)$. Montrons \mathcal{N} est un foncteur. Soit $\psi : M \rightarrow M'$ un morphisme entre deux objets $M \rightarrow X$ et $M' \rightarrow X$ de \underline{X} . On pose $\varphi(m, i) = (\psi(m), i)$, $i = 1, 2, 3$ et on vérifie que ceci définit bien un morphisme entre $\mathcal{N}(M \rightarrow X)$ et $\mathcal{N}(M' \rightarrow X)$. On a donc construit un foncteur et il est clair que ce foncteur est bien l'inverse de O , d'où l'équivalence de catégories. □

On se penche maintenant sur le cas général des triangles non ordonnés.

Proposition II.2.12. *On a une équivalence de catégories entre \mathcal{T} et $[X/\mathfrak{S}_3]$*

Démonstration. On va commencer par se restreindre aux catégories suivantes : On note \mathcal{T}_{triv} la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} dont les objets sont les revêtements triviaux. De même, on note $[X/\mathfrak{S}_3]_{triv}$ la sous-catégorie pleine de X dont les objets sont les \mathfrak{S}_3 -torseurs triviaux.

Lemme II.2.13. *Les catégories \mathcal{T}_{triv} et $[X/\mathfrak{S}_3]_{triv}$ sont équivalentes.*

Démonstration du lemme. Soit $(\Delta, M, \tau) \in \mathcal{T}_{triv}$: on a

$$\Delta = f^{-1}(M) \simeq M \times \{1, 2, 3\}$$

et on pose

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta^3, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j \text{ et } f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)\}.$$

C'est un espace topologique qui hérite de la topologie de M et sur lequel \mathfrak{S}_3 agit de manière naturelle. L'application $E \rightarrow M$, qui à (x_1, x_2, x_3) associe $f(x_1)$ est un revêtement à six feuillets. De plus, l'application $E \rightarrow X$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe $(\tau(x_1), \tau(x_2), \tau(x_3))$ est compatible avec l'action de \mathfrak{S}_3 .

On pose $\mathcal{F}((\Delta \rightarrow M, \tau)) = (E \rightarrow M, E \rightarrow X)$. Supposons que l'on a un morphisme $(\Delta \rightarrow M, \tau) \rightarrow (\Delta' \rightarrow M', \tau')$ dans \mathcal{T} . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\varphi} & \Delta' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array}$$

et de plus on a $\tau' \circ \varphi = \tau$. On définit une application Φ sur E en posant

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3)).$$

Pour que l'application soit bien définie de E vers E' , on doit avoir $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ si $i \neq j$, ce qui découle de la définition d'un morphisme entre familles de triangles. On a alors le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array}$$

De plus, on a bien $(E \rightarrow E' \rightarrow X) = E \rightarrow X$ par compatibilité des τ . En effet, si $(x_1, x_2, x_3) \in E$, son image $(\tau'(\varphi(x_1)), \tau'(\varphi(x_2)), \tau'(\varphi(x_3)))$ par la composée des deux applications est égale à $(\tau(x_1), \tau(x_2), \tau(x_3))$ par hypothèse. On a donc montré que \mathcal{F} était un foncteur entre les catégories \mathcal{T}_{triv} et $[X/\mathfrak{S}_3]_{triv}$.

On veut définir un foncteur inverse. On se donne un \mathfrak{S}_3 -torseur trivial donné par une application $f : E \rightarrow M$ et une application équivariante $h : E \rightarrow X$ avec $E \simeq M \times \mathfrak{S}_3$. L'isomorphisme étant fixé, on identifie dorénavant E à $M \times \mathfrak{S}_3$. On a $f^{-1}(M) = M \times \mathfrak{S}_3$. On choisit x dans \mathfrak{S}_3 ce qui permet d'écrire $\mathfrak{S}_3 = \{\sigma * x, \sigma \in \mathfrak{S}_3\}$. On veut trouver un triangle $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ tel que $\mathcal{F}(\Delta \rightarrow M, \tau) = (E \rightarrow M, E \rightarrow X)$. On pose $\Delta := M \times \{1, 2, 3\}$ et on définit τ en posant

$$(\tau(m, 1), \tau(m, 2), \tau(m, 3)) = h(m, x).$$

Par hypothèse,

$$h(m, x) = (\alpha(m), \beta(m), \gamma(m))$$

avec $\alpha(m) + \beta(m) + \gamma(m) = \pi$ donc $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ est bien un triangle (trivial). Il nous reste à montrer que ceci est indépendant du choix de x . Soit $y \in \mathfrak{S}_3$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ telle que $y = \sigma * x$. Le triangle construit à partir de y est $(\Delta \rightarrow M, \tau')$ avec pour tout $m \in M$,

$$(\tau'(m, 1), \tau'(m, 2), \tau'(m, 3)) = h(m, y) = h(m, x)$$

par équivariance de l'application $E \rightarrow X$. Les deux triangles sont donc équivalents et l'équivalence est donnée par

$$s : \Delta \rightarrow \Delta, (m, i) \mapsto (m, \sigma(i)) \quad \forall i = 1 \dots 3$$

En effet, on a $\tau' = \tau \circ s$ et l'autre condition est clairement vérifiée. On pose

$$\mathcal{G}(E \xrightarrow{f} M, E \xrightarrow{h} X) = (\Delta \rightarrow M, \tau)$$

où $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ est l'élément construit ci-dessus.

Montrons que ceci définit un foncteur. Soit (Φ, ψ) un morphisme entre les objets $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ et $(E' \rightarrow M', E' \rightarrow X)$ de $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]_{triv}$. On a

$$\mathcal{G}(E \rightarrow M, E \rightarrow X) = (\Delta, M, \tau)$$

avec $\tau(m, i) = p_i(m, x)$ pour un certain $x \in \mathfrak{S}_3$. Similairement,

$$\mathcal{G}(E' \rightarrow M', E' \rightarrow X) = (\Delta', M', \tau')$$

avec $\tau'(n, i) = p_i \circ h'(n, y)$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $h(m, x) = h'(\psi(m), \sigma * y)$. On pose alors $\varphi(m, i) = (\psi(m), \sigma(i))$. On vérifie facilement que $\tau = \tau' \circ \varphi$ et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\varphi} & \Delta' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array} .$$

On a donc défini un morphisme entre les deux images et ceci montre que \mathcal{G} est bien un foncteur. On vérifie que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \sim Id$ et $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \sim Id$ ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Retour à la preuve de la proposition : On se donne un objet $\xi = (\Delta, M, \tau)$ de \mathcal{T} au-dessus de M . On sait qu'il existe un recouvrement $\{M_i\}$ de M qui trivialise $\Delta \rightarrow M$. On obtient ainsi une collection d'objets ξ_i de \mathcal{T}_{triv} au-dessus de M_i , et des fonctions de transitions $\varphi_{i,j}$. D'après le lemme II.2.13, on peut associer à chaque ξ_i un élément $\mathcal{F}(\xi_i)$ de $[X/\mathfrak{S}_3]_{triv}$. On recolle ensuite ces objets en utilisant les $\mathcal{F}(\varphi_{i,j})$. Ceci donne un objet de $[X/\mathfrak{S}_3]$. On montre facilement que ceci ne dépend pas de la trivialisation choisie. Il suffit de montrer qu'en prenant un recouvrement plus fin, on obtient le même objet mais ceci est clair. La functorialité de $\mathcal{F} : \mathcal{T}_{triv} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \setminus X]_{triv}$ montre que l'on définit un foncteur de \mathcal{T} vers $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ et ce dernier donne l'équivalence de catégories. \square

Structure de champs de \mathcal{T}

Il reste à montrer que cette équivalence de catégories transporte la structure de champ ce qui permettra de conclure que la catégories \mathcal{T} des familles de triangles paramétrées par les espaces topologiques a une structure de champ. On montre de manière totalement identique au cas des triangles rectangles que le foncteur transporte la structure de champ à partir du moment où l'équivalence de catégories commute avec les pullbacks. Il nous suffit donc de montrer le lemme suivant :

Lemme II.2.14. *L'équivalence de catégories donnée par \mathcal{F} et \mathcal{G} entre les catégories $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ et \mathcal{T} commute avec les pullbacks.*

Démonstration. On va le montrer pour des objets triviaux. On se donne $(M_2 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M_2, M_2 \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{h} X)$ un objet de C au dessus de M_2 et une application continue $g : M_1 \rightarrow M_2$, c'est-à-dire un morphisme dans Top . Son pullback

$$(M_1 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M_1, M_1 \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{h \circ (g \times Id)} X)$$

est envoyé par \mathcal{G} sur

$$(M_1 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M_1, \tilde{\tau}) \text{ où } (\tilde{\tau}(m, 1), \tilde{\tau}(m, 2), \tilde{\tau}(m, 3)) = h(g(m), Id) \forall m \in M_1$$

D'autre part, $(M_2 \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M_2, M_2 \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{h} X)$ est envoyé par \mathcal{G} sur

$$(M_2 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow M_2, \tau) \text{ où } (\tau(m, 1), \tau(m, 2), \tau(m, 3)) = h(m, Id), \forall m \in M_2$$

et son pullback est

$$(M_1 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow M_1, \tau_g) \text{ où } (\tau_g(m, 1), \tau_g(m, 2), \tau_g(m, 3)) = h(g(m), Id), \forall m \in M_1$$

ce qui montre que \mathcal{G} commute avec les pullbacks d'objets. La démonstration est similaire pour les morphismes et pour le foncteur \mathcal{F} . \square

Remarque II.2.15. *Pour l'image par le foncteur \mathcal{G} on choisit l'identité comme élément puisqu'on a vu que le choix d'un autre élément donnait un triangle équivalent.*

On a montré que l'équivalence de catégorie transporte la structure de champs et donc que la catégorie des triangles était munie d'une structure de champ.

Le sous-champ des triangles rectangles

On rappelle la définition suivante :

Définition II.2.16. *Soit C un champ sur un site \mathcal{S} . Un **sous-champ** de C est une sous-catégorie pleine B de C telle que*

- *Pour tout morphisme $\varphi : V \rightarrow U$ de \mathcal{S} , on a $\varphi^*(Obj(B_U)) \subset Obj(B_V)$.*
- *Pour toute famille couvrante $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow U$ et tout $x \in Obj(C_U)$, on a $x \in Obj(B_U)$ si et seulement si $i_\alpha^* x \in Obj(B_{U_\alpha}), \forall \alpha$.*

(cf [LMB])

On a alors le résultat suivant :

Proposition II.2.17. *Le champ des triangles rectangles \mathcal{R} est un sous-champ du champ \mathcal{T} des triangles.*

Démonstration. On commence pas montrer que \mathcal{R} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{T} . On se donne deux objets $(\triangleleft_1 \xrightarrow{f_1} M_1, r_1)$ et $(\triangleleft_2 \xrightarrow{f_2} M_2, r_2)$ de \mathcal{R} . On peut voir ces deux objets comme des objets de \mathcal{T} en les identifiant à $(\triangleleft_i \sqcup M_i \xrightarrow{F_i} M_i, r_i), i = 1, 2$ où $F_i : \triangleleft_i \sqcup M_i \rightarrow M_i$ est égal à f_i sur \triangleleft_i et l'identité sur M_i et où on a noté par abus de notations r_i l'application définie pour tout $x \in \triangleleft_i$ par

$$r_i(x) = \begin{cases} r_i(x) & \text{si } x \neq F_i(x) \\ \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\sum_{x \in F_i^{-1}(m)} r_i(x) = \pi$ donc $(\triangleleft_i \sqcup M_i \xrightarrow{F_i} M_i, r_i)$ est un élément de \mathcal{T} pour $i = 1, 2$. On se donne maintenant un morphisme (φ, ψ) dans \mathcal{T} entre deux objet de \mathcal{R} vus comme des objets de \mathcal{T} et on veut montrer que ce morphisme correspond à un unique morphisme dans \mathcal{R} . Par définition, le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \triangleleft_1 \sqcup M_1 & \xrightarrow{\varphi} & \triangleleft_2 \sqcup M_2 \\ F_1 \downarrow & & \downarrow F_2 \\ M_1 & \xrightarrow{\psi} & M_2 \end{array}$$

Montrons que $\varphi|_{\triangleleft_1} : \triangleleft_1 \rightarrow \triangleleft_2$. On montre tout d'abord que $\varphi|_{M_1} = \psi$. Soit $m \in M_1$, alors on sait que $r_1 = r_2 \circ \varphi$ et $r_1(m) = \frac{\pi}{2}$ donc $r_2(\varphi(m)) = \frac{\pi}{2}$ ce qui impose $\varphi(m) \in M_2$. Par ailleurs, puisque $F_2 \circ \varphi(m) = \psi \circ F_1(m)$, on a $\varphi(m) = \psi(m) \forall m \in M_1$. Ainsi, si $a \in \triangleleft_1$ et $\varphi(a) \in M_2$ on doit avoir $\varphi(a) = \psi(m)$ ce qui est impossible puisque le diagramme est cartésien. Donc, $\forall a \in \triangleleft_1$, on a $\varphi(a) \in \triangleleft_2$. On montre facilement que $(\varphi|_{\triangleleft_1}, \psi)$ est un morphisme de \mathcal{R} ce qui achève de montrer que \mathcal{R} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{T} .

On veut maintenant montrer que c'est un sous-champ. La première condition est claire. En effet, si on se donne un objet $(\triangleleft \rightarrow U, r)$ de \mathcal{R}_U , alors par définition

$$\varphi^*(\triangleleft \rightarrow U, r) = (\triangleleft \times_U V \rightarrow V, r \circ p_1) \in \mathcal{R}_V.$$

Pour montrer la deuxième condition, on se donne une famille couvrante $i_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$ et un objet $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ de \mathcal{T} . Supposons que pour tout α , $i_\alpha^*(\Delta, M, \tau)$ appartienne à $Obj(\mathcal{R}_{M_\alpha})$. On sait donc que pour tout α il existe un objet $(\triangleleft_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} M_\alpha, r_\alpha) \in Obj(\mathcal{R}_\alpha)$ tel que

$$(\Delta \times_M M_\alpha \rightarrow M_\alpha, \tau \circ p_1) \sim (\triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha \xrightarrow{G_\alpha} M_\alpha, r_\alpha), \forall \alpha$$

où on identifie encore $r_\alpha : \triangleleft_\alpha \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ avec son extension à $\triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha$, constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ sur M_α et G_α désigne l'extension de g_α à $\triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha$ égale à g_α sur \triangleleft_α et l'identité sur M_α . On note h_α l'isomorphisme entre $(\Delta \times_M M_\alpha \rightarrow M_\alpha, \tau \circ p_1)$ et $(\triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha \rightarrow M_\alpha, r_\alpha)$. On a donc $\forall \alpha$:

$$(\Delta \times_M M_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} \triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha \xrightarrow{G_\alpha} M_\alpha) = (\Delta \times_M M_\alpha \xrightarrow{p_2} M_\alpha)$$

et

$$(\Delta \times_M M_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} \triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha \xrightarrow{r_\alpha}]0, \pi[) = (\Delta \times_M M_\alpha \xrightarrow{\tau \circ p_1}]0, \pi[).$$

On veut montrer qu'il existe une famille de triangles rectangles (\triangleleft, M, r) telle que $(\triangleleft \sqcup M, M, r) \sim (\Delta, M, \tau)$ ce qui montrera que $(\Delta, M, \tau) \in \text{Obj}(\mathcal{R})$. On pose

$$\triangleleft := (\bigsqcup_\alpha \triangleleft_\alpha) / \sim$$

où la relation d'équivalence est donnée par :

$$x_\alpha \in \triangleleft_\alpha, x_\beta \in \triangleleft_\beta, \alpha \neq \beta, x_\alpha \sim x_\beta \iff p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta)$$

où $p_1 : \Delta \times_M M_\alpha \rightarrow \Delta$. On note \bar{a} la classe d'équivalence contenant a . On identifie dorénavant M à $(\bigsqcup_\alpha M_\alpha) / \sim$ où la relation d'équivalence est donnée par

$$m_\alpha \in M_\alpha, m_\beta \in M_\beta, \alpha \neq \beta, m_\alpha \sim m_\beta \iff i_\alpha(m_\alpha) = i_\beta(m_\beta).$$

On note comme ci-dessus \bar{m} la classe d'équivalence contenant m . On pose

$$g : \begin{cases} \triangleleft & \rightarrow & M \\ x & \mapsto & \overline{G_\alpha(x_\alpha)} \text{ si } \bar{x}_\alpha = x \end{cases}$$

L'application est bien définie. En effet, supposons que l'on a $\bar{x}_\alpha = \bar{x}_\beta$ pour un certain couple α, β . On a alors

$$p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta)$$

et

$$i_\alpha \circ G_\alpha(x_\alpha) = i_\alpha \circ G_\alpha \circ h_\alpha \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = i_\alpha \circ p_2 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha)$$

or par définition du produit fibré on a l'égalité $i_\alpha \circ p_2 = f \circ p_1$ donc

$$i_\alpha \circ G_\alpha(x_\alpha) = f \circ p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = f \circ p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta) = i_\beta \circ G_\beta(x_\beta)$$

ce qui montre que l'application g est bien définie et c'est clairement un revêtement non ramifié à deux feuillets. Posons maintenant

$$r : \begin{cases} \triangleleft & \rightarrow &]0, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & r_\alpha(x_\alpha) \text{ si } \bar{x}_\alpha = x \end{cases}$$

L'application est bien définie car si $\bar{x}_\alpha = \bar{x}_\beta$, on a $p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta)$ et par hypothèse $\tau \circ p_1 = r_\alpha \circ h_\alpha$ d'où

$$r_\alpha(x_\alpha) = r_\alpha \circ h_\alpha \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = \tau \circ p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = \tau \circ p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta) = r_\beta(x_\beta).$$

Montrons maintenant qu'il satisfait les propriétés d'un triangle. On sait que pour tout $m \in M$, il existe $m_\alpha \in M_\alpha$ tel que $i_\alpha(m_\alpha) = m$, il existe donc $a_\alpha, b_\alpha \in \triangleleft_\alpha$, $a_\alpha \neq b_\alpha$, tels

que $g_\alpha(a_\alpha) = g_\alpha(b_\alpha) = m_\alpha$. Leurs classes d'équivalence $a := \bar{a}_\alpha$ et $b := \bar{b}_\alpha$ sont donc les deux antécédents de m par g . On a

$$r(a) + r(b) = r_\alpha(a_\alpha) + r_\alpha(b_\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

donc $(\triangleleft \rightarrow M, r)$ est un objet de \mathcal{R} . Montrons maintenant que

$$(\triangleleft \sqcup M \rightarrow M, r) \sim (\Delta \rightarrow M, \tau)$$

ce qui achèvera de montrer que $(\Delta \rightarrow M, \tau)$ est un objet de \mathcal{R} . On pose

$$h : \begin{cases} \Delta & \rightarrow \triangleleft \sqcup M \\ x & \mapsto \frac{\triangleleft \sqcup M}{h_\alpha(x, m_\alpha)} \text{ si } f(x) = i_\alpha(m, \alpha) \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que l'application est bien définie. Soit donc $m_\beta \in M_\beta$ tel que $i_\alpha(m_\alpha) = i_\beta(m_\beta)$. Supposons dans un premier temps que $h_\alpha(x, m_\alpha) \in M_\alpha$. On a alors

$$r_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = \frac{\pi}{2} \text{ et } r_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = \tau \circ p_1(x, m_\alpha) = \tau(a)$$

donc on a aussi

$$r_\beta \circ h_\beta(x, m_\beta) = \tau(a) = \frac{\pi}{2}$$

ce qui implique $h_\beta(x, m_\beta) \in M_\beta$. Pour montrer que l'application est bien définie, il faut donc montrer que

$$i_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = i_\beta \circ h_\beta(x, m_\beta)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times_M M_\alpha & \xrightarrow{h_\alpha} & \triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha \\ & \searrow p_2 & \downarrow G_\alpha \\ & & M_\alpha \\ & \searrow p_1 & \downarrow i_\alpha \\ & & M \end{array}$$

Lorsque $h_\alpha(x, m_\alpha) \in M_\alpha$, on a $G_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = h_\alpha(x, m_\alpha)$ donc le diagramme montre que l'on a

$$i_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = i_\alpha \circ G_\alpha \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = p_1(x, m_\alpha) = x = i_\beta \circ h_\beta(x, m_\beta)$$

ce qui montre que l'application est bien définie dans ce cas.

On se place maintenant dans le cas où $h_\alpha(x, m_\alpha) \in \triangleleft_\alpha$. De la même manière que ci-dessus, on montre que $h_\beta(x, m_\beta)$ appartient alors à \triangleleft_β et on a

$$p_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ h_\alpha(x, m_\alpha) = x = p_1 \circ h_\beta^{-1} \circ h_\beta(x, m_\beta)$$

donc l'application est également bien définie dans ce cas.

Montrons maintenant que l'application est un isomorphisme. On commence par montrer que l'application est surjective. Soit donc $x \in \triangleleft \sqcup M$, alors il existe $\alpha \in \triangleleft_\alpha \sqcup M_\alpha$ tel que $\overline{x_\alpha} = x$ et $p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ est un antécédent par h de x donc l'application est bien surjective.

Montrons l'injectivité. Soient $a, b \in \Delta$ tels que $h(a) = h(b)$. On sait qu'il existe $x_\alpha \in \triangleleft_\alpha$ et $x_\beta \in \triangleleft_\beta$ tels que $h(a) = \overline{x_\alpha}$ et $h(b) = \overline{x_\beta}$. Par hypothèse, on a donc $\overline{x_\alpha} = \overline{x_\beta}$ d'où

$$p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta).$$

De plus, on a $h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = (a, m_\alpha)$ et $h_\beta^{-1}(x_\beta) = (b, m_\beta)$ pour un certain couple $(m_\alpha, m_\beta) \in M_\alpha \times M_\beta$. Il s'ensuit que

$$p_1 \circ h_\alpha^{-1}(x_\alpha) = a = p_1 \circ h_\beta^{-1}(x_\beta)$$

donc $a = b$. On a donc bien construit un isomorphisme entre Δ et $\triangleleft \sqcup M$ et par construction c'est un isomorphisme dans \mathcal{T} donc les triangles sont équivalents. La réciproque de la deuxième propriété est donnée par la première propriété. On a donc montré que \mathcal{R} est un sous-champ de \mathcal{T} . □

Groupe fondamental et revêtement universel

On considère le foncteur

$$\mathcal{C} : \underline{X} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \backslash X]$$

qui envoie un morphisme $M \xrightarrow{h} X$ vers l'objet $(M \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M, M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\tilde{h}} X)$ où le torseur trivial est donné par la première projection et l'application équivariante \tilde{h} est définie par $\tilde{h} := (x, \sigma) \mapsto \sigma.h(x)$, . désignant l'action de \mathfrak{S}_3 sur X . On veut montrer que ce morphisme est représentable. On se donne donc un morphisme de champ $\underline{S} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \backslash X]$.

Il est déterminé par l'image de id_S , c'est-à-dire un \mathfrak{S}_3 -torseur $E \xrightarrow{f} S$ et une application équivariante $E \xrightarrow{h} X$. En effet, tout objet $(M \xrightarrow{g} S) \in Obj(\underline{S})$ est envoyé par ce foncteur vers

$$g^*(E \rightarrow S, E \rightarrow X) = (E \times_S M \xrightarrow{p_2} M, E \times_S M \xrightarrow{hop_1} X).$$

On voudrait montrer que le foncteur $\underline{X} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \backslash X]$ est un revêtement universel de $[\mathfrak{S}_3 \backslash X]$. On aura alors $\pi_1([\mathfrak{S}_3 \backslash X]) = \mathfrak{S}_3$.

Proposition II.2.18. *Soient $\mathcal{C} := \underline{X} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \backslash X]$ le foncteur canonique défini ci-dessus et $\mathcal{E} := \underline{S} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \backslash X]$ le morphisme déterminé par $(E \xrightarrow{f} S, E \xrightarrow{h} X)$, alors le champ $\underline{S} \times_{[\mathfrak{S}_3 \backslash X]} \underline{X}$ est équivalent à \underline{E} . En particulier, ceci montre que le foncteur précédent est représentable et que c'est de plus un revêtement puisque $E \rightarrow S$ est un revêtement.*

Ceci montrera que le foncteur est représentable.

Démonstration. On note $C := [\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ pour simplifier les notations.

On commence par décrire explicitement la catégorie $\underline{S} \times_C \underline{X}$. Par définition, ses objets sont les triplets $(M \xrightarrow{k} S, M \xrightarrow{l} X, \varphi)$ où (φ, id_M) est un morphisme dans C entre les objets

$$\mathcal{E}(M \xrightarrow{k} S) = (E \times_S M \rightarrow M, E \times_S M \xrightarrow{hop_1} X)$$

et

$$\mathcal{C}(M \xrightarrow{l} X) = (M \times \mathfrak{S}_3 \rightarrow M, M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\tilde{l}} X)$$

de C . Un morphisme entre deux objets $(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \alpha)$ et $(M' \rightarrow S, M' \rightarrow X, \alpha')$ est une application continue $\beta : M \rightarrow M'$ faisant commuter les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & \searrow & \\ S & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & \searrow & \\ X & & \end{array}$$

et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(M \rightarrow S) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{C}(M \rightarrow X) \\ \mathcal{E}(\beta) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(\beta) \\ \mathcal{E}(M' \rightarrow S) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{C}(M' \rightarrow X) \end{array}$$

Remarque II.2.19. La catégorie C étant un champ sur Top , elle est fibrée en groupoïdes donc par hypothèse, si $(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \alpha)$ est un objet de $\underline{S} \times_C \underline{X}$, les \mathfrak{S}_3 -torseurs $E \times_S M$ et $M \times \mathfrak{S}_3$ sont isomorphes par φ .

Montrons que cette catégorie est équivalente à \underline{E} . On commence par construire un foncteur de \underline{E} vers $\underline{S} \times_C \underline{X}$. On considère un objet $(M \xrightarrow{g} E) \in Obj(\underline{E})$. La deuxième projection $E \times_S M \rightarrow M$ est un \mathfrak{S}_3 -torseur trivial. En effet, étant donné un couple $(x, y) \in E \times_S M$, on a $f(x) = f(g(y))$ et puisque f est un \mathfrak{S}_3 -torseur, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ telle que $x = \sigma.g(y)$. On envoie (x, y) sur (y, σ) . Cette application que l'on note α est une bijection entre $E \times_S M$ et $M \times \mathfrak{S}_3$. Montrons qu'elle induit un isomorphisme dans C entre $\mathcal{E}(M \xrightarrow{f \circ g} S)$ et $\mathcal{C}(M \xrightarrow{h \circ g} X)$. On a

$$\mathcal{E}(M \rightarrow S) = (E \times_S M \xrightarrow{p_2} M, E \times_S M \xrightarrow{hop_1} X)$$

et

$$\mathcal{C}(M \rightarrow X) = (M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{p_1} M, M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\widetilde{h \circ g}} X).$$

On doit montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \times_S M & \xrightarrow{\alpha} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

est cartésien ce qui est clair. De plus, un morphisme de C doit satisfaire

$$(E \times_S M \xrightarrow{h \circ p_1} X) = (E \times_S M \xrightarrow{\alpha} M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\widetilde{h \circ g}} X).$$

Soit donc $(x, y) \in E \times_S M$, on a $h \circ p_1(x, y) = h(x)$. D'autre part, $\alpha(x, y) = (y, \sigma)$ avec

$$x = \sigma * g(y) \text{ et } \tilde{h}(y, \sigma) = \sigma * h(g(y)) = h(\sigma * g(y)) = h(x)$$

par équivariance de h . Ceci montre que les composées sont égales donc que l'on a un isomorphisme entre les deux objets de C . Ainsi, on a construit un objet $(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \alpha)$ de $\underline{S} \times_C \underline{X}$. On pose

$$\mathcal{F}(M \rightarrow E) := (M \rightarrow S, M \rightarrow X, \alpha)$$

construit ci-dessus. Montrons que c'est un foncteur. On se donne un morphisme φ entre deux objets de \underline{E} :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ g \downarrow & \swarrow g' & \\ E & & \end{array}$$

Il suffit de montrer que φ est compatible avec les isomorphismes α, α' . En d'autres termes, il nous faut montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E \times_S M & \xrightarrow{\alpha} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ id \times \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \times id \\ E \times_S M' & \xrightarrow{\alpha'} & M' \times \mathfrak{S}_3 \end{array}$$

Soit $(x, y) \in E \times_S M$. On a

$$\alpha(x, y) = (y, \sigma) \text{ avec } x = \sigma * g(y)$$

et

$$(\varphi \times id)(y, \sigma) = (\varphi(y), \sigma).$$

D'autre part, on a $\alpha'(x, \varphi(y)) = (\varphi(y), \sigma)$ car $x = \sigma * g(y) = \sigma * g'(\varphi(y))$ ce qui montre la commutativité du diagramme et achève de montrer que \mathcal{F} est un foncteur.

On construit maintenant un foncteur dans l'autre sens, de $\underline{S} \times_C \underline{X}$ vers \underline{E} . Soit

$$(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi) \in \text{Obj}(\underline{S} \times_C \underline{X})$$

et on considère l'application composée suivante :

$$M \hookrightarrow M \times \{Id\} \xrightarrow{\varphi^{-1}} E \times_S M \rightarrow E.$$

C'est une application continue de M dans E donc un objet de \underline{E} . On note

$$\mathcal{G}(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi) := (M \rightarrow E)$$

où $M \rightarrow E$ est l'application construite ci-dessus. Montrons que \mathcal{G} est bien un foncteur. On se donne un morphisme $\beta : M \rightarrow M'$ qui induise un morphisme dans $\underline{S} \times_C \underline{X}$ entre

$$(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi) \text{ et } (M' \rightarrow S, M' \rightarrow X, \varphi').$$

Il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & \searrow & \\ E & & \end{array}$$

commute. Par hypothèse, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E \times_S M & \xrightarrow{\varphi} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ Id \times \beta \downarrow & & \downarrow \beta \times Id \\ E \times_S M' & \xrightarrow{\varphi'} & M' \times \mathfrak{S}_3 \end{array}$$

ce qui montre que le diagramme précédent commute et que \mathcal{G} est bien un foncteur.

On veut maintenant montrer que ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre. On le montre sur les objets. Soit $(M \xrightarrow{g} E) \in \text{Obj}(\underline{E})$. Alors

$$\mathcal{F}(M \rightarrow E) = (M \xrightarrow{f \circ g} S, M \xrightarrow{h \circ g} X, \alpha)$$

où

$$\alpha : \begin{cases} E \times_S M & \xrightarrow{\sim} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ (x, y) & \mapsto & (y, \sigma) \text{ avec } x = \sigma * g(y) \end{cases}$$

et $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(M \rightarrow E) = (M \xrightarrow{p_1 \circ \varphi^{-1}} E)$ où on note encore $\varphi^{-1} : M \rightarrow E \times_S M$ l'application obtenue en identifiant M à $M \times \{Id\}$. Montrons que cette application est égale à g . Soit $m \in M$, alors

$$p_1 \circ \varphi^{-1}(m) = p_1(g(m), m) = g(m)$$

donc

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(M \xrightarrow{g} E) = (M \xrightarrow{g} E)$$

et on a montré que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \sim Id$. Soit maintenant $(M \xrightarrow{k} S, M \xrightarrow{l} X, \varphi) \in \text{Obj}(\underline{S} \times_C \underline{X})$ et calculons $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi)$. On a

$$\mathcal{G}(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi) = (M \xrightarrow{p_1 \circ \varphi^{-1}} E)$$

et

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(M \rightarrow S, M \rightarrow X, \varphi) = (M \xrightarrow{f \circ p_1 \circ \varphi^{-1}} M, M \xrightarrow{h \circ p_1 \circ \varphi^{-1}} X, \alpha)$$

où

$$\alpha : \begin{cases} E \times_S M \xrightarrow{\sim} M \times \mathfrak{S}_3 \\ (x, y) \mapsto (y, \sigma) \text{ avec } x = \sigma * p_1 \circ \varphi^{-1}(y) \end{cases} .$$

Montrons que cet objet est isomorphe à l'objet de départ. On commence par montrer les égalités $f \circ p_1 \circ \varphi^{-1} = k$ et $h \circ p_1 \circ \varphi^{-1} = l$. Pour cela, on rappelle comment l'isomorphisme est caractérisé. Par hypothèse, (φ, id_M) est un morphisme entre les objets

$$(E \times_S M \xrightarrow{p_2} M, E \times_S M \xrightarrow{h \circ p_1} X)$$

et

$$(M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{p_1} M, M \times \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\tilde{l}} X)$$

où $\tilde{l}(m, g) = g * l(m), \forall m \in M, \forall g \in \mathfrak{S}_3$. Ceci signifie que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E \times_S M & \xrightarrow{\varphi} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ f \circ p_1 \downarrow & \swarrow p_1 & \\ M & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E \times_S M & \xrightarrow{\varphi} & M \times \mathfrak{S}_3 \\ h \circ p_1 \downarrow & \swarrow l \circ p_1 & \\ X & & \end{array} \quad (\text{II.1})$$

commutent.

Montrons maintenant l'égalité des deux applications. Soit $y \in M$. Alors $\varphi^{-1}(y, Id) = (z, y)$ pour un certain $z \in E$ et par commutativité du diagramme II.1, cet élément vérifie $f(z) = k(y)$ et $h(z) = l(y)$. On a donc

$$\begin{cases} f \circ p_1 \circ \varphi^{-1}(y) = f(z) = k(y) \\ h \circ p_1 \circ \varphi^{-1}(y) = h(z) = l(y) \end{cases}$$

ce qui montre que les applications sont égales. Montrons enfin que $\alpha = \varphi$. Soit $(x, y) \in E \times_S M$, alors $\varphi(x, y) = (y, \tau)$ avec $h(x) = \tau.l(y)$ et $\alpha(x, y) = (y, \sigma)$ avec $x = \sigma.p_1 \circ \varphi^{-1}$ d'où

$$h(x) = h(\sigma.p_1 \circ \varphi^{-1}(y)) = \sigma.h \circ p_1 \circ \varphi^{-1}(y) = \sigma.l(y).$$

Ceci implique $\sigma = \tau$ donc $\varphi = \alpha$ ce qui achève la preuve. \square

On veut maintenant montrer que $\mathcal{C} : \underline{X} \rightarrow [s_3 \setminus X]$ est le revêtement universel de $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$. Nous savons déjà que c'est un revêtement donc d'après le lemme II.1.30 il suffit de montrer que X est simplement connexe ce qui est clair. Ceci implique que $\mathcal{C} : \underline{X} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ est le revêtement universel de $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$. Ceci implique que le groupe fondamental de $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ est \mathfrak{S}_3 , donc que le champ des triangles admet \mathfrak{S}_3 pour groupe fondamental. Ceci montre notamment que la catégorie \mathcal{T} des triangles ne provient pas d'un espace topologique puisqu'il n'existe pas de surface topologique ayant \mathfrak{S}_3 pour groupe fondamental.

Remarque II.2.20. *La définition de groupe fondamental (dans [Noo1] and [Noo2]) est longue et compliquée. Il est possible de montrer que le champ $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ est un champ topologique. Il n'est pas clair cependant que dans ce cas notre définition naïve coïncide avec les définitions données dans les articles de Noohi.*

Une version algébrique du champ des triangles

On peut envisager une définition algébrique d'un triangle. On définit maintenant un triangle comme la donnée d'un triplet non ordonné $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On pose

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \sum_i x_i = 0\}$$

sur lequel \mathfrak{S}_3 agit de manière claire.

Définition II.2.21. *Une famille de triangles paramétrés par un schéma de type fini, muni de la topologie étale, est une paire $(E \xrightarrow{f} M, \tau)$ où f est un morphisme étale fini de degré 3 et τ est une fonction régulière sur E telle que*

$$\forall m \in |M| \mid \{e \in E(\mathbb{C}), f(e) = m\} = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ et } \sum_i \tau(e_i) = 0.$$

On définit maintenant la catégorie \mathcal{T} des triangles dont les objets sont les familles de triangles paramétrées par un schéma et un morphisme entre deux objets $(E \xrightarrow{f} M, \tau)$ et $(E' \xrightarrow{f'} M', \tau')$ sont les paires (φ, ψ) de morphismes tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{\psi} & M' \end{array}$$

soit cartésien et $(E \rightarrow E' \rightarrow \mathbb{A}^i d_{\mathbb{C}}) = (E \rightarrow \mathbb{A}^i d_{\mathbb{C}})$. On montre comme précédemment que la catégorie \mathcal{T} est équivalente à la catégorie $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ puis que c'est un champ au dessus de $Sch_{\mathbb{C}}$, la catégorie des schémas de type fini munis de la topologie étale. Comme précédemment, on montre que le foncteur canonique $\underline{X} \rightarrow [\mathfrak{S}_3 \setminus X]$ est le revêtement universel de $[\mathfrak{S}_3 \setminus X]$.

Soit

$$\mathcal{O}(X) := \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1 + x_2 + x_3)$$

l'anneau de X . Il est munie d'une action naturelle de \mathfrak{S}_3 et les éléments invariants sont

$$\left(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1 + x_2 + x_3) \right)^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}[t_2, t_3]$$

où $t_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ et $t_3 = x_1x_2x_3$.

Le **quotient catégorique** $Y := \mathfrak{S}_3 \backslash X$ est défini par $\text{Spec}(\mathcal{O}(X)^{\mathfrak{S}_3})$. On a un morphisme de champs

$$[\mathfrak{S}_3 \backslash X] \rightarrow \underline{Y}$$

défini comme suit. Soit $(E \rightarrow M, E \rightarrow X)$ un objet de $[\mathfrak{S}_3 \backslash X]$. Alors, puisque $E \rightarrow X$ est équivariante, on obtient une application $E^{\mathfrak{S}_3} \rightarrow Y$. De plus, $E \rightarrow M$ étant un \mathfrak{S}_3 -torseur, M est isomorphe au quotient de E par l'action de \mathfrak{S}_3 , donc on obtient une application $M \rightarrow Y$ et c'est un objet de \underline{Y} .

Par ailleurs, l'application $X \rightarrow Y$ est un revêtement ramifié de groupe \mathfrak{S}_3 (ramifié en les points où les coordonnées sont égales). Ainsi, bien qu'on puisse dans ce cas définir un quotient Y de X par l'action de \mathfrak{S}_3 , ce champ n'est pas le bon champ à considérer pour comprendre les familles de triangles et nous devons à nouveau considérer le champ quotient $[\mathfrak{S}_3 \backslash X]$.

II.3 Le champ des fibrés vectoriels

Dans cette section, X désigne une courbe lisse, projective, irréductible sur \mathbb{C} , vue soit comme un schéma soit comme une variété complexe.

II.3.1 Les fibrés vectoriels en tant que $GL_n(\mathbb{C})$ -torseur

La catégorie $\text{Fib}_{n,X}$ des fibrés vectoriels au-dessus de la catégorie $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$ des schémas au-dessus de \mathbb{C} ou au-dessus de la catégorie $\text{Var}_{\mathbb{C}}$ des variétés complexes. Un objet est un fibré vectoriel (géométrique) $V \xrightarrow{p} X \times_{\mathbb{C}} T$ de rang n au-dessus du produit $X \times_{\mathbb{C}} T$ (où on écrit $X \times_{\mathbb{C}} T$ au lieu de $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{C})} T$). Par ceci, on entend la donnée d'un recouvrement $\{T_i\}$ de T et des isomorphismes $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ avec $U_i := X \times_{\mathbb{C}} T_i$ tels que

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{C}^n \\ p \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U_i & & \end{array}$$

est commutatif, où p_1 désigne la première projection. De plus, pour $u \in U_i \cap U_j$ et $c \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u, c) = (u, \psi_{ij}(u, c)).$$

et ψ_{ij} est linéaire en c . Un morphisme est donnée par une paire de morphismes $f : T_1 \rightarrow T_2$ et $V_1 \rightarrow V_2$ tels que le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_{\mathbb{C}} T_1 & \xrightarrow{\text{Id} \times f} & X \times_{\mathbb{C}} T_2 \end{array}$$

et tels que $V_1 \rightarrow V_2$ est linéaire aux fibres. Le foncteur $\text{Fib}_{n,X} \rightarrow \text{Sch}$ est donné par $O : (V \rightarrow X \times_{\mathbb{C}} T) \mapsto T$.

Lemme II.3.1. *Si $X = \{*\}$, la catégorie fibrée $\text{Fib}_{n,X}$ est équivalente à la catégorie quotient $[GL_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}]$ et c'est donc un champ au-dessus de $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. On doit montrer que ces deux catégories fibrées sont équivalentes. Étant donné un fibré vectoriel $f : V \rightarrow T$ de rang n , on sait qu'il existe un recouvrement $\{T_i\}$ de T et des isomorphismes $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ avec $U_i := X \times_{\mathbb{C}} T_i$ tels que

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{C}^n \\ p \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U_i & & \end{array}$$

commute. De plus, pour $u \in U_i \cap U_j$ et $c \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(u, c) = (u, \psi_{ij}(u, c)).$$

Le fibré vectoriel est déterminé par les 1-cocycles $\{\psi_{ij}\}$ qui peuvent être vus comme des fonctions

$$\alpha_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n)$$

définies par $\alpha_{ij}(u) = \psi_{ij}(u, -)$. On considère maintenant $U_i \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout i et on les recolle en utilisant les cocycles α_{ij} . On obtient une application $E \rightarrow T$ qui est localement isomorphe à $U_i \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus, on a une action de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ (disons par translation) sur chaque produit $U_i \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et puisque les cocycles sont compatibles avec cette action, on obtient une action globale sur E , donc E est un $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -torseur.

Réciproquement, on se donne un $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -torseur $p: E \rightarrow T$. On sait qu'il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de T et des isomorphismes ϕ_i tels que $\phi_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Comme avant, on a des fonctions cocycles sur les intersections données par

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u, g) = (u, \theta_{ij}(u, g)), \forall u \in U_i \cap U_j, \forall g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

et en écrivant $\theta_{ij}(u, g) = g\alpha_{ij}(u, g)$, on obtient un cocycle à valeur dans $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (et plus dans $\text{Aut}(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$). On remarque maintenant que la donnée du recouvrement $\{U_i\}$ et des cocycles $\{\alpha_{ij}\}$ détermine un fibré vectoriel et ceci achève la preuve de la construction inverse. L'équivalence entre les catégories est une équivalence de catégories fibrées en groupoïdes car elle respecte les foncteurs oubliés. \square

Cette équivalence de catégories nous donne la valeur $-n^2$ pour la dimension dans ce cas.

Remarque II.3.2. *Le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne ici le groupe algébrique (et pas ses \mathbb{C} -points).*

Pour le cas général, on va travailler avec les faisceaux.

II.3.2 Le point de vue faisceautique

On considère la catégorie notée $\text{Bun}_{n,X}$ dont les objets sont les faisceaux de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}$ -modules localement libres de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} T$, où T est un schéma sur \mathbb{C} . Un morphisme de \mathcal{V}_1 vers \mathcal{V}_2 , où \mathcal{V}_i est défini sur $X \times_{\mathbb{C}} T_i$, $i = 1, 2$ est la donnée d'un morphisme $f: T_1 \rightarrow T_2$ et d'un isomorphisme $\varphi: \mathcal{V}_1 \xrightarrow{\sim} (Id \times f)^* \mathcal{V}_2$, où $Id \times f$ est l'application de $X \times_{\mathbb{C}} T_1$ vers $X \times_{\mathbb{C}} T_2$ valant l'identité sur X .

On sait ([GD] ou [Sha2]) que l'on a une équivalence de catégories entre $\text{Fib}_{n,X}$ et $\text{Bun}_{n,X}$. À partir de maintenant, sauf mention explicite du contraire, on appelle fibré vectoriel un faisceau de \mathcal{O}_X -module localement libre. On veut montrer la structure de

champ lorsque l'on considère les objets en tant que faisceaux et pas en tant que fibrés géométriques $V \rightarrow N$ comme ci-dessus. Les résultats qui suivent sont valables que l'on travaille avec la topologie de Zariski ou la topologie étale. On ne précise donc pas avec quelle topologie nous travaillons.

Lemme II.3.3. *La catégorie $Bun_{n,X}$ est fibrée en groupoïdes au-dessus de la catégorie $Sch_{\mathbb{C}}$ des schémas.*

Démonstration. On se donne $f : T \rightarrow S$ et un faisceau \mathcal{V} sur S et on veut montrer qu'il existe \mathcal{M} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ et un morphisme au-dessus de f entre ces deux objets. On pose $\mathcal{M} := (Id \times f)^* \mathcal{V}$. L'isomorphisme est alors l'identité et on a bien la première propriété. On suppose maintenant que l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ g \downarrow & \searrow h & \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

où U, T, S sont des schémas au-dessus de \mathbb{C} et on se donne trois faisceaux $\mathcal{V}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ respectivement sur $X \times_{\mathbb{C}} T, X \times_{\mathbb{C}} S$ et $X \times_{\mathbb{C}} U$. On suppose que l'on a des isomorphismes $\varphi : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} (Id \times f)^* \mathcal{M}$ et $\eta : \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} (Id \times h)^* \mathcal{M}$ et on veut trouver un isomorphisme $\gamma : \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} (Id \times g)^* \mathcal{V}$. Par hypothèse, on a

$$(Id \times h)^* \mathcal{M} \simeq (Id \times g)^* (Id \times f)^* \mathcal{M}$$

donc $(Id \times g)^*$ donne un isomorphisme entre $(Id \times g)^* \mathcal{V}$ et

$$(Id \times g)^* (Id \times f)^* \mathcal{M} \simeq (Id \times h)^* \mathcal{M}.$$

Posons $\gamma := (Id \times g)^* (\varphi)^{-1} \circ \eta$, on a alors le résultat souhaité donc $Bun_{n,X}$ est bien une catégorie fibrée en groupoïdes. \square

Proposition II.3.4. *La catégorie $Bun_{n,X}$ est un préchamp au-dessus de \mathcal{S} .*

Démonstration. On se fixe un schéma T et deux faisceaux $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. On se donne une famille couvrante $i_{\alpha} : T_{\alpha} \rightarrow T$ et on veut montrer que la suite suivante est exacte

$$Isom_{Bun_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T) \rightarrow \prod_{\alpha} Isom_{Bun_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} Isom_{Bun_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T_{\alpha} \times_T T_{\beta})$$

Notations :

On pose $Z := X \times_{\mathbb{C}} T$ et $Y := X \times_{\mathbb{C}} \sqcup_{\alpha} T_{\alpha}$. On a une application $i : Y \rightarrow Z$ qui est un recouvrement de Z et on note $q : Y \times_Z Y \rightarrow Z$ l'application naturelle. On note Bun_Y l'ensemble des objets de $Bun_{n,X}$ qui sont au-dessus de $\sqcup_{\alpha} T_{\alpha}$ et Bun_Z l'ensemble

des objets au-dessus de T (ou en d'autres termes, respectivement les fibrés vectoriels de rang n sur Y et Z).

On a

$$\prod_{\alpha} \text{Isom}_{\text{Bun}_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T_{\alpha}) \simeq \text{Isom}_{\text{Bun}_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T')$$

et

$$\prod_{\alpha, \beta} \text{Isom}_{\text{Bun}_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T_{\alpha} \times_T T_{\beta}) \simeq \text{Isom}_{\text{Bun}_{n,X}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)(T' \times_T T')$$

il nous suffit donc de montrer que la suite d'ensemble suivante est exacte :

$$\text{Mor}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \rightarrow \text{Mor}(i^*\mathcal{V}_1, i^*\mathcal{V}_2) \rightrightarrows \text{Mor}(q^*\mathcal{V}_1, q^*\mathcal{V}_2) \quad (\text{II.2})$$

Supposons que l'on ait la propriété suivante :

Lemme II.3.5. *Soient Z, Y comme définis précédemment. Pour tout faisceau localement libre \mathcal{F} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ il existe un recouvrement ouvert de $X \times_{\mathbb{C}} T$ tel que pour tout ouvert U de ce recouvrement la suite*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{id \otimes 1} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightrightarrows \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$$

est exacte, où les deux applications

$$s_1, s_2 : \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$$

sont données respectivement par $a \otimes b \mapsto a \otimes b \otimes 1$ et $a \otimes b \mapsto a \otimes 1 \otimes b$.

On se donne un recouvrement de $X \times_{\mathbb{C}} T$ pour lequel le lemme II.3.5 est satisfait pour \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 . Soit un morphisme φ de $i^*\mathcal{V}_1 \rightarrow i^*\mathcal{V}_2$ dans Bun_Y (donc un isomorphisme) tel que $p_1^* \circ i^*(\varphi) = p_2^* \circ i^*(\varphi)$. Alors pour tout ouvert U du recouvrement choisi, on a des morphismes locaux $\varphi(i^{-1}(U))$ qui coïncident sur le produit $i^{-1}(U) \times_U i^{-1}(U)$. Par la théorie de la descente (cf [BLR] et [Gro1]), on sait que pour tout U , le morphisme $\varphi(i^{-1}(U))$ provient d'un morphisme $\psi(U) : \mathcal{V}_1(U) \rightarrow \mathcal{V}_2(U)$ c'est-à-dire

$$\varphi(i^{-1}(U)) = \psi(U) \otimes id_{\mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))} : \mathcal{V}_1(U) \otimes \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)).$$

Le morphisme φ étant un morphisme de faisceaux, il est déterminé par les morphismes locaux $\{\varphi(U)\}$ et des fonctions de transitions λ_{UV} . On voit facilement que ces dernières définissent des fonctions de transition qui permettent de conclure que l'on a un morphisme de faisceaux ψ vérifiant $i^*\psi = \varphi$. Il reste à montrer que ce morphisme est un isomorphisme. Par hypothèse, φ est un isomorphisme, on peut donc faire le même travail pour φ^{-1} et on obtient un morphisme $\psi' : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1$ tel que $i^*\psi' = \varphi^{-1}$. On a $\varphi(U) \circ \varphi^{-1}(U) = Id = \psi(U) \circ \tilde{\psi}(U) \otimes Id$ et $\varphi^{-1}(U) \circ \varphi(U) = Id = \tilde{\psi}(U) \circ \psi(U) \otimes Id$ donc ψ est un isomorphisme.

On a donc montré la structure de préchamp en supposant le lemme II.3.5. Il nous reste donc à prouver ce dernier. On remarque que l'application $i : Y \rightarrow Z$ est fidèlement plate donc l'application $\mathcal{O}_Z(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$ est fidèlement plate de présentation finie (fppf) pour tout ouvert U ce qui implique que la suite

$$\mathcal{O}_Z(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightrightarrows \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$$

est exacte. En se plaçant sur U suffisamment petit pour que \mathcal{F} soit trivialisé, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_Z(U)$ -module plat donc on conserve l'exactitude et on obtient le résultat souhaité. Ceci achève la preuve que la catégorie $\text{Bun}_{n,X}$ est un préchamp. \square

On suppose maintenant que l'on travaille avec la topologie de Zariski. Nous allons donner une preuve de la structure de préchamp par le chemin des écoliers, c'est-à-dire sans utiliser la théorie de la descente. On se donne un recouvrement de $X \times_{\mathbb{C}} T$ pour lequel on a

$$\mathcal{V}_2(U) \rightarrow \mathcal{V}_2(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightrightarrows \mathcal{V}_2 \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \quad (\text{II.3})$$

pour tous ses ouverts U . Un tel recouvrement existe d'après le lemme II.3.5.

On va tout d'abord montrer que l'injectivité de i dans la suite II.2 découle de l'injectivité de $Id \otimes 1$ dans l'équation II.3. On se donne donc deux morphismes $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Mor}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ alors pour tout ouvert U du recouvrement choisi et pour $j = 1, 2$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1(U) & \xrightarrow{\varphi_j(U)} & \mathcal{V}_2(U) \\ \text{Id} \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \text{Id} \otimes 1 \\ \mathcal{V}_1(U) \otimes \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) & \xrightarrow{i^* \varphi_j(i^{-1}(U))} & \mathcal{V}_2(U) \otimes \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \end{array} \quad (\text{II.4})$$

Soit $s \in \mathcal{V}_1(U)$ alors $s \otimes 1 \in \mathcal{V}_1(U) \otimes \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$ et par hypothèse

$$i^* \varphi_1(s \otimes 1) = i^* \varphi_2(s \otimes 1).$$

Montrons que $\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$. Par commutativité du diagramme II.4, on a

$$i^* \varphi_j(s \otimes 1) = \varphi_j(s) \otimes 1, j = 1, 2$$

ce qui implique $\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$ par injectivité de $Id \otimes 1 : \mathcal{V}_2(U) \rightarrow \mathcal{V}_2(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$ d'où $\varphi_1(U) = \varphi_2(U)$ pour tout ouvert du recouvrement donc $\varphi_1 = \varphi_2$.

On se donne maintenant un morphisme $\varphi : i^* \mathcal{V}_1 \rightarrow i^* \mathcal{V}_2$ dans Bun_Y tel que $p_1^* \varphi = p_2^* \varphi$ et

on veut montrer qu'il provient d'un morphisme entre \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 dans Bun_Z . Soit $a \in \mathcal{V}_1(U)$, alors

$$s_1(a \otimes 1) = a \otimes 1 \otimes 1 = s_2(a \otimes 1)$$

donc $p_1^* \varphi(s_1(a \otimes 1)) = p_2^* \varphi(s_2(a \otimes 1))$. Par commutativité du diagramme II.4, on a

$$s_1 \circ \varphi(a \otimes 1) = s_2 \circ \varphi(a \otimes 1)$$

et l'exactitude de la suite II.3 nous donne l'existence d'un élément $\tilde{a} \in \mathcal{V}_2(U)$ tel que $\varphi(a \otimes 1) = \tilde{a} \otimes 1$. On pose $\psi(a) = \tilde{a}$. Il reste à vérifier que l'on définit bien un $\mathcal{O}_Z(U)$ -morphisme $\psi(U)$ ce qui découle du fait que $\varphi(U)$ est un $\mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$ -morphisme. De la même manière que précédemment, on montre que les $\{\psi(U)\}$ se recollent en un morphisme de faisceau qui est en réalité un isomorphisme. Ceci achève de montrer que $\text{Bun}_{n,X}$ est un préchamp.

On revient maintenant au cas général et on suppose que l'on travaille avec une topologie qui peut être celle de Zariski ou la topologie étale. On veut maintenant montrer que la catégorie satisfait le deuxième axiome des champs.

Proposition II.3.6. *La catégorie $\text{Bun}_{n,X}$ est un champ au-dessus de $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. On commence par réécrire le deuxième axiome des champs. Soit T un schéma et on considère une famille couvrante $T_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} T$. On note comme précédemment $Z = X \times_{\mathbb{C}} T$ et $Y = X \times_{\mathbb{C}} \sqcup T_\alpha$. On a deux applications $i : Y \rightarrow Z$ et $q : Y \times_Z Y \rightarrow Z$. Rappelons le premier axiome :

Étant donné une collection d'objets locaux \mathcal{F}_α et des isomorphismes $\varphi_{\alpha\beta}$ satisfaisant la condition de cocycle, alors il existe un objet \mathcal{G} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ et des isomorphismes $\lambda_\alpha : i_\alpha^ \mathcal{G} \simeq \mathcal{F}_\alpha$ qui coïncident sur les intersections. Cela se traduit avec les notations précédentes par :*

Soit un objet \mathcal{F} sur Y et un isomorphisme $\varphi : p_1^* \mathcal{F} \simeq p_2^* \mathcal{F}$ (sur $Y \times_Z Y$) satisfaisant $p_{13}^* \varphi = p_{23}^* \varphi \circ p_{12}^* \varphi$, où on note p_i , respectivement p_{ij} , les projections naturelles $Y \times_Z Y \rightarrow Y$, respectivement $Y \times_Z Y \times_Z Y \rightarrow Y \times_Z Y$. Alors il existe un objet \mathcal{G} sur Z et un isomorphisme $\lambda : i^* \mathcal{G} \simeq \mathcal{F}$ tel que $\varphi \circ p_1^* \lambda = p_2^* \lambda$ c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p_1^* i^* \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & p_2^* i^* \mathcal{G} \\ p_1^*(\lambda) \downarrow & & \downarrow p_2^*(\lambda) \\ p_1^* \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & p_2^* \mathcal{F} \end{array}$$

Comme précédemment, on se place sur un ouvert U d'une trivialisaton de \mathcal{F} et on traduit en termes de modules les données que nous avons. On note $A := \mathcal{O}_Z(i(U))$, $B := \mathcal{O}_Y(U)$ et $M := \mathcal{F}(U)$. On définit deux B -modules $M_1 = M \otimes_B B \otimes_A B$ et $M_2 = M \otimes_B B \otimes_A B$, construit en utilisant les deux structures de B -module de $B \otimes_A B$, données respectivement par $b \mapsto b \otimes 1$ et $b \mapsto 1 \otimes b$. L'isomorphisme local $\varphi(U \times_{i(U)} U)$ est alors un morphisme de $B \otimes_A B$ -modules. Par la théorie de la descente, on sait qu'il existe un A -module N et un

isomorphisme $\alpha : N \otimes_A B \rightarrow M$ compatible avec $\varphi(U \times_{i(U)} U)$ (ce qui signifie exactement que le morphisme vérifie la propriété de compatibilité sur les doubles intersections). Il reste à montrer que l'on peut recoller les modules locaux obtenus par ce biais pour obtenir un faisceau de \mathcal{O}_Z -module or ceci se fait comme précédemment en utilisant les fonctions de transitions de \mathcal{F} . Ceci achève de montrer la proposition. \square

II.3.3 $\text{Pic}^d X$ et $\text{Bun}_{1,X}^d$

On rappelle que la variété de Picard $\text{Pic} X$ peut être définie en considérant le foncteur suivant :

$$\text{Pic}_X(T) = \{\text{fibrés en droite sur } X \times_{\mathbb{C}} T\} / p_2^* \{\text{fibrés en droite sur } T\}$$

où $p_2 : X \times_{\mathbb{C}} T \rightarrow T$ désigne la deuxième projection. Ce quotient signifie que $\text{Pic}_X T$ est l'ensemble des classes d'équivalence $[\mathcal{L}]$ de fibrés en droite pour la relation d'équivalence suivante :

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \iff \text{il existe un fibré en droite } \mathcal{M} \text{ sur } T \text{ tel que } \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \otimes p_2^* \mathcal{M}$$

Ce foncteur est représentable par la variété de Picard. Par représentabilité du foncteur, chaque classe $[\mathcal{L}]$ peut être identifiée à une application $T \rightarrow \text{Pic} X$.

La variété de Picard peut également être définie en rigidifiant les fibrés en droites. Plus précisément, on se donne un point rationnel P_0 de X , on note $i_{P_0} : T \rightarrow X \times_{\mathbb{C}} T$ l'inclusion donnée par $t \mapsto (P_0, t)$. On considère le foncteur suivant de $\text{Sch}_{\mathbb{C}}$ vers Ens :

$$\mathcal{P}(T) = \{(\mathcal{L}, \varphi), \mathcal{L} \text{ fibrés en droite sur } X \times_{\mathbb{C}} T, \varphi : \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} i_{P_0}^* \mathcal{L}\} / \sim.$$

où l'équivalence est définie comme suit :

Définition II.3.7. Deux éléments (\mathcal{L}, φ) et (\mathcal{L}', φ') sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\psi : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_T & & \\ \varphi \downarrow & \searrow \varphi' & \\ \mathcal{L}|_{\{P_0\} \times T} & \xrightarrow{i_{P_0}^* \psi} & \mathcal{L}'|_{\{P_0\} \times T} \end{array}$$

On note $[\mathcal{L}, \varphi]$ la classe d'équivalence contenant (\mathcal{L}, φ) . On peut montrer que $\mathcal{P}(T)$ est en bijection avec $\text{Pic}_X(T)$. Cette bijection est obtenue en envoyant un élément $[\mathcal{L}, \varphi]$ sur $[\mathcal{L}]$. Elle est clairement bien définie puisque si on a $[\mathcal{L}, \varphi] = [\mathcal{L}', \varphi']$, alors il existe par hypothèse un isomorphisme ψ entre les deux fibrés en droite sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ et cela

signifie exactement $[\mathcal{L}] = [\mathcal{L}']$. Montrons maintenant que l'application est surjective. On considère un fibré en droite \mathcal{L} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. On sait que $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}|_{T \times \{P\}}$ est un fibré en droite sur T donc il est inversible. On pose $\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes (p_1^* \mathcal{L}_0)^{-1}$. On a alors $\tilde{\mathcal{L}}|_{T \times \{P_0\}} = \mathcal{L}|_{T \times \{P_0\}} \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ ce qui est canoniquement isomorphe à \mathcal{O}_T . On note *can* cet isomorphisme et le couple $(\tilde{\mathcal{L}}, \text{can})$ est alors un élément de $\mathcal{P}(T)$ qui s'envoie sur $[\mathcal{L}]$ donc l'application est bien surjective. Il nous reste donc seulement à montrer qu'elle est injective. Comme les deux ensemble sont des groupes pour le produit tensoriel et que l'application respecte la loi de groupe, il suffit de montrer que si $[\mathcal{L}, \varphi]$ est envoyé sur $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}$ alors $[\mathcal{L}, \varphi] = [\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}, \text{id}]$. Supposons que l'on a $[\mathcal{L}] = [\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}]$, alors il existe un fibré en droite \mathcal{M} sur T tel que $\mathcal{L} = p_2^* \mathcal{M}$ mais dans ce cas $\mathcal{L}|_{\{P_0\} \times T} = \mathcal{M}$ et via φ , \mathcal{M} est isomorphe à \mathcal{O}_T . Le faisceau \mathcal{L} est par conséquent isomorphe à $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}$ (par $p_2^*(\varphi)^{-1}$) et ceci montre que l'on a $[\mathcal{L}, \varphi] \sim [\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}, \text{id}]$, où l'équivalence est donnée par l'isomorphisme $p_2^*(\varphi)^{-1}$.

On a un foncteur analogue en fixant les degrés :

$$Pic_X^d(T) = \{\text{fibrés en droite de degré } d \text{ sur } X \times_{\mathbb{C}} T\} / p_2^* \{\text{fibrés vectoriels sur } T\}$$

et celui lui correspondant

$$\mathcal{P}^d(T) = \{(\mathcal{L}, \varphi), \mathcal{L} \text{ fibrés en droite de degré } d \text{ sur } X \times_{\mathbb{C}} T, \varphi : \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} i_{P_0}^* \mathcal{L}\} / \sim.$$

On remarque qu'un fibré en droite sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ de degré d est un fibré en droite \mathcal{L} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ tel que pour tout $t \in |T|$, le fibré en droite $\mathcal{L}|_{X \times \{t\}}$ sur $X \times \{t\}$ est de degré d .

Remarque II.3.8. *De manière équivalente, on peut aussi définir la rigidification d'un fibré en droite comme la donnée d'un isomorphisme $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}/\mathcal{L}(-P_0)$, ce qui est un cas particulier de faisceau muni d'une structure de niveau que nous définirons plus tard.*

De manière similaire, on peut définir un foncteur de $Sch_{\mathbb{C}}$ vers Ens pour les fibrés de rang plus élevé :

$$\mathcal{B}_n^d(T) = \{(\mathcal{L}, \varphi), \mathcal{L} \text{ fibré vectoriel de rang } n \text{ sur } X \times_{\mathbb{C}} T, \deg \mathcal{L} = d \text{ et } \varphi : \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{T \times \{P\}}\}$$

Comme précédemment, le fait de fixer cet isomorphisme permet d'obtenir des objets sans automorphisme non-trivial. On voudrait pouvoir dire que ce foncteur est représentable par un schéma $Z^{n,d}$ sur \mathbb{C} de dimension $n^2 g$, où g est le genre de la courbe X . On aurait alors un foncteur oubli $\underline{Z}^{n,d} \rightarrow Bun_{n,X}^d$ donné par $(\mathcal{L}, \varphi) \mapsto \mathcal{L}$ qui devrait être un morphisme de champ. Un tel morphisme, s'il existait, éliminerait les automorphismes et ceci impliquerait que $Bun_{n,X}^d$ est le quotient de $Z^{n,d}$ par le groupe $GL_n(\mathbb{C})$, autrement dit :

$$Bun_{n,X}^d \simeq [GL_n(\mathbb{C}) \backslash Z^{n,d}]$$

Parce que la dimension d'un champ quotient est connue, on aurait alors prouvé que la dimension du champ $Bun_{n,X}^d$ est $n^2 g - n^2 = n^2(g - 1)$. Malheureusement en général,

le champ $\text{Bun}_{n,X}^d$ n'est pas équivalent à un tel quotient. On montrera toutefois dans la section II.3.5 qu'il est une réunion croissante de sous-champs quotients. De plus, quand $n = 1$, le champ $\text{Bun}_{1,X}^d$ est en fait isomorphe à $[\mathbb{G}_m \backslash \text{Pic}^d X]$ et il a donc dimension $g - 1$. Avant de prouver cette équivalence, on remarque que l'on a un foncteur oubli de $\text{Pic} X$ vers $\text{Bun}_{1,X}$ donné par $(\mathcal{L}, \varphi) \mapsto \mathcal{L}$ (on identifie ici une application $T \rightarrow \text{Pic} X$ avec un fibré en droite sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ avec rigidification en utilisant la représentabilité du foncteur \mathcal{P}). Pour montrer l'équivalence entre les champs $\text{Bun}_{1,X}^d$ et $[\mathbb{G}_m \backslash \text{Pic}^d X]$, on considère un fibré en droite \mathcal{L} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ de degré d et on veut construire un \mathbb{G}_m -torseur $E \rightarrow T$ et une application équivariante $E \rightarrow \text{Pic}^d X$. La restriction du fibré en droite \mathcal{L} à $\{P_0\} \times T$ est un fibré vectoriel, il existe donc un recouvrement ouvert $\{T_\alpha\}$ de T et des isomorphismes

$$\varphi_\alpha : \mathcal{O}_T|_{T_\alpha} \rightarrow \mathcal{L}|_{\{P_0\} \times T_\alpha}.$$

De plus, on sait que pour tout α, β , on a $\varphi_\alpha|_{T_{\alpha\beta}} = x_{\alpha\beta} \varphi_\beta|_{T_{\alpha\beta}}$, où $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \cap T_\beta$ et $x_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*$. On pose

$$E_\alpha := T_\alpha \times \mathbb{G}_m$$

et

$$E := \sqcup E_\alpha / \sim$$

où l'équivalence est donnée par

$$(t_\alpha, x_\alpha) \sim (t_\beta, x_\beta) \Leftrightarrow t_\alpha = t_\beta \in T_{\alpha\beta}, \quad x_\beta = x_\alpha x_{\alpha\beta}.$$

L'action de \mathbb{G}_m sur E est définie par

$$y \cdot \overline{(t_\alpha, x_\alpha)} = \overline{(t_\alpha, x_\alpha y)}.$$

On montre facilement que ceci définit une action globale sur E . En effet, si on a l'égalité $\overline{(t_\alpha, x_\alpha)} = \overline{(t_\beta, x_\beta)}$ alors $t_\alpha = t_\beta = t$ et $x_\alpha x_{\alpha\beta} = x_\beta$ et on a clairement $\overline{(t, x_\alpha y)} = \overline{(t, x_\beta y)}$. De plus, l'application $E \rightarrow T$ est un \mathbb{G}_m -torseur.

Nous devons maintenant définir une application équivariante $E \rightarrow \text{Pic} X$. On remarque que le groupe \mathbb{G}_m agit sur les couples (\mathcal{L}, φ) par $(\mathcal{L}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{L}, \varphi \circ g)$, $\forall g \in \mathbb{G}_m$. On définit une application $E \rightarrow \text{Pic} X$ en envoyant un élément $(t_\alpha, x_\alpha) \in E_\alpha$ sur $(\mathcal{L}|_{X \times \{t_\alpha\}}, x_\alpha \varphi_\alpha|_{\{t_\alpha\}})$. Il est clair que $\mathcal{L}|_{X \times \{t_\alpha\}}$ peut être identifié à un fibré en droite sur X (de degré d). De plus, la restriction

$$x_\alpha \varphi_\alpha|_{\{t_\alpha\}} : \mathcal{O}_T|_{\{t_\alpha\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{\{P_0\} \times \{t_\alpha\}}$$

donne la rigidification du fibré en droite $\mathcal{L}|_{X \times \{t_\alpha\}}$ et le couple $(\mathcal{L}|_{X \times \{t_\alpha\}}, x_\alpha \varphi_\alpha|_{\{t_\alpha\}})$ est donc un élément de $\text{Pic}^d X$. Par définition de E , l'application ainsi construite est bien définie et elle est clairement équivariante. Nous avons donc associé à chaque fibré en droite sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ un objet de $[\mathbb{G}_m \backslash \text{Pic} X]$. Réciproquement, on se donne un objet $(E \xrightarrow{g} T, E \xrightarrow{h} \text{Pic} X)$ de $[\mathbb{G}_m \backslash \text{Pic} X]$. Par hypothèse, il existe un recouvrement $\{T_\alpha\}$ de T et des

isomorphismes $\varphi_\alpha : g^{-1}(T_\alpha) \xrightarrow{\sim} T_\alpha \times \mathbb{G}_m$. En identifiant T_α à $T_\alpha \times \{Id\}$, on obtient des morphismes

$$h_\alpha : T_\alpha \rightarrow \text{Pic}X, t \mapsto h \circ \varphi_\alpha^{-1}(t_\alpha, Id).$$

Par représentabilité du foncteur Pic_X , chacun d'eux correspond à un fibré en droite \mathcal{L}_α sur $X \times_{\mathbb{C}} T_\alpha$, défini par $\mathcal{L}_\alpha := (Id \times h_\alpha)^*\mathcal{U}$, où \mathcal{U} est le fibré en droite universel sur $X \times \text{Pic}X$. On obtient un fibré en droite \mathcal{L} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ puisque les fibrés \mathcal{L}_α coïncident sur les intersections et c'est cet objet de $\text{Bun}_{1,X}$ que l'on associe à $(E \xrightarrow{g} T, E \xrightarrow{h} \text{Pic}X)$.

Observons aussi que le champ $\text{Bun}_{1,X}$ peut être obtenu comme produit de deux champs. En effet, il est équivalent au champ produit $\underline{\text{Pic}X} \times [\mathbb{G}_m \setminus \{*\}]$. Soit \mathcal{U} le fibré en droite universel sur $X \times \text{Pic}X$. On considère un fibré en droite \mathcal{L} sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. Alors par représentabilité du foncteur Pic_X , il correspond à une unique application $f : T \rightarrow \text{Pic}X$ et on a $(Id \times f)^*\mathcal{U} \simeq \mathcal{L}$. Ceci signifie qu'il existe un unique fibré en droite \mathcal{M} sur T tel que $(Id \times f)^*\mathcal{U} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}} \mathcal{L}^{-1}$ soit isomorphe à $pr_2^*\mathcal{M}$. Le foncteur défini par $\mathcal{L} \mapsto (f, (\mathcal{M}, T))$ donne un isomorphisme de champs. Comme le champ $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}]$ est de dimension -1 , on obtient à nouveau que la dimension de $\text{Bun}_{1,X}$ est $g - 1$.

En utilisant l'identification précédente, on peut transférer la solution au problème de Langlands géométrique (pour le groupe GL_1) obtenue sur l'espace de modules $\text{Pic}X$ à une solution sur le champ $\text{Bun}_{1,X}$. On montre ceci dans la section III.1.

Observation : Interlude topologique

Au dessus d'une catégorie d'espaces topologiques adaptés, il existe une construction topologique qui peut être vue comme la réalisation du champ $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}]$. C'est ce que l'on appelle l'espace classifiant $B\mathbb{G}_m$, qui contient un fibré en droite universel $E\mathbb{G}_m \rightarrow B\mathbb{G}_m$. Tout couple (T, \mathcal{L}) est le pullback de ce fibré en droite universel par une application $T \rightarrow B\mathbb{G}_m$. Il est connu que l'espace $B\mathbb{G}_m$ (avec \mathbb{C} pour corps de base) est la variété projective au-dessus de \mathbb{C} de dimension infinie et le fibré en droite universel est égal au faisceau standard $\mathcal{O}(1)$. Cet espace projectif de dimension infinie peut être obtenu comme $(H \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, où H est un espace de Hilbert possédant une base orthonormale dénombrable. Les groupes de cohomologie $H^*(B\mathbb{G}_m, \mathbb{C})$ peuvent se calculer et on trouve, comme dans le cas de la dimension finie, que $H^i(B\mathbb{G}_m, \mathbb{C})$ est égal à \mathbb{C} pour i pair et zéro pour i impair. Dans cet interlude, \mathbb{G}_m est considéré comme un groupe topologique donc pour être tout à fait correct, on aurait dû écrire $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ au lieu de \mathbb{G}_m .

II.3.4 Quelques propriétés de $\text{Bun}_{n,X}$.

On utilise ici les notes de [Fal]. On commence par rappeler la définition de schéma lisse.

Définition II.3.9. *On se donne une \mathbb{C} -algèbre A , un idéal $I \subset A$ satisfaisant $I^2 = 0$ et un \mathbb{C} -morphisme $\phi_0 : \text{Spec}(A/I) \rightarrow S$. Alors le schéma S est **lisse** s'il existe un \mathbb{C} -*

morphisme $\phi : \text{Spec}(A) \rightarrow S$, qui étend ϕ_0 et si ce résultat est valable pour tout I, A et ϕ_0 comme ci-dessus.

On adopte la définition suivante de lissité pour les champs

Définition II.3.10. On se donne une \mathbb{C} -algèbre A , un idéal $I \subset A$ satisfaisant $I^2 = 0$ et un morphisme de champs $\phi_0 : \text{Spec}(A/I) \rightarrow \mathcal{C}$. Le champ \mathcal{C} est dit **lisse** s'il existe un morphisme de champs $\phi : \underline{\text{Spec}(A)} \rightarrow \mathcal{C}$ qui étend ϕ_0 et si ceci est valable pour tout I, A et ϕ_0 .

Comme précédemment, X est une courbe lisse, projective et irréductible sur \mathbb{C} (mais la plupart de ce qui suit est aussi valide au-dessus d'un corps de base k quelconque). On note $\text{Bun}_{n,X}^d$ le sous-champ de $\text{Bun}_{n,X}$ des fibrés vectoriels de degré d . On a $\text{Bun}_{n,X} = \sqcup \text{Bun}_{n,X}^d$ et chaque composante est lisse et connexe.

Proposition II.3.11. $\text{Bun}_{n,X}^d$ est lisse au-dessus de \mathbb{C} .

Ébauche de la preuve. On se donne une \mathbb{C} -algèbre A et un idéal comme ci-dessus, avec un morphisme de champs $\phi_0 : \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Bun}_{n,X}$. Un tel morphisme est déterminé par l'image de l'application identité. $\text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec}(A/I)$, qui est un fibré vectoriel \mathcal{L} sur $\text{Spec}(A/I) \times X$ de rang n et de degré d . On doit construire un fibré vectoriel \mathcal{M} sur $\text{Spec}(A) \times X$ qui induise \mathcal{L} sur le sous-schémas fermés $\text{Spec}(A/I) \times X$. On choisit un recouvrement $\{U_i\}$ d'ouverts affines de Zariski de $\text{Spec}(A/I) \times X$ qui trivialise \mathcal{L} . Alors le faisceau \mathcal{L} est donné par un 1-cocycle $\{c_{i,j}\}$ pour $GL_n(\mathcal{O}_0)$ par rapport à ce recouvrement $\{U_i\}$, où \mathcal{O}_0 désigne le faisceau structural de $\text{Spec}(A/I) \times X$. On observe que $\{U_i\}$ est aussi un recouvrement ouvert affine de Zariski de $\text{Spec}(A) \times X$. De plus, il existe des éléments $\{c'_{i,j}\}$ dans $GL_n(\mathcal{O})$, où \mathcal{O} est le faisceau structural de $\text{Spec}(A) \times X$, tels que $c'_{i,j}$ s'envoie sur $c_{i,j}$. A priori, $\{c'_{i,j}\}$ n'est pas un 1-cocycle mais nous allons montrer qu'il peut être choisi comme tel. Pour cela, on introduit le faisceau d'idéal $\mathcal{I} := I\mathcal{O}$. On a alors la suite exacte longue de faisceaux suivantes

$$0 \rightarrow \text{Mat}_n(\mathcal{I}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathcal{O}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathcal{O}_0) \rightarrow 0$$

où l'application de $\text{Mat}_n(\mathcal{I})$ vers $\text{GL}_n(\mathcal{O})$ est donnée par $M \mapsto Id + M$. Ceci nous donne une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^1(\text{Spec}(A) \times X, \text{GL}_n(\mathcal{O})) &\rightarrow H^1(\text{Spec}(A/I) \times X, \text{GL}_n(\mathcal{O}_0)) \\ &\rightarrow H^2(\text{Spec}(A) \times X, \text{Mat}_n(\mathcal{I})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver que $H^2(\text{Spec}(A) \times X, \mathcal{I})$ est trivial. Pour cela, on écrit X comme réunion $X_1 \cup X_2$ de deux ouverts affines de Zariski. Alors $\text{Spec}(A) \times X$ est la réunion d'espaces affines ouverts $\text{Spec}(A) \times X_i$, $i = 1, 2$. De plus, $\text{Spec}(A) \times X_i$, $i = 1, 2$ est affine. Il s'ensuit que pour tout faisceau cohérent, le H^2 est trivial. En

particulier, c'est le cas du \check{H}^2 du faisceaux des matrices $n \times n$ à coefficient dans \mathcal{I} (puisque H^2 et \check{H}^2 coïncident). Ceci implique que l'application $H^1(\text{Spec}(A) \times X, \text{GL}_n(\mathcal{O})) \rightarrow H^1(\text{Spec}(A/I) \times X, \text{GL}_n(\mathcal{O}_0))$ est surjective et donc $\{c'_{i,j}\}$ peut être remplacé par un 1-cocycle $\{c''_{i,j}\}$ qui s'envoie sur $\{c_{i,j}\}$. Le 1-cocycle $\{c''_{i,j}\}$ ainsi que le recouvrement $\{U_i\}$ définit un fibré vectoriel \mathcal{M} sur $\text{Spec}(A) \times X$ qui satisfait la propriété requise. \square

Observations L'espace tangent de $\text{Bun}_{n,X}^d$ en un point.

Un \mathbb{C} -point de $\text{Bun}_{n,X}^d$ est un morphisme de champs $\phi_0 : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^d$. Il correspond donc à un fibré vectoriel \mathcal{L} sur X de rang n et de degré d . Comme pour les schémas sur $\text{Spec}(\mathbb{C})$ on définit l'**espace tangent au point** ϕ_0 comme l'ensemble T_{ϕ_0} des morphismes $\phi : \text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^d$ qui induisent ϕ_0 . Comme d'habitude, $\mathbb{C}[\epsilon]$ désigne $\mathbb{C}[x]/(x^2)$. On peut définir de manière abstraite la structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur T_{ϕ_0} . On va ici calculer l'espace tangent explicitement.

Un élément de l'espace tangent peut être identifié à un fibré vectoriel \mathcal{M} sur $\text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \times X$ tel que

$$i^* \mathcal{M} = i^{-1} \mathcal{M} \otimes_{i^{-1} \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \times X}} \mathcal{O}_X = \mathcal{L}$$

où $i : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \times X$. Le fibré vectoriel \mathcal{M} s'identifie au faisceau $i^{-1} \mathcal{M}$ sur X . On a la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \epsilon i^{-1} \mathcal{M} \rightarrow i^{-1} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

et puisque $\mathcal{L} = i^{-1} \mathcal{M} \otimes_{i^{-1} \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]) \times X}} \mathcal{O}_X$, la multiplication par ϵ induit une identification de \mathcal{L} à $\epsilon i^{-1} \mathcal{M}$. On obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow i^{-1} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels sur X . Réciproquement, une telle suite munit le faisceau \mathcal{M} d'une structure de fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{O}_X[\epsilon]$. L'espace tangent s'identifie donc à l'espace des classes d'équivalence d'extensions de \mathcal{L} par \mathcal{L} . Ce dernier est isomorphe au \mathbb{C} -espace vectoriel $H^1(X, \text{End}(\mathcal{L}))$. Par Riemann-Roch on a

$$\dim H^1(X, \text{End}(\mathcal{L})) = n^2(g-1) + \dim H^0(X, \text{End}(\mathcal{L})).$$

En particulier, si \mathcal{L} est irréductible, alors $\dim T_{\phi_0} = n^2(g-1) + 1$.

On observe que la dimension de l'espace tangent peut varier sur le champ lisse $\text{Bun}_{n,X}^d$, qui est connexe d'après la proposition II.3.13. Le fibré trivial de rang n (et de degré 0) sur X a un espace tangent de dimension n^2g et un fibré vectoriel de rang n et de degré 0 a un espace tangent de dimension $n^2(g-1) + 1$. Un exemple explicite est le suivant : Les \mathbb{C} -points \mathcal{O}^2 et $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ appartiennent tous les deux au champ connexe $\text{Bun}_{2,\mathbb{P}^1}^0$. Les dimensions de l'espace tangent sont respectivement 0 et 2.

Ce qui précède montre que la dimension d'un champ lisse et connexe ne peut pas être définie comme la dimension de ses espaces tangents. En fait, J. Tapia nous a dit que pour un champ lisse il est possible de montrer que la dimension du champ est égale à la caractéristique d'Euler de son complexe cotangent soit ici $\dim \text{Bun}_{n,X}^d = n^2(g-1)$ et ceci est cohérent avec la valeur que l'on trouve dans la littérature.

Définition II.3.12. Deux \mathbb{C} -points ϕ_1, ϕ_2 d'un champ \mathcal{C} au-dessus d'un site \mathcal{S} sont **reliés** s'il existe un espace connexe T (i.e un objet de \mathcal{S}), deux points $t_1, t_2 \in |T|$ et un morphisme $\phi : \underline{T} \rightarrow \mathcal{C}$ qui induit ϕ_i en t_i pour $i = 1, 2$. Plus précisément, si deux points sont donnés par $\phi_i : \underline{*} \rightarrow \mathcal{C}$, alors les objets $\phi_i(\text{id}_{\{*\}})$ et $\phi(\{t_i\} \hookrightarrow T)$ doivent être isomorphes pour $i = 1, 2$. Un champ \mathcal{C} est dit **connexe** si deux \mathbb{C} -points sont toujours reliés.

On peut comparer cette définition avec celle donnée dans l'article [Noo1], pour les champs topologiques. Dans ce dernier, la définition est similaire mais avec $T = [0, 1]$ et $t_1 = 0, t_2 = 1$. On rappelle qu'une courbe algébrique projective est connexe si et seulement si son analytification est connexe (Cf [Sha2]).

Proposition II.3.13. Le champ $\text{Bun}_{n,X}^d$ est connexe.

Démonstration. Pour $n = 1$ l'énoncé est vrai puisque la variété jacobienne $\text{Pic}^0 X$ est connexe. On suppose maintenant $n > 1$ et on considère un fibré vectoriel \mathcal{L} sur X de rang n et de degré d . Le fibré vectoriel est une extension de sous-fibrés, autrement dit, on a une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow 0$$

avec $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ des fibrés non-triviaux. La collection de ses extensions de \mathcal{L}_2 par \mathcal{L}_1 est une famille, paramétrée par l'espace vectoriel $H^1(X, \text{Hom}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1))$. Donc \mathcal{L} est relié à $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. En utilisant le cas $n = 1$, il s'ensuit que \mathcal{L} peut être relié à tout fibré vectoriel de type $\mathcal{O}_X(d_1[P_0]) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_X(d_n[P_0])$, où P_0 est un point de X , $d_i \in \mathbb{Z}$ et $\sum d_i = d$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{O}_X([P_0]) \oplus \mathcal{O}_X(-[P_0])$ peut être relié à $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. Si on travaille au-dessus de $\text{Var}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire si on se restreint au cas analytique, on peut restreindre les fibrés vectoriels de rang 2 à de petits voisinages ouverts de P_0 et la preuve est donnée dans la sous-section II.3.6 pour le cas où $X = \mathbb{P}^1$. On ne connaît pas de preuve directe dans le cas algébrique! \square

Il existe également une définition de connexité en utilisant les sous-champs ouverts et fermés, plus précisément un champ est **connexe** s'il ne contient aucun sous-champ propre ouvert et fermé. Il semble cependant qu'il soit difficile de prouver la connexité de $\text{Bun}_{n,X}$ pour cette définition sans utiliser la connexité par arcs donnée ci-dessus.

II.3.5 Sous-champs ouverts de $\text{Bun}_{n,X}^d$.

On se donne un fibré en droite ample $\mathcal{O}_X(1)$ de degré 1 sur une courbe X de genre g . Comme d'habitude, on note $\mathcal{O}_X(N)$ pour le fibré en droite défini par

$$\mathcal{O}_X(N) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(1)^{\otimes N} & \text{si } N > 0 \\ \mathcal{O}_X & \text{if } N = 0 \\ (\mathcal{O}_X(1)^{-1})^{\otimes |N|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout fibré vectoriel (ou faisceau cohérent) \mathcal{F} sur X on pose $\mathcal{F}(N) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(N)$.

Lemme II.3.14. *Il existe un entier $N = N(n, g) \geq 0$ tel que pour tout fibré vectoriel \mathcal{F} de rang n sur la courbe X , la propriété $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ implique que $H^0(X, \mathcal{F}(N))$ engendre $\mathcal{F}(N)$.*

Démonstration. Pour tout fibré vectoriel \mathcal{F} sur X , on note respectivement $h^0(\mathcal{F})$ et $h^1(\mathcal{F})$ les dimensions des espaces vectoriels $H^0(X, \mathcal{F})$ et $H^1(X, \mathcal{F})$ et $d(\mathcal{F})$, $n(\mathcal{F})$ (ou simplement n quand il n'y a pas de confusion possible) les degré et rang de \mathcal{F} . On prouve le lemme en utilisant plusieurs fois la formule de Riemann–Roch et par récurrence sur le rang n .

Un fibré en droite \mathcal{F} est engendré par ses sections globales si $d(\mathcal{F}) \geq 2g$. En effet, pour tout point $P \in |X|$ on a $d(\mathcal{F}(-P)) \geq 2g - 1$, donc par le théorème de Riemann–Roch, on a $h^0(\mathcal{F}(-P)) > 0$ et il existe donc une section globale qui ne s'annule pas en P . Ceci montre que \mathcal{F} est engendré par ses sections globales. De plus, pour tout fibré en droite \mathcal{F} , on a

$$h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F}) = 1 - g + d(\mathcal{F})$$

donc $h^1(\mathcal{F}) = 0$ implique $d(\mathcal{F}) \geq g - 1$. On peut donc poser $N(1, g) = g + 1$ puisqu'on aura alors $d(\mathcal{F}(N)) = d(\mathcal{F}) + N(1, g) \geq 2g$ chaque fois que $h^1(\mathcal{F}) = 0$.

Si $n > 1$ et $k = g - \frac{d}{n}$, alors

$$h^0(\mathcal{F}(k)) = h^1(\mathcal{F}(k)) + n(1 - g) + d + kn > 0.$$

Le faisceau $\mathcal{F}(k)$ contient donc un fibré en droite de degré positif, notons-le $\mathcal{L}_1(k)$, tel que le quotient $\mathcal{F}(k)/\mathcal{L}_1(k)$ n'ait pas de torsion. Maintenant le sous-fibré en droite \mathcal{L}_1 de \mathcal{F} est de degré

$$\text{deg}(\mathcal{L}_1) \geq -k = \frac{d}{n} - g.$$

On suppose maintenant que $n = 2$ et on pose $\mathcal{L}_2 := \mathcal{F}/\mathcal{L}_1$. Si $h^1(\mathcal{F}) = 0$, alors $h^1(\mathcal{L}_2) = 0$ d'où $d(\mathcal{L}_2) \geq g - 1$. Ceci implique

$$d(\mathcal{F}) = d(\mathcal{L}_1) + d(\mathcal{L}_2) \geq \frac{d(\mathcal{F})}{2} - g + g - 1$$

ce qui impose $d(\mathcal{F}) \geq -2$. On sait que $\mathcal{F}(N)$ est engendré par ses sections globales si c'est le cas de $\mathcal{L}_1(N)$ et $\mathcal{L}_2(N)$. L'entier $N(2, g) = 3g + 1$ a donc la propriété requise. En effet, pour cette valeur de N , on a à la fois $d(\mathcal{L}_1(N))$ et $d(\mathcal{L}_2(N))$ plus grands que $2g$, et les deux faisceaux sont donc engendrés par leurs sections globales.

On suppose $n = 3$. Soient $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{F}$ un fibré en droite de degré maximal et $\mathcal{W} = \mathcal{F}/\mathcal{L}_1$. Comme le faisceau \mathcal{W} est de rang 2, on sait que $d(\mathcal{W}) \geq -2$ et $d(\mathcal{L}_1) \geq \frac{d(\mathcal{F})}{3} - g$. On trouve ensuite

$$d(\mathcal{F}) = d(\mathcal{L}_1) + d(\mathcal{W}) \geq \frac{d(\mathcal{F})}{3} - g - 2$$

ce qui amène $d(\mathcal{F}) \geq -\frac{3g+6}{2}$. Comme avant, $\mathcal{F}(N)$ est engendré par ses sections globales si c'est le cas de $\mathcal{L}_1(N)$ et $\mathcal{W}(N)$. Ceci montre que l'on peut prendre pour $N(3, g)$ l'entier $5g + 1$. La récurrence sur n est maintenant claire. \square

On rappelle le théorème de semi-continuité de H. Grauert :

Théorème 2. *Soit \mathcal{F} un fibré vectoriel sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. On pose $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}|_{X \times \{t\}}$, alors l'ensemble des points $t \in |T|$ tels que le fibré vectoriel $\mathcal{F}|_{X \times \{t\}}$ satisfait $H^1(X, \mathcal{F}|_{X \times \{t\}}) = 0$ est un ouvert de Zariski non vide.*

(Cf [Gra1] [Gra2]).

En utilisant ce résultat, on définit un sous-champ ouvert B_r (pour $r \geq 0$) de $\text{Bun}_{n,X}^d$ qui consiste en les objets (\mathcal{V}, T) de $\text{Bun}_{n,X}^d$ tels que $H^1(X, \mathcal{V}(r)_t) = 0$ pour tout point $t \in |T|$. Montrons que c'est bien un sous-champ ouvert. Pour cela, nous allons montrer le résultat suivant :

Lemme II.3.15. *On considère un morphisme de champs $\underline{T} \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^d$. Il est déterminé par un fibré en vectoriel $(\mathcal{M}, T) \in \text{Obj}(\text{Bun}_{n,X}^d)$. Soit*

$$U := \{t \in T, H^1(X, \mathcal{M}(r)_t) = 0\}.$$

Alors le produit fibré $B_r \times_{\text{Bun}} \underline{T}$ est isomorphe à \underline{U} (par soucis de clarté, on écrit Bun au lieu de $\text{Bun}_{n,X}^d$ dans les produits fibrés). En particulier, le morphisme $B_r \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^d$ est représentable et par le théorème de Grauert, U est un ouvert de T donc B_r est un sous-champ ouvert.

Démonstration. On considère un objet $((\mathcal{V}, S), S \xrightarrow{f} T, \theta)$ de $B_r \times_{\text{Bun}} \underline{T}$. Par définition, θ est un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{V} \rightarrow f^*\mathcal{M}.$$

Il donne un isomorphisme $\theta(r) : \mathcal{V}(r) \xrightarrow{\sim} (f^*\mathcal{M})(r)$. Pour tout $s \in |S|$, on a

$$H^1(X, (f^*\mathcal{M})_s) = 0 = H^1(X, \mathcal{M}_{f(s)})$$

ce qui implique $f(S) \subset U$. Cela nous donne un morphisme $S \rightarrow U$ qui est un objet de \underline{U} et on a défini ainsi un morphisme de champs

$$B_r \times_{\text{Bun}} \underline{T} \rightarrow \underline{U}.$$

Montrons que l'on a un foncteur inverse. Supposons que l'on a un morphisme $f : S \rightarrow U$. Alors $\mathcal{V} := f^*(\mathcal{M}|_{X \times U})$ est un fibré vectoriel sur $X \times S$ et il satisfait $H^1(X, \mathcal{V}(r)_s) = 0, \forall s \in S$. Le triplet $((\mathcal{V}, S), S \rightarrow U \hookrightarrow T, Id)$ est donc un objet du produit fibré et on vérifie aisément que ceci définit un foncteur et que les deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre. \square

Le champ $\text{Bun}_{n,X}^d$ est une réunion filtrée de ces sous-champs. Le champ B_r a une structure plus simple que $\text{Bun}_{n,X}^d$ car il admet une présentation donnée par le quotient d'un schéma de type fini sur \mathbb{C} par l'action d'un groupe réductif. Dans les notes de cours de G. Faltings [Fal] on propose l'approche suivante :

En utilisant le lemme précédent, on trouve un entier r^+ tel que pour $(\mathcal{V}, T) \in B_r$ on ait $H^1(X, \mathcal{V}(r^+)_t) = 0$ et $H^0(X, \mathcal{V}(r^+)_t)$ engendre $\mathcal{V}(r^+)_t$ pour tout point $t \in |T|$. Rappelons que par abus de notations, on écrit \mathcal{V}_t au lieu de $\mathcal{V}|_{X \times \{t\}}$. Soit $p : X \times_{\mathbb{C}} T \rightarrow T$ la projection. Alors $H^0 := p_* \mathcal{V}(r^+)$ est un faisceau cohérent de \mathcal{O}_T -modules sur T (car X est projective et le morphisme p est donc propre). Pour tout point $t \in |T|$ l'espace vectoriel $H_t^0/m_t H_t^0$ (où m_t est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{T,t}$) est égal à $H^0(\{t\} \times X, \mathcal{V}(r^+))$. En effet,

$$H_t^0 = \lim_{\substack{\leftarrow \\ t \in U \subset T}} H^0(U) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ t \in U}} \mathcal{V}(r^+)(X \times U) = H^0(X \times \text{Spec}(\mathcal{O}_t), \mathcal{V}(r^+))$$

d'où

$$H_t^0/m_t = H^0(X \times \{t\}, \mathcal{V}(r^+))$$

et ce dernier est de dimension $N := n(1-g) + nr^+ + d$. Il s'ensuit que H^0 est un fibré vectoriel sur T de rang N . Après avoir remplacé T par les éléments d'un recouvrement ouvert de Zariski on obtient que H^0 est en fait un fibré vectoriel libre de rang N . On suppose maintenant que l'objet (\mathcal{V}, T) est donné avec une base de H^0 , ou en d'autres termes, avec un isomorphisme $\mathcal{O}_T^N \rightarrow H^0$ (défini en envoyant la base canonique sur la base donnée). Ceci nous amène à considérer le problème de modules pour la donnée suivante :

Les couples $(\mathcal{W}, \underline{b})$ de fibrés vectoriels de rang n et de degré d^+ sur X muni d'une base \underline{b} de $H^0(X, \mathcal{W})$, tels que $H^1(X, \mathcal{W}) = 0$, et $H^0(X, \mathcal{W})$ engendre \mathcal{W} .

Pour ce problème de modules, il existe un espace de modules fin. L'idée est la suivante : Le couple $(\mathcal{W}, \underline{b})$ détermine un morphisme surjective

$$\phi : \mathcal{O}_X^N \rightarrow \mathcal{W},$$

où $N = \dim H^0(X, \mathcal{W})$. Le noyau de ϕ est un fibré vectoriel de rang $N - n$. On cherche donc des sous fibrés \mathcal{W}' de \mathcal{O}_X^N de rang $N - n$ tels que $\mathcal{O}_X^N/\mathcal{W}'$ n'ait pas de torsion (pour obtenir un fibré vectoriel), possédant le degré requis et satisfaisant

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^N/\mathcal{W}') = 0.$$

Les schémas de Hilbert et Quot introduits par Grothendieck paramètrent les éventuels \mathcal{W}' (Cf [Gro2] and [Nit]). Ceci fournit le schéma représentant le problème de modules précédent.

On revient maintenant au sous-champ B_r . À un objet (\mathcal{V}, T) de B_r , on associe une famille $(\mathcal{V}(r^+), T)$ et on munit localement le fibré vectoriel $p_*\mathcal{V}(r^+)$ de rang N sur T d'une base. Ceci définit un GL_N -torseur. Localement, on a une famille pour le problème de modules cité précédemment (avec rang n et un d^+ convenable). Soit M_r l'espace de modules fin correspondant. On obtient alors que B_r est le champ quotient $[\mathrm{GL}_N \backslash M_r]$.

Pour $g = 0$ nous allons donner la construction de manière explicite. Pour $g = 1$ nous indiquerons un moyen de rendre la construction explicite. Pour $g \geq 2$ il faut appliquer la machinerie des schémas de Hilbert et Quot (Cf [Nit]).

II.3.6 Le champ $\mathrm{Bun}_{n,X}$ dans des cas particuliers

X de genre 0

Soit $X = \mathbb{P}^1$. D'après la section II.3, le champ $\mathrm{Bun}_{1,X}$ est isomorphe à $[\mathbb{G}_m \backslash \{*\}]$ et il est donc de dimension -1 . le faisceau standard $\mathcal{O}(1)$ sur \mathbb{P}^1 est identifié à $\mathcal{O}([\infty])$, i.e., le fibré en droite correspondant au diviseur $[\infty]$. Le résultat classique de Birkhoff-Grothendieck dit que chaque fibré vectoriel de rang n possède une décomposition

$$\mathcal{O}(k_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(k_n),$$

où les entiers $k_1 \leq \cdots \leq k_n$ sont uniquement déterminés par le fibré vectoriel. La suite $k_1 \leq \cdots \leq k_n$ est parfois appelée le **type du fibré vectoriel**. Le type d'un fibré vectoriel \mathcal{F} (de rang et degré fixés) sur $\mathbb{P}^1 \times T$ peut varier même pour un T aussi simple que $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$ comme nous le verrons dans l'exemple donné à la fin de cette sous-section.

On veut maintenant calculer explicitement ce qui apparaît à la fin de la sous-section II.3.5 pour $X = \mathbb{P}^1$. Autrement dit, on veut déterminer les sous-champs ouverts B_r de $\mathrm{Bun}_{n,\mathbb{P}^1}^d$. Les objets de ce sous-champ ouvert B_r de $\mathrm{Bun}_{n,\mathbb{P}^1}^d$ sont les familles de fibrés vectoriels (\mathcal{F}, T) tels que pour tout $t \in |T|$, $h^1(\mathcal{F}(r)_t) = 0$. Si le type de \mathcal{F}_t est $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ on a alors

$$h^1(\mathcal{F}(r)_t) = 0 = \sum h^1\mathcal{O}(r + d_i).$$

Puisque l'on travaille sur \mathbb{P}^1 , ceci impose $d_1 + r \geq -1$, d'où $d_1 \geq -r - 1$.

Pour simplifier les notations, on remplace ce champ par le champ dont les objets sont les couples (\mathcal{F}, T) où \mathcal{F} est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1 \times T$ de rang n et de degré d tel que $h^1(\mathcal{F}_t) = 0$ et \mathcal{F}_t soit engendré par ses sections globales pour tout point $t \in |T|$.

Nous avons donc simplement besoin de considérer les fibrés vectoriels \mathcal{V} de rang n et de degré d sur \mathbb{P}^1 , engendré par ses sections globales (et avec $h^1(\mathcal{V}) = 0$). Les possibilités pour \mathcal{V} sont

$$\mathcal{O}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_n)$$

avec $0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ et $\sum d_i = d$.

On veut maintenant construire un espace de modules fin pour les données suivantes :

Les triplets $(\mathcal{V}, \xi_0, \xi_1)$ où

– *\mathcal{V} est un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^1 de rang n et de degré d , avec $h^1(\mathcal{V}) = 0$ et engendré par ses sections globales.*

– *ξ_0 est une base de l'espace vectoriel $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{V})$ qui est de dimension $d + n$.*

– *ξ_1 qui est définie comme suit : On considère l'application $\beta : \mathcal{O}^{n+d} \rightarrow \mathcal{V}$ définie en envoyant la base canonique de \mathcal{O}^{n+d} sur ξ_0 . Alors ξ_1 est le choix d'une base de l'espace vectoriel $H^0(\mathbb{P}^1, (\ker \beta)(1))$ qui est de dimension d .*

Observons que le noyau de l'application β définie ci-dessus est de rang d et de degré $-d$. Nous affirmons que le noyau de β est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^d$.

En effet, pour $k > 0$ le morphisme $\gamma : \mathcal{O}^{k+1} \rightarrow \mathcal{O}(k)$ qui envoie la base canonique $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$ de \mathcal{O}^{k+1} sur la base $\{1, z, \dots, z^k\}$ de $\mathcal{O}(k)$. Le noyau de γ est librement engendré par les éléments $ze_1 - e_2, \dots, ze_k - e_{k+1}$. On en déduit que le noyau est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^k$. Pour $k = 0$, le noyau de γ est réduit à zéro.

Nous devons donc considérer tous les morphismes $\alpha : \mathcal{O}(-1)^d \rightarrow \mathcal{O}^{d+n}$ possédant la propriété

le noyau de α est nul et le conoyau n'a pas de torsion.

Il est naturel de considérer l'ouvert de Zariski M de l'espace des application \mathbb{C} -linéaires

$$H^0(\alpha(1)) : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^d) \cong \mathbb{C}^d \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^{d+n}(1)) \cong \mathbb{C}^{2d+2n}$$

avec α comme ci-dessus.

Il est clair que c'est un espace de modules fin pour le problème considéré. Cet espace de module est de dimension $d(2d + 2n)$. le champ obtenu en divisant par les choix de ξ_0, ξ_1 est $[\mathrm{GL}_d \times \mathrm{GL}_{n+d} \setminus M]$. Il est de dimension $d(2d + 2n) - d^2 - (d + n)^2 = -n^2$, et ceci est cohérent avec la formule générale $n^2(g - 1)$ pour le champ $Bun_{n,X}$.

Exemples :

- Soit z le paramètre global usuel de \mathbb{P}^1 . On pose $D_0 = \{0\} \times T$, $D_\infty = \{\infty\} \times T$, $U_0 = \mathbb{P}^1 \times T - D_\infty$ et $U_\infty = \mathbb{P}^1 \times T - D_0$. La restriction de \mathcal{F} à ces ensembles affines U_0, U_∞ est libre (car un module projectif au-dessus d'un anneau polynômial est libre). Le fibré \mathcal{V} est donc donné par une matrice $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}[t][z, z^{-1}])$. Cette matrice définit un unique ensemble $\text{GL}(2, \mathbb{C}[t][z]) \cdot A \cdot \text{GL}(2, \mathbb{C}[t][z^{-1}])$. Par ailleurs, chaque ensemble, comme ci-dessus, définit un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}^1 \times T$. On considère maintenant le fibré vectoriel associé à

$$A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ t & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $t = 0$, ceci définit un fibré vectoriel $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ sur \mathbb{P}^1 . Pour $t \neq 0$, ceci définit un fibré vectoriel libre sur \mathbb{P}^1 . En effet,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t^{-1}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

- Soit $n = 2$ et $d = 3$. On veut déterminer l'ensemble des applications injectives $\alpha : \mathcal{O}(-1)^3 \rightarrow \mathcal{O}^5$ ayant un conoyau sans torsion. On identifie \mathcal{O}^3 à \mathbb{C}^3 et \mathcal{O}^5 à \mathbb{C}^5 , alors $H^0(\alpha(1))$ de \mathbb{C}^3 vers $\mathbb{C}^5 \oplus z\mathbb{C}^5$ est de la forme $a \mapsto A_0(a) + zA_1(a)$, avec $A_0, A_1 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^5$ linéaire.

Un calcul local montre que α a la propriété requise si et seulement si pour tout vecteur non nul $a \in \mathbb{C}^3$, les deux vecteurs $A_0(a)$ et $A_1(a)$ sont linéairement indépendants. Ceci nous permet de voir que l'espace M des α possédant la propriété requise est un ouvert de Zariski.

Nous allons maintenant voir que la famille des fibrés vectoriels \mathcal{F} de rang 2 et de degré 3 paramétrisée par M contient à la fois des fibrés \mathcal{F} de type $0 \leq 3$ et de type $1 \leq 2$.

Afin de distinguer les deux cas, on considère la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-3)^3 \xrightarrow{\alpha(-2)} \mathcal{O}(-2)^5 \rightarrow \mathcal{F}(-2) \rightarrow 0$$

et la suite exacte longue de cohomologie associée

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}(-2)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(-3)^3) \xrightarrow{H^1(\alpha(-2))} H^1(\mathcal{O}(-2)^5) \rightarrow H^1(\mathcal{F}(-2)) \rightarrow 0.$$

On observe que $H^1(\alpha(-2)) = H^0(\alpha^*)^*$. Pour un ouvert de M , le noyau de $H^1(\alpha(-2))$ est de dimension 1 et ceci correspond au type $1 \leq 2$. Sur le complémentaire de cet ensemble, le noyau est de dimension 2 et ceci correspond au type $0 \leq 3$.

X de genre 1

La classification d'Atiyah des fibrés vectoriels indécomposables sur une courbe X de genre 1, peut être formulée comme suit. On considère X comme une courbe elliptique en choisissant un point 1. On se donne une paire d'entiers r, t avec $r \geq 1$ et $\text{pgcd}(t, r) = 1$. On fixe un revêtement r -cyclique $f_r : X_r \rightarrow X$ non-ramifié et un point $1 \in X_r$ au-dessus de $1 \in X$. Soit $\mathcal{O}_{X_r}(t[1])$ le fibré en droite usuel sur X_r . On pose $V(r, t) = (f_r)_* \mathcal{O}_{X_r}(t[1])$. C'est un fibré vectoriel indécomposable sur X de rang r et de degré t . De plus, pour tout entier $m > 1$ on note $U(m)$ le fibré vectoriel indécomposable de degré 0 et de rang m sur X dont le déterminant est trivial. On remarque que $U(m)$ est une extension multiple de \mathcal{O}_X et le fibré vectoriel $U(m)$ est unique à isomorphisme près. La classification des fibrés vectoriels est la suivante :

Chaque fibré vectoriel indécomposable \mathcal{F} sur X est de la forme $\mathcal{L} \otimes U(m) \otimes V(r, t)$, où \mathcal{L} est un fibré en droite de degré 0. Les entiers r, t, m sont uniques puisque le rang de \mathcal{F} est rm et son degré est mt . De plus, \mathcal{L} est unique à tensorisation près par un fibré en droite \mathcal{M} tel que $f_r^ \mathcal{M}$ est le fibré en droite trivial sur X_r .*

Pour l'énoncé précédent, on renvoie à [vdPR], où ce résultat est une conséquence de la classification des modules aux q -différence. On observe qu'il existe un espace de modules fin pour les fibrés vectoriels indécomposables de rang n et de degré d (comme auparavant, $d/n = t/r$ avec $\text{pgcd}(t, r) = 1$), paramétré par $J_r := \text{Pic}_X^0/C$, où C est un certain sous-groupe cyclique d'ordre r . On voit en effet que dans la décomposition précédente, seul \mathcal{L} peut varier.

On fixe un entier naturel N et on considère les données suivantes

$(\mathcal{F}, \underline{b})$, où \mathcal{F} est un fibré vectoriel de rang n et de degré d tel que $\mathcal{F}(N)$ est engendré par ses sections globales et $H^1(\mathcal{F}(N)) = 0$. De plus, \underline{b} est une base de $H^0(\mathcal{F}(N))$.

En écrivant \mathcal{F} comme somme directe de fibrés vectoriels indécomposables puis en utilisant la classification d'Atiyah, on peut montrer, comme pour le cas du genre 0 qu'il existe un espace de modules fin M pour ces données. Le champ quotient $[\text{GL}_s \backslash M]$ (avec $s = h^0(\mathcal{F}(N)) = d + nN$) est un sous-champ ouvert de $\text{Bun}_{n, X}^d$. De plus, $\text{Bun}_{n, X}^d$ est l'union filtrée de ces sous-champs ouverts. On remarque que le sous-champ correspondant aux fibrés indécomposables est de dimension 0 puisqu'il est équivalent à $[\mathbb{G}_m \backslash J_r]$ dont la dimension est $\dim(J_r) - \dim(\mathbb{G}_m) = 0$. De ceci et de la décomposition ci-dessus, on en déduit que $\text{Bun}_{r, X}^d$ est de dimension 0.

II.3.7 Fibrés stables et représentations unitaires

Dans cette section, on se réfère aux notes de cours de [Fal]. X est à nouveau une courbe (lisse, irréductible, projective) sur \mathbb{C} et on suppose que son genre g est ≥ 1 . On a deux approches différentes pour comprendre les fibrés vectoriels sur X . La première est

par les fibrés stables. Pour un fibré vectoriel \mathcal{F} de rang $n(\mathcal{F})$ et de degré $d(\mathcal{F})$ on définit la pente $\mu(\mathcal{F}) = \frac{d(\mathcal{F})}{n(\mathcal{F})}$.

Définition II.3.16. *Le fibré vectoriel \mathcal{F} est dit **stable** (resp. **semi-stable**) si pour tout sous-fibré propre \mathcal{W} de \mathcal{F} on a $\mu(\mathcal{W}) < \mu(\mathcal{F})$ (resp. $\mu(\mathcal{W}) \leq \mu(\mathcal{F})$).*

Les fibrés en droite sont bien entendu stables et pour $g = 1$ il n'y a que des fibrés stables. Dans cette section (sauf mention contraire) on suppose donc $g \geq 2$.

De manière général, un fibré vectoriel \mathcal{F} est 'approximé' par une somme directe de fibrés semi-stables par la filtration de Harder–Narasimhan

$$0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_s$$

définie comme suit. \mathcal{F}_1 est un sous-fibré de \mathcal{F} de pente maximale μ et on suppose que parmi la collection des sous-fibrés de pente μ , le fibré vectoriel \mathcal{F}_1 est de rang maximal. Le fibré \mathcal{F}_1 est alors semi-stable et le quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ est encore un fibré vectoriel. On définit $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1$ comme le sous-fibré de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ de pente maximale et, comme avant, tel que parmi la collection des fibrés satisfaisant la même condition, il soit de rang maximal. La somme directe des fibrés semi-stables $\mathcal{W} := \bigoplus \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ est appelée *approximation* de \mathcal{F} . Le fibré \mathcal{W} ne dépend pas des choix faits ci-dessus. L'ensemble des fibrés vectoriels \mathcal{F} ayant une approximation donnée \mathcal{W} peut être vu comme un espace de modules. Par exemple, les fibrés \mathcal{F} ayant $A \oplus B$ pour approximation sont les (classes d'isomorphisme des) extensions

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow B \rightarrow 0$$

et cet ensemble est paramétré par l'espace vectoriel de dimension finie $H^1(X, \text{Hom}(B, A))$ (Cf [CE]).

Pour l'ensemble des fibrés semi-stables de rang n et de degré d fixés, il existe un espace de modules que l'on notera $\mathcal{M}(n, d)$. Cet espace de modules est construit par les schémas de Hilbert et avec l'aide de la théorie des invariants géométriques de Mumford. L'ouvert de Zariski $\mathcal{M}(n, d)^s$ de $\mathcal{M}(n, d)$ correspondant au fibrés vectoriels stables est en fait un espace de modules fin.

La deuxième approche pour comprendre les fibrés vectoriels provient des représentations unitaires du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X . On note U_n le groupe des matrices complexes unitaires de taille $n \times n$. Soit PU_n le quotient de U_n par son sous-groupe $\{\lambda \text{id}_{U_n} \mid |\lambda| = 1\}$ et on définit le groupe spécial unitaire par

$$SU_n := \{M \in U_n \mid \det M = 1\}.$$

Les groupes U_n , PU_n et SU_n sont vus ici comme des groupes analytiques réels. On considère maintenant les représentations unitaires de rang n d'un groupe finiment engendré π (un cas particulier sera $\pi = \pi_1(X)$). On veut définir le champ de ces représentations afin de calculer sa dimension réelle.

Une **représentation unitaire**, de rang n , de π est un homomorphisme $h : \pi \rightarrow U_n$. Supposons que π soit engendré par $\{g_1, \dots, g_r\}$ et notons R l'ensemble des relations entre ses générateurs. Un homomorphisme $\pi \xrightarrow{h} U_n$ est déterminé par un r -uplets $(h(g_1), \dots, h(g_r)) \in U_n^r$ qui satisfait les relations R . Ceci définit un sous-ensemble de l'espace réel analytique (ou algébrique) U_n^r donné par les équations polynômiales en les $h(g_1), \dots, h(g_r)$. Soit $Y(\pi, n) := \text{Hom}(\pi, U_n)$. Alors par ce qui précède, $Y(\pi, n)$ a une structure de variété analytique réelle. Cette structure ne dépend pas du choix des générateurs. En effet, pour deux ensembles S_1 et S_2 de générateurs, on voit facilement que la structure analytique réelle pour S_1 et S_2 est la même que celle définie pour $S_3 := S_1 \cup S_2$. Il suffit donc de se placer dans le cas où la deuxième collection de générateurs contient la première, soit $S_1 = (g_1, \dots, g_s)$ et $S_2 = (g_1, \dots, g_s, h_1, \dots, h_t)$. Les nouvelles relations contiennent les anciennes ainsi que des relations qui expriment chaque h_i comme un mot en les g_1, \dots, g_r . De ceci se déduit le résultat.

A partir de maintenant, on suppose que $\pi := \pi_1(X)$ et on note $Y(g, n) := Y(\pi_1(X), n)$. Ce dernier peut être identifié au sous-espace analytique réel de U_n^{2g} qui consiste en les $2g$ -uplets $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ satisfaisant $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$. Un résultat d'algèbre linéaire (voir II.3.20) montre que l'application

$$U_n \times U_n \rightarrow \text{SU}_n,$$

donnée par $(a, b) \mapsto [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ est surjective. De plus, la dimension réelle de U_n est n^2 et celle de SU_n est $n^2 - 1$ donc pour un élément générique de SU_n , la fibre de l'application est de dimension réelle $2n^2 - (n^2 - 1) = n^2 + 1$. On considère maintenant l'équation $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$. On prend pour $a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ des éléments génériques de U_n . Cet espace est de dimension $(2g-2)n^2$. Il suffit maintenant de considérer l'équation $[a_1, b_1] = c$ où c est l'élément générique $c := ([a_2, b_2] \cdots [a_g, b_g])^{-1}$. La solution de cette équation est un espace de dimension $n^2 + 1$ d'après l'argument précédent donc la dimension totale est $(2g-2)n^2 + n^2 + 1 = (2g-1)n^2 + 1$.

Ici on veut considérer les représentations unitaires à conjugaison près donc on étudie PU_n . Le quotient naïf $\text{PU}_n \backslash Y(g, n)$ (pour $n > 1$) n'a pas de bonnes propriétés et nous devons considérer le champ $[\text{PU}_n \backslash Y(g, n)]$ qui est de dimension réelle $(2g-2)n^2$ (pour $n > 1$ et $g > 1$). Les représentations unitaires de rang n du groupe fondamental peuvent être vues comme un champ. Comme dans le théorème II.5.1 (à venir), on peut montrer que ce champ est équivalent à

$$[U_n \backslash \{*\}] \times_{[\text{PU}_n \backslash \{*\}]} [\text{PU}_n \backslash Y(g, n)].$$

Comme nous le verrons plus tard dans la section II.5, toute représentation $h : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ induit un fibré vectoriel de rang n et de degré 0 sur X . En particulier tout homomorphisme $h : \pi_1(X) \rightarrow U_n$ détermine un fibré vectoriel de rang n et de degré 0 sur X . Plus précisément, on a l'équivalence suivante.

Théorème II.3.17 (Narasimhan–Seshadri).

Les catégories suivantes sont équivalentes :

1. *Les représentations unitaires du groupe fondamental $\pi_1(X)$.*
2. *Les sommes directes de fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X .*

Remarque II.3.18. *Une autre formulation (équivalente) du théorème est la suivante :*

Les catégories des représentations irréductibles unitaires et des fibrés vectoriels stables de degré 0 sont équivalentes

On regarde le cas $n = 1$. Le théorème donne alors un isomorphisme analytique réel

$$\text{Hom}(\pi_1(X), \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}) \rightarrow \text{Pic}X^0.$$

Le premier groupe est isomorphe à $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}^{2g}$. De plus, $\text{Pic}X^0 \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ où Λ est un réseau. L’isomorphisme entre $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}^{2g}$ et $\text{Pic}X^0$ respecte clairement les structures analytiques réelles. Cependant le premier groupe ne capture pas la structure analytique complexe de $\text{Pic}X^0$.

Il est intéressant de comparer ce résultat avec celui qui sera montré dans la preuve du corollaire II.4.5 et les remarques qui suivent. Ce dernier dit que le morphisme de groupe analytique $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Pic}^0X$ est surjectif et que son noyau est $H^0(X, \Omega_X)$. On en déduit que chaque élément de $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ s’écrit de manière unique comme le produit h_1h_2 , où h_1 est homomorphisme induit par un élément de $H^0(X, \Omega_X)$ et $h_2 \in \text{Hom}(\pi_1(X), \{c \in \mathbb{C}, |c| = 1\})$.

Rappelons que le groupe U_n est le groupe des automorphismes de \mathbb{C}^n qui préserve le produit scalaire standard. On considère un sous-espace propre A de \mathbb{C}^n . Alors le sous-ensemble $Y(g, n, A)$ de $Y(g, n)$ constituée des représentations laissant A (et A^\perp) invariant est fermé et isomorphe à $Y(g, a) \times Y(g, n - a)$, où $a = \dim A$. Le sous-ensemble $Y(g, n, a)$ avec $0 < a \leq n/2$ constitué des représentations laissant un sous-espace de dimension a invariant est une orbite de $Y(g, n, A)$ sous l’action du groupe U_n . On en déduit que $Y(g, n, a)$ est fermé et de dimension réelle strictement inférieure à la dimension réelle de $Y(g, n)$. Notons $Y(g, n)^*$ le sous-ensemble de $Y(g, n)$ qui correspond aux représentations unitaires irréductibles de rang n . Alors $Y(g, n)^*$ est un sous-ensemble ouvert de $Y(g, n)$ puisque son complémentaire est une réunion finie de sous-ensembles fermés de la forme $Y(g, n, A)$. Il est donc de dimension réelle $(2g - 1)n^2 + 1$. L’action de PU_n sur $Y(g, n)^*$ n’a pas de points fixes puisque les seuls automorphismes d’une représentation irréductible sont les multiples de l’identité. Le groupe PU_n est compact, ses orbites sur $Y(g, n)^*$ sont donc fermées et isomorphes à PU_n . On en déduit que le quotient $\text{PU}_n \backslash Y(g, n)^*$ est une variété analytique. Par le théorème de Narasimhan-Seshadri et le fait que $\mathcal{M}(n, 0)^s$ est un espace de module fin (en fait ‘grossier’ suffit) on obtient un isomorphisme d’espaces analytiques réels

$$\text{PU}_n \backslash Y(g, n)^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(n, 0)^s.$$

Ceci a pour conséquence que la dimension (complexe) de la variété algébrique $\mathcal{M}(n, 0)^s$ est $\frac{1}{2}((2g-1)n^2 - 1 - (n^2 - 1)) = (g-1)n^2 + 1$. Chaque fibré vectoriel (stable) irréductible admet \mathbb{C}^* pour groupe d'automorphismes et donc \mathbb{G}_m agit sur $\mathcal{M}(r, 0)^s$. Si on voit $[\mathbb{G}_m \backslash \mathcal{M}(r, 0)^s]$ comme un sous-champ ouvert de $\text{Bun}_{r, X}^0$, on trouve alors $\dim \text{Bun}_{r, X}^0 = (g-1)n^2$.

Remarque II.3.19. *On peut introduire la catégorie des systèmes locaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension n munis d'un produit scalaire. Cette catégorie est alors équivalente à celle des représentations de rang n du groupe fondamental.*

On donne maintenant une preuve rapide du résultat d'algèbre linéaire que nous avons utilisé précédemment.

Lemme II.3.20. *Soit $n \geq 2$, alors tout élément de $\text{SU}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme le commutateur de deux éléments de $\text{U}_n(\mathbb{C})$*

(Cf [Fres2]).

Démonstration. On munit \mathbb{C}^n du produit hermitien canonique. Alors si $A \in \text{U}_n(\mathbb{C})$, l'automorphisme donné par $M \mapsto AM$ est un automorphisme unitaire. Il existe donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PAP^{-1} = D$ où D est une matrice diagonale. De plus, tous les éléments diagonaux de D sont des nombres complexes de module 1. On suppose de plus que $A \in \text{SU}_n(\mathbb{C})$. Soit $D := \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Par hypothèse, on a $|a_i| = 1$, $\forall i = 1 \dots n$ et $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

On choisit des éléments $b_i \in \mathbb{C}^*$ tels que $b_2 = a_2 b_1$, $b_3 = a_3 b_2$, \dots , $b_n = a_n b_{n-1}$ et $b_1 b_2 \dots b_n = 1$. On a alors $|b_i| = 1$, $\forall i = 1 \dots n$ et $b_n = a_n a_{n-1} \dots a_2 b_1 = \frac{b_1}{a_1}$. Soit $B := \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ et considérons la permutation circulaire $\sigma := (1, 2, \dots, n)$. On note $Q(\sigma)$ la matrice de permutation associée à cette dernière. Alors $Q(\sigma) \in \text{U}_n(\mathbb{C})$ et $Q(\sigma)B^{-1}Q(\sigma)^{-1} = \text{diag}(b_n^{-1}, b_1^{-1}, \dots, b_{n-1}^{-1})$. Observons maintenant que

$$B \text{diag}(b_n^{-1}, b_1^{-1}, \dots, b_{n-1}^{-1}) = \text{diag}(b_1 b_n^{-1}, b_2 b_1^{-1}, \dots, b_n b_{n-1}^{-1}) = A$$

ce qui implique $A = BQ(\sigma)B^{-1}Q(\sigma)^{-1}$ et montre que A est un commutateur. \square

Ce résultat est également vrai pour $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que tout élément de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ est un commutateur de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ (Cf [Fres1]). On peut même montrer que ce résultat est encore vrai pour les groupes de Lie réductifs (Cf [DT]). On rappelle qu'un groupe **réductif** est un groupe n'admettant pas de sous-groupe fermé, normal, connexe et unipotent.

II.4 Le champ des connexions

II.4.1 La structure de champs

Comme avant, X désigne un courbe lisse, projective, irréductible sur \mathbb{C} munie de la topologie complexe. Le site de base est maintenant la catégorie $Var_{\mathbb{C}}$ des variétés analytiques complexes avec les morphismes holomorphes. La catégorie $Conn_X^n$ a pour objets les triplets (T, \mathcal{V}, ∇) où T est une variété analytique, \mathcal{V} un fibré vectoriel de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ muni d'une connexion $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \Omega_{X \times_{\mathbb{C}} T/T}^1 \otimes \mathcal{V}$.

Un morphisme $(f, \phi) : (T_1, \mathcal{V}_1, \nabla_1) \rightarrow (T_2, \mathcal{V}_2, \nabla_2)$ est une application holomorphe $f : T_1 \rightarrow T_2$ ainsi qu'un isomorphisme $\phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow (Id \times f)^* \mathcal{V}_2$ compatible avec les ∇ 's. Plus précisément, le diagramme suivant doit être commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\phi} & (Id \times f)^* \mathcal{V}_2 \\ \nabla_1 \downarrow & & \downarrow (Id \times f)^* \nabla_2 \\ \mathcal{V}_1 \otimes \Omega_{X \times_{\mathbb{C}} T_1}^1 & \xrightarrow{\phi \otimes Id} & (id \times f)^* \mathcal{V}_2 \otimes \Omega_{X \times_{\mathbb{C}} T_1}^1 \end{array}$$

Nous allons montrer que $Conn_{n,X}$ est un champ au-dessus de $Var_{\mathbb{C}}$. Pour cela, nous allons utiliser la preuve du fait que $Bun_{n,X}$ est un champ.

Lemme II.4.1. *La catégorie $Conn_{n,X}$ est fibrée en groupoïdes au-dessus de $Var_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. La preuve est en tout point similaire à celle du lemme II.3.3 pour les fibrés vectoriels en considérant les pullbacks de connexions au lieu des pullbacks de fibrés. \square

Proposition II.4.2. *La catégorie $Conn_{n,X}$ est un préchamp sur $Var_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soit T une variété analytique fixée et considérons deux connexions $(\mathcal{V}_1, \nabla_1)$ et $(\mathcal{V}_2, \nabla_2)$ sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. On se donne une famille couvrante $i_{\alpha} : T_{\alpha} \rightarrow T$. Rappelons les notations que nous avons utilisé dans la preuve du lemme II.3.4.

Notations :

On pose $Z := X \times_{\mathbb{C}} T$ et $Y := X \times_{\mathbb{C}} \sqcup_{\alpha} T_{\alpha}$. On a une application $i : Y \rightarrow Z$ qui est un recouvrement de Z et on note $q : Y \times_Z Y \rightarrow Z$ l'application naturelle. On note $Conn_Y$ l'ensemble des objets de $Conn_{n,X}$ qui sont au-dessus de $\sqcup_{\alpha} T_{\alpha}$ et $Conn_Z$ l'ensemble des objets au-dessus de T (en d'autres termes, respectivement les connexions de rang n sur Y et sur Z).

Nous avons vu qu'il suffit de montrer que l'on a la suite exacte courte suivante :

$$\begin{aligned} Isom((\mathcal{V}_1, \nabla_1), (\mathcal{V}_2, \nabla_2)) \\ \rightarrow Isom(i^*(\mathcal{V}_1, \nabla_1), i^*(\mathcal{V}_2, \nabla_2)) \rightrightarrows Isom(q^*(\mathcal{V}_1, \nabla_1), q^*(\mathcal{V}_2, \nabla_2)) \end{aligned}$$

On suppose que l'on a recouvrement de $X \times_{\mathbb{C}} T$ pour lequel le lemme II.3.5 est satisfait pour les deux faisceaux \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 . Rappelons que cela veut dire que pour $i = 1, 2$, la suite suivante est exacte :

$$\mathcal{V}_i(U) \xrightarrow{id \otimes 1} \mathcal{V}_i(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \rightrightarrows \mathcal{V}_i(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$$

Supposons que l'on se donne un morphisme $\varphi : i^*(\mathcal{V}_1, \nabla_1) \rightarrow i^*(\mathcal{V}_2, \nabla_2)$ dans le groupoïde Conn_Y (donc un isomorphisme) tel que $p_1^* \circ i^*(\varphi) = p_2^* \circ i^*(\varphi)$. On a donc un morphisme $\varphi : i^*\mathcal{V}_1 \rightarrow i^*\mathcal{V}_2$ qui commute avec les connexions $i^*\nabla_1$ et $i^*\nabla_2$. Par la preuve de la proposition II.3.4, on sait que, localement sur chaque ouvert du recouvrement choisi, le morphisme $\varphi(I^{-1}(U))$ provient d'un unique morphisme

$$\psi(U) : \mathcal{V}_1(U) \rightarrow \mathcal{V}_2(U)$$

Par construction de $i^*\nabla_1$ et $i^*\nabla_2$, il est clair que le morphisme $\psi(U)$ commute avec les connexions ∇_1 et ∇_2 . On obtient donc des morphismes locaux de connexions (locales) et ils peuvent se recoller en un morphisme de connexion. Ceci achève la preuve du fait que Conn_X^n est un préchamp. \square

On va maintenant montrer que la catégorie $\text{Conn}_{n,X}$ satisfait le deuxième axiome d'un champ.

Proposition II.4.3. *La catégorie $\text{Conn}_{n,X}$ est un champ.*

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition II.3.6, on fixe une variété analytique T et on se donne un recouvrement $T_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} T$. Comme d'habitude, on note $Z = X \times_{\mathbb{C}} T$ et $Y = X \times_{\square_\alpha} T_\alpha$ et $i : Y \rightarrow Z$ et $q : Y \times_Z Y \rightarrow Z$ les applications naturelles. Rappelons le deuxième axiome d'un champ (en utilisant les notations précédentes).

Soit (\mathcal{F}, ∇) un objet au-dessus de Y et soit $\varphi : p_1^*(\mathcal{F}, \nabla) \simeq p_2^*(\mathcal{F}, \nabla)$ un isomorphisme (au-dessus de $Y \times_Z Y$) satisfaisant $p_{13}^*\varphi = p_{23}^*\varphi \circ p_{12}^*\varphi$, où p_i , respectivement p_{ij} , désigne les projections naturelles $Y \times_Z Y \rightarrow Y$, respectivement $Y \times_Z Y \times_Z Y \rightarrow Y \times_Z Y$. Alors il existe un objet (\mathcal{G}, η) au-dessus de Z et un isomorphisme $\lambda : i^*(\mathcal{G}, \eta) \simeq (\mathcal{F}, \nabla)$ tel que $\varphi \circ p_1^*(\lambda) = p_2^*(\lambda)$, autrement dit tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \circ i^*(\mathcal{G}, \eta) & \xlongequal{\quad} & p_2^* \circ i^*(\mathcal{G}, \eta) \\ \downarrow p_1^*(\lambda) & & \downarrow p_2^*(\lambda) \\ p_1^*(\mathcal{F}, \nabla) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & p_2^*(\mathcal{F}, \nabla) \end{array}$$

Comme avant, on travaille sur un ouvert U qui trivialise \mathcal{F} et on traduit en termes de modules ce que l'on a. Soient $A := \mathcal{O}_Z(i(U))$, $B := \mathcal{O}_Y(U)$, $M := \mathcal{F}(U)$. On note

encore ∇ la connexion sur M (i.e. restreinte à U) et φ au lieu de $\varphi(U \times_{i(U)} U)$ pour l'isomorphisme entre $M \otimes_A B$ et $B \otimes_A M$. Par hypothèse, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_A B & \xrightarrow{\varphi} & B \otimes_A B \\
 \nabla \otimes Id \downarrow & & \downarrow Id \otimes \nabla \\
 M \otimes_A B \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\varphi \otimes Id} & B \otimes_A M \otimes \Omega^1
 \end{array} \tag{II.5}$$

D'après la proposition II.3.6, on sait qu'il existe un A -module N et un isomorphisme $\lambda : N \otimes_A B \rightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 N \otimes_A B \otimes_A B & \xlongequal{\quad} & N \otimes_A B \otimes_A B \\
 \lambda \otimes Id \downarrow & & \downarrow Id \otimes \lambda \\
 M \otimes_A B & \xrightarrow{\varphi} & B \otimes_A M
 \end{array} \tag{II.6}$$

Nous devons montrer que l'on peut munir N d'une connexion η tel que λ soit un isomorphisme de connexions $\lambda : (N \otimes_A B, \eta \otimes Id) \rightarrow (M, \nabla)$. Soit $n \in N$, nous devons alors définir $\eta(n)$ tel que

$$\eta(n) \otimes b = (\lambda \circ Id)^{-1} \circ \nabla \circ \lambda(n \otimes b), \quad \forall b \in B$$

On fixe $b \in B$ et on écrit

$$\nabla \circ \lambda(n \otimes b) = \sum_i m_i \otimes \omega_i, \quad \text{avec } m_i \in M, \omega_i \in \Omega^1, \forall i$$

On sait qu'il existe $n_i \in N$ et $b_i \in B$ tels que $\lambda(n_i \otimes b_i) = m_i$ pour tout i . Nous pourrions définir η si on montre qu'il existe $n'_i \in N$ tel que $n'_i \otimes b = n_i \otimes b_i, \forall i$. On considère l'image de $\lambda(n \otimes b) \otimes b$ dans le diagramme II.5. On a

$$\nabla \otimes Id(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = \sum_i m_i \otimes \omega_i$$

d'où

$$(\varphi \otimes Id) \circ (\nabla \otimes Id)(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = \sum_i \varphi(m_i \otimes b) \otimes \omega_i.$$

Par hypothèse, c'est égal à

$$(\varphi \otimes Id) \circ (\nabla \otimes Id)(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = \sum_i \varphi(\lambda(n_i \otimes b_i) \otimes b) \otimes \omega_i$$

mais d'après le diagramme II.6, on a $\varphi(\lambda(n_i \otimes b_i) \otimes b) = b_i \otimes \lambda(n_i \otimes b)$ donc on obtient

$$(\varphi \otimes Id) \circ (\nabla \otimes Id)(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = \sum_i b_i \otimes \lambda(n_i \otimes b) \otimes \omega_i$$

D'autre part, par commutativité du diagramme II.5, l'expression précédente est aussi égale à

$$(Id \circ \nabla) \circ \varphi(\lambda(n \otimes b) \otimes b)$$

Le diagramme II.6 nous donne $\varphi(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = b \otimes \lambda(n \otimes b)$, nous avons donc

$$(Id \circ \nabla) \circ \varphi(\lambda(n \otimes b) \otimes b) = (Id \otimes \nabla)(b \otimes \lambda(n \otimes b)) = b \otimes \nabla(\lambda(n \otimes b))$$

Par hypothèse,

$$b \otimes \nabla(\lambda(n \otimes b)) = \sum_i b \otimes m_i \otimes \omega_i = \sum_i b \otimes \lambda(n_i \otimes b_i) \omega_i$$

et on obtient

$$b \otimes \lambda(n_i \otimes b_i) = b_i \otimes \lambda(n_i \otimes b), \quad \forall i$$

ce qui nous montre qu'il existe $\beta_i \in A$ tel que $b_i = \beta_i b$. On a alors

$$b_i \otimes n_i = \beta_i b \otimes n_i = b \otimes \beta_i n_i$$

et le résultat s'ensuit. Nous avons donc montré que localement (sur l'ouvert U), il existe une connexion (N, η) telle que $(N \otimes_A B, \eta \otimes Id) \simeq (M, \nabla)$.

On utilise un argument similaire à celui de la preuve de la proposition II.3.6 pour montrer que ces connexions locales se recollent en une connexion globale. Ceci achève la preuve que $\text{Conn}_{n,X}$ est un champ. \square

II.4.2 Quelques propriétés du champ $\text{Conn}_{n,X}$

Rappelons qu'un fibré vectoriel muni d'une connexion est de degré 0 (Cf section I.1). Comme précédemment, $\text{Bun}_{n,X}^0$ désigne le sous-champ des fibrés vectoriels sur X de rang n et de degré 0. Il est clair que le foncteur oubli $\text{Conn}_{n,X} \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^0$ est un morphisme de champs.

Proposition II.4.4. *Le champ $\text{Conn}_{1,X}$ est équivalent à $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}] \times \underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$.*

Démonstration. On commence par remarquer que $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^{2g}$ est vu comme une variété algébrique ou analytique sur \mathbb{C} . De plus $\underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ est la catégorie qui correspond à cette variété. On note $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X .

On considère un objet (T, \mathcal{L}, ∇) de $\text{Conn}_{1,X}$. On veut associer à ce triplet un élément de $\underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$. Pour cela, on considère la connexion

$$(\mathcal{M}, \nabla) = (\pi \times id_T)^*(\mathcal{L}, \nabla)$$

sur $\tilde{X} \times T$ puis le faisceau $M := \underline{\ker}(\nabla, \mathcal{M})$ sur $\tilde{X} \times T$. Il est localement constant ce qui signifie que pour des recouvrements ouverts $\{\tilde{X}_\alpha\}$ et $\{T_\alpha\}$ de \tilde{X} et T , $M|_{\tilde{X}_\alpha \times T_\alpha}$ est isomorphe à $\underline{\mathbb{C}} \boxtimes \mathcal{O}_{T_\alpha}$. Par conséquent, si $p_1 : \tilde{X} \times T \rightarrow \tilde{X}$ désigne la première projection alors $p_{1*}M$ est localement constant sur \tilde{X} et en fait globalement constant car \tilde{X} est simplement connexe. On a donc $M|_{\tilde{X} \times T_\alpha} \simeq \underline{\mathbb{C}} \boxtimes \mathcal{O}_{T_\alpha}$. On note $p_2 : \tilde{X} \times T \rightarrow T$ la deuxième projection. On a donc prouvé que $p_{2*}M$ est un fibré en droite que l'on note \mathcal{L}_1 sur T . Le groupe $\pi_1(X)$ est le groupe du revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ et il agit donc sur (\mathcal{M}, ∇) , M et \mathcal{L}_1 . Remarquons maintenant que $\text{Aut}(\mathcal{L}_1) = \text{Aut}(\mathcal{O}_T)$ puisque $\text{End}(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_T$. On peut donc définir un homomorphisme

$$h : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{O}_T(T)^*.$$

Ce dernier est équivalent à un objet $T \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ de $\underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$. En effet, étant donné un morphisme $h : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{O}_T(T)^*$, on peut définir une application continue

$$T \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*), t \mapsto (\gamma \mapsto h(\gamma)(t))$$

où $h(\gamma)(t)$ est l'évaluation en t de la fonction $h(\gamma) \in \mathcal{O}_T(T)^*$.

Réciproquement, étant donné une application continue f de T vers $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$, on doit montrer que l'on peut définir une application de $\pi_1(X)$ vers $\mathcal{O}_T(T)^*$. Rappelons que le groupe fondamental a $2g$ générateurs $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ qui satisfont $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \dots b_g^{-1} = 1$. Étant donné $t \in T$, l'image $f(t)$ dans $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ est déterminée par les images de ces générateurs. En d'autres termes, $f(t)$ est déterminée par $2g$ éléments de \mathbb{C}^* correspondant aux images des générateurs. On les note $a_i(t)$ et $b_i(t)$, pour $i = 1 \dots g$. Ils vérifient

$$a_1(t) b_1(t) a_1(t)^{-1} b_1(t)^{-1} \dots b_g(t)^{-1} = 1.$$

Les fonctions de $\mathcal{O}(T)$ définies par $t \mapsto a_i(t)$ et $t \mapsto b_i(t)$ sont inversibles et appartiennent par conséquent à $\mathcal{O}_T(T)^*$. L'application qui envoie a_i (respectivement b_i) sur ces éléments de $\mathcal{O}_T(T)^*$ définit donc un morphisme

$$\pi_1(X) \rightarrow \mathcal{O}_T(T)^*$$

et ceci achève de montrer l'équivalence. On a montré que l'on peut associer un objet de $\underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ à un objet de $\text{Conn}_{1,X}$. De plus, on a vu dans la sous-section II.3.1 qu'un fibré en droite \mathcal{L}_1 sur T peut être vu comme un élément de $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}]$.

Le foncteur qui envoie un objet (T, \mathcal{L}, ∇) de $\text{Conn}_{1,X}$ sur le couple

$$((T, \mathcal{L}_1), T \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*))$$

est un équivalence entre les champs $\text{Conn}_{1,X}$ et $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}] \times \underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$. En effet étant donné un objet $((T, \mathcal{L}_1), T \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*))$ de $[\mathbb{G}_m \setminus \{*\}] \times \underline{\text{Hom}}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$, on a vu que l'on peut définir un morphisme

$$h : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{O}_T(T)^*.$$

Soit $M := \mathbb{C} \boxtimes \mathcal{L}_1$. C'est un système local sur $\tilde{X} \times T$ et l'application h donne une action de $\pi_1(X)$ sur M . En prenant les invariants sous cette action, on obtient un système local sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ qui correspond à une connexion (\mathcal{L}, ∇) sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. On a donc une équivalence entre les deux catégories et ceci nous donne en particulier que la dimension de $\text{Conn}_{1,X}$ est $2g - 1$. \square

Corollaire II.4.5. *Le foncteur oubli $\text{Conn}_{1,X} \rightarrow \text{Bun}_X^{1,0}$ est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Puisque $\text{Bun}_{1,X}^0 \cong [\mathbb{G}_m \setminus \{*\}] \times \underline{\text{Pic}}^0 X$ (Cf section II.3.3) il suffit de montrer que l'homomorphisme naturel $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Pic}^0 X$ de groupes analytiques est surjectif. On considère la suite exacte de faisceaux $1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$ sur X , où la dernière application (non-triviale) est donnée par $f \mapsto \frac{df}{f}$. Ceci induit une suite exacte longue de cohomologie.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow \\ H^1(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}^*) \dots \end{aligned}$$

et puisque $H^0(X, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$, on peut la réécrire

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}^*) \dots$$

Le terme $H^1(X, \mathbb{C}^*)$ est égal à $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ coïncide avec $\text{Pic} X$. On peut montrer que l'application $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1) \cong \mathbb{C}$ envoie la classe d'un fibré en droite sur son degré. Le noyau de cette application est donc $\text{Pic}^0 X$ et il est égal, par hypothèse, à l'image de l'application $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Pic} X$ ce qui montre que $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Pic}^0 X$ est surjective. \square

Remarque II.4.6.

– *Le noyau de l'homomorphisme de groupes analytiques*

$$\{(\mathcal{L}, \nabla) \mid \mathcal{L} \text{ line bundle on } X\} / \sim \rightarrow \text{Pic}^0 X$$

est constitué des connexions (\mathcal{O}_X, ∇) . Notons $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$ la connexion standard. Alors le ∇ général sur \mathcal{O}_X est de la forme $\nabla = d + \ell$, où $\ell : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$ est \mathcal{O}_X -linéaire. Ceci montre encore que le noyau est égal à $H^0(X, \Omega_X^1)$.

- Pour $n > 1$, le foncteur oubli $\text{Conn}_{n,X} \rightarrow \text{Bun}_{n,X}^0$ n'est pas surjective sur les objets puisque le fibré vectoriel $\mathcal{V} := \mathcal{O}_X([P]) \oplus \mathcal{O}_X(-[P])$ (où P est un point de X) n'admet pas de connexion. En effet, une connexion $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{V}$ induirait une connexion sur $\mathcal{O}([P])$ de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_X([P]) \xrightarrow{i} \mathcal{V} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{V} \xrightarrow{p_1} \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X([P]),$$

où i désigne l'inclusion et p_1 la projection évidente

$$\Omega_X^1 \otimes (\mathcal{O}_X([P]) \oplus \mathcal{O}_X(-[P])) \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X([P]).$$

Ceci munirait un fibré en droite de degré 1 d'une connexion ce qui est impossible.

L'étude de $\text{Conn}_{n,X}$ amène naturellement aux deux autres champs $\text{Repr}_n(\pi_1(X))$ et Loc_X^n .

II.5 Le champ des représentations

Soit π un groupe finiment engendré. Les objets de la catégorie $\text{Repr}_n(\pi)$ sont les triplets (\mathcal{V}, T, h) où \mathcal{V} est un fibré vectoriel de rang n sur un variété analytique T et $h : \pi \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V})$ est un homomorphisme de groupes. Un morphisme de (\mathcal{V}, T, h) vers (\mathcal{V}', T', h') est un morphisme $f : T \rightarrow T'$ ainsi qu'un isomorphisme $\phi : \mathcal{V} \rightarrow f^*\mathcal{V}'$ tel que h coïncide avec l'homomorphisme induit par h' . En d'autres termes, on doit avoir

$$\phi \circ h \circ \phi^{-1}(y) = h'(y), \quad \forall y \in \pi.$$

On remarque que, étant donné un objet (\mathcal{V}', T', h') au-dessus de T' et un morphisme $f : T \rightarrow T'$, on peut définir un pullback de cet objet que l'on note $(f^*\mathcal{V}', T, f^*h)$. On omet la vérification que $\text{Repr}_n(\pi)$ est un champ.

Si T est réduit à un point, alors \mathcal{V} est un espace vectoriel de dimension n et dans ce cas, on a un homomorphisme $h : \pi \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V}) \cong \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Il est donc naturel de considérer l'ensemble $Y_n := \text{Hom}(\pi, \text{GL}_n(\mathbb{C}))$. On munit cet ensemble d'une structure de schéma affine algébrique au-dessus de \mathbb{C} (qui peut avoir des singularités) et la structure d'espace analytique correspondant en utilisant une méthode analogue à celle vue dans la section II.3.6. Le groupe PGL_n agit par conjugaison sur Y_n .

Théorème II.5.1. *Le champ $\text{Repr}_n(\pi)$ est isomorphe au produit fibré*

$$[\text{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}] \times_{[\text{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}]} [\text{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus Y_n].$$

Démonstration. On se donne un objet (\mathcal{V}, T, h) de $\text{Repr}_n(\pi)$. On a vu qu'un fibré vectoriel \mathcal{V} sur T peut être identifié à un élément de $[\text{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}]$. Voyons maintenant comment on peut associer un morphisme $T \rightarrow Y_n$ au triplet (\mathcal{V}, T, h) . Soit $\{T_\alpha\}$ une trivialisations

de \mathcal{V} . On a des isomorphismes $\phi_\alpha : \mathcal{V}|_{T_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T_\alpha}^n$ qui induisent des isomorphismes $\tilde{\phi}_\alpha : \text{Aut}(\mathcal{V}|_{T_\alpha}) \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathcal{O}_{T_\alpha})$ donnés par $\tilde{\phi}_\alpha(\theta) = \phi_\alpha \circ \theta \circ \phi_\alpha^{-1}$. On peut alors définir des isomorphismes

$$l_\alpha : \text{Aut}(\mathcal{V}|_{T_\alpha}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathcal{O}_{T_\alpha})$$

donnés par $l_\alpha = \tilde{\phi}_\alpha \circ h_\alpha$, où

$$h_\alpha : \pi \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V}|_{T_\alpha})$$

est obtenu par restriction. Comme dans la preuve de la proposition II.4.4, on peut définir une application analytique

$$m_\alpha : T_\alpha \rightarrow \text{Hom}(\pi, \mathbb{C}^*)$$

(donnée par $t \mapsto l_\alpha(-)(t)$).

Montrons que cette application est unique à l'action de PGL_r sur $\text{Hom}(\pi, \mathbb{C}^*)$ près. Supposons que l'on choisisse d'autres isomorphismes $\psi_\alpha : \mathcal{V}|_{T_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T_\alpha}^n$ alors l'isomorphisme induit $\tilde{\psi}_\alpha : \text{Aut}(\mathcal{V}|_{T_\alpha}) \rightarrow \text{GL}_r(\mathcal{O}_T)$ diffère de $\tilde{\phi}_\alpha$ par conjugaison par un élément de $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$. Les restrictions de m_α et m_β à $T_\alpha \cap T_\beta$ diffère par conjugaison par un élément de $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$, ce que signifie qu'il existe $M_{\alpha\beta} \in \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$m_\alpha(t) = M_{\alpha\beta} m_\beta(t), \quad \forall t \in T_\alpha \cap T_\beta,$$

Soit $B_\alpha := T_\alpha \times \text{PGL}_n(\mathbb{C})$. On pose $B := \sqcup B_\alpha / \sim$ où la relation d'équivalence est donnée par

$$(t_\alpha, M_\alpha) \sim (t_\beta, M_\beta) \Leftrightarrow t_\alpha = t_\beta \in T_\alpha \cap T_\beta \text{ and } M_\beta = M_\alpha M_{\alpha\beta}$$

On a des morphismes $m_\alpha^+ : B_\alpha \rightarrow Y$ donnés par $m_\alpha^+(t_\alpha, M) = M.m_\alpha(t_\alpha)$. Ces morphismes définissent un morphisme m^+ sur B . En effet, on a

$$m^+(x) = m_\alpha^+(t, M) = M.m_\alpha(t), \text{ si } x = \overline{(t_\alpha, M_\alpha)}, (t_\alpha, M_\alpha) \in B_\alpha$$

et si $(t_\alpha, M_\alpha) \sim (t_\beta, M_\beta)$, alors par hypothèse $t_\alpha = t_\beta = t$ et $M_\beta = M_\alpha M_{\alpha\beta}$. De plus, on a

$$m_\beta^+(t, M_\beta) = M_\beta m_\beta(t) = M_\alpha M_{\alpha\beta} m_\beta(t) = M_\alpha m_\alpha(t) = m_\alpha^+(t, M_\alpha)$$

et ceci montre que le morphisme m est bien défini sur B . On voit de plus que cette application est un $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$ -torseur puisqu'on a un action globale sur B définie par

$$N * \overline{(t, M_\alpha)} := \overline{(t, NM_\alpha)}, \quad \forall \overline{(t, M_\alpha)} \in B, \quad \forall N \in \text{PGL}_n(\mathbb{C})$$

L'action est bien définie car si $(t, M_\alpha) \sim (t, M_\beta)$, on a

$$(t, NM_\beta) = (t, NM_\alpha M_{\alpha\beta}) \sim (t, NM_\alpha).$$

Il est clair que m^+ est une application équivariante et B est le fibré projectif de \mathcal{V} (ou plutôt celui associé à son fibré vectoriel). Le couple $(B \rightarrow T, m^+, Id)$ est donc un objet de

$$[\text{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}] \times [\text{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}] \left[\text{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus Y_n \right]$$

Ceci définit un morphisme de champs.

On a également une construction inverse. Considérons un couple d'objets (T, \mathcal{V}) , $(B \rightarrow T, m^+)$ tels que (B, T) soit isomorphe au PGL_n -fibré associé à $(\mathbb{P}(\mathcal{V}), T)$. On peut alors reconstruire un homomorphisme $h : \pi \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{V})$. En effet, comme précédemment, on utilise l'identification de T_α à $T_\alpha \times \{Id\}$ pour définir des applications locales $T_\alpha \rightarrow Y$, où $\{T_\alpha\}$ est une trivialisatation de B et de \mathcal{V} . Ces applications locales induisent des applications locales $\pi \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{V}|_{T_\alpha})$ qui se recollent en une application globale. En effet, grâce à l'isomorphisme entre B et (le fibré vectoriel associé à) $\mathbb{P}(\mathcal{V})$, les fonctions de transition sont compatibles. On omet la preuve que ces foncteurs sont inverses l'un de l'autre. \square

Remarque II.5.2. – *Le cas $n = 1$ et $\pi = \pi_1(X)$, avec X comme avant une courbe lisse, projective et irréductible au-dessus de \mathbb{C} , donne une équivalence de champs*

$$\mathrm{Repr}_1(\pi_1(X)) \simeq [\mathbb{G}_m \setminus \{*\}] \times \underline{\mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}^*)}$$

ce qui montre que $\mathrm{Repr}_1(\pi_1(X)) \simeq \mathrm{Conn}_{1,X}$.

– *D'après la théorie des champs, la dimension de*

$$[\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \setminus \{*\}] \times [\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}] \left[\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \setminus Y_n \right]$$

est $-n^2 + \dim Y_n$ et la proposition nous donne donc la dimension du champ des représentations.

On voudrait calculer explicitement ce champ sur des exemples. On suppose que X est une courbe lisse, projective, irréductible de genre g .

– Le cas $g = 0$ n'est pas intéressant car $\pi_1(X) = \{1\}$ et

$$\mathrm{Repr}_n(\pi_1(X)) \cong [\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus \{*\}]$$

(qui est de dimension $-n^2$).

– Pour $g = 1$, l'espace $Y = \{(a, b) \in \mathrm{GL}_n \mid ab = ba\}$ est de dimension $n^2 + n$. L'algèbre $\mathcal{O}(Y)^{\mathrm{PGL}_n}$ est un anneau polynômial en $2n$ variables qui sont les coefficients du polynôme caractéristique de a et b .

– Pour $g \geq 2$, $Y = \{(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g) \in \mathrm{GL}_n^{2g} \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1\}$. (Ici $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$). Nous allons montrer que $\dim Y = (2g - 1)n^2 + 1$. On considère l'application $\phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2 \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, donnée par $(a, b) \mapsto [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. On sait que ϕ est surjective (Cf [Fres1] et le lemme II.3.20). Par un argument similaire à celui employé dans la section II.3.6, on peut montrer que Y_n est de dimension $(2g - 1)n^2 + 1$.

- On suppose maintenant que π est le groupe fondamental d'une courbe affine X^* obtenue en enlevant un nombre fini de points (fermés) de X . Autrement dit, $X^* := X \setminus \{P_1, \dots, P_s\}$. On ne considère que les cas $g = 0$ et $s \geq 3$ ou $g \geq 1$ et $s \geq 1$. Le groupe fondamental $\pi_1(X^*)$ est alors librement engendré par $2g + s - 1$ éléments donc $Y = \mathrm{GL}_n^{2g+s-1}$. Ceci donne $\dim(Y_n) = (2g + s - 1)n^2$ d'où

$$\dim(\mathrm{Repr}_n(\pi_1(X^*))) = -n^2 + ((2g + s - 1)n^2 - (n^2 - 1)) + (n^2 - 1)$$

II.6 Le champ des systèmes locaux

Ce champ est noté Loc_X^n . Un objet de ce champ est un couple (T, L) avec L un faisceau sur $X \times_{\mathbb{C}} T$, tel que pour des recouvrements ouverts $\{X_\beta\}$ et $\{T_\alpha\}$ respectivement de X et de T , la restriction de L à $X_\beta \times T_\alpha$ est isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}^n \boxtimes \mathcal{O}_{T_\alpha}$.

Notons $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X . On considère un objet (T, L) de Loc_X^n . Alors $M := (\pi \times id_T)^* L$ est un système local sur $\tilde{X} \times T$. Notons $p_2 : \tilde{X} \times T \rightarrow T$ la deuxième projection. Alors, comme dans la preuve de la proposition II.4.4, on sait que $\mathcal{M} := p_{2*} M$ est un fibré vectoriel sur T de rang n . Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est le groupe du revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ et agit donc sur M et \mathcal{M} . On a donc trouvé un homomorphisme $h : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ et ainsi obtenu un objet (\mathcal{M}, T, h) de $\mathrm{Repr}_n(\pi_1(X))$. Ce qui précède amène une équivalence entre Loc_X^n et $\mathrm{Repr}_n(\pi_1(X))$.

On considère maintenant l'objet (T, \mathcal{V}, ∇) de $\mathrm{Conn}_{n,X}$. Le noyau de

$$\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \Omega_{(X \times_{\mathbb{C}} T)/T}^1 \otimes \mathcal{V}$$

est vu comme un système local c'est-à-dire un élément de Loc_X^n . Ceci amène le résultat suivant :

Théorème II.6.1. *Les champs $\mathrm{Conn}_{n,X}$, Loc_X^n et $\mathrm{Repr}_n(\pi_1(X))$ sont équivalents.*

Chapitre III

La correspondance géométrique de Langlands dans des cas particuliers

III.1 La correspondance de Langlands géométrique

On considère une courbe lisse, projective X/\mathbb{F}_q de genre $g > 0$ qui est géométriquement irréductible c'est-à-dire telle que $X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ soit irréductible. Par abus de notations, on écrit $X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ au lieu de $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_q)} \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})$. Le champ des fibrés vectoriels de rang n sur X est noté $\text{Bun}_{n,X}$ et on note $\text{Bun}_{n,X}(\mathbb{F}_q)$ (ou simplement $\text{Bun}_n(\mathbb{F}_q)$) l'ensemble de ses \mathbb{F}_q -points. Rappelons qu'un \mathbb{F}_q -point du champ $\text{Bun}_{n,X}$ est un morphisme de champs

$$\text{Spec}(\mathbb{F}_q) \rightarrow \text{Bun}_{n,X}$$

Un tel morphisme est déterminé par l'image de l'application identité qui est un objet de $\text{Bun}_{n,X}$ sur $X \times \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ donc un point du champ $\text{Bun}_{n,X}$ peut être identifié à un fibré vectoriel de rang n sur X .

Pour $i = 1 \dots n$, on peut définir un champ $Hecke_i$ au-dessus de $Sch_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout schéma T sur \mathbb{F}_q $Hecke_i(T)$ désigne l'ensemble des triplets $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x)$, où x est un point fermé de X et $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ sont des fibrés vectoriels de rang n au-dessus de $X \times_{\mathbb{F}_q} T$ satisfaisant $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq \left(\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{F}_q} T} / \mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{F}_q} T}(-[x \times T]) \right)^i$.

(Cf [Lau] or [Fre])

La i -ème correspondance de Hecke est alors donnée par :

$$\begin{array}{ccc} & Hecke_i & \\ h^{\leftarrow} \swarrow & & \searrow \text{supp} \times h^{\rightarrow} \\ Bun_{n,X} & & X \times Bun_{n,X} \end{array}$$

où $h^{\leftarrow}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = (\mathcal{M})$, $h^{\rightarrow}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = \mathcal{M}'$ et $\text{supp}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = x$. Soit $x \in |X|$ et notons $Hecke_{i,x} = \text{supp}^{-1}(x)$. Ceci nous donne une correspondance entre $\{x\} \times \text{Bun}_{n,X}$ et $\text{Bun}_{n,X}$. On peut montrer (Cf lemme A.2.4) que le double quotient

$$\text{GL}_n(F) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}) / \text{GL}_n(\mathbb{O})$$

est en bijection avec l'ensemble des (classe d'équivalence de) \mathbb{F}_q -points de $\text{Bun}_{n,X}$. Le diagramme définit donc un opérateur sur l'espace des fonctions sur $\text{GL}_n(F) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}) / \text{GL}_n(\mathbb{O})$ qui à une fonction f associe $h_1^{\rightarrow}((h^{\leftarrow})^* f)$. L'opérateur h_1^{\rightarrow} désigne l'intégration le long des fibres de h^{\rightarrow} . On vérifie que cet opérateur est précisément le i -ème opérateur $H_{i,x}$. Les faisceaux (pervers) correspondants aux fonctions associées aux représentations automorphes sont donc des faisceaux propres (eigensheaves) pour la correspondance de Hecke (Cf l'annexe A pour plus de détails).

Soit \mathcal{K} un faisceau pervers sur $\text{Bun}_{n,X}$. On définit alors $H_i(\mathcal{K}) = (\text{supp}, h^{\rightarrow})_! h^{\leftarrow,*}(\mathcal{K})$ où $(\text{supp}, h^{\rightarrow})_!$ désigne le pushforward à support compact (Cf annexe A). Ceci est encore un faisceau pervers sur $\text{Bun}_{n,X}$. La correspondance de Langlands pour les corps de fonctions, sous forme géométrique peut alors s'écrire :

Théorème III.1.1. *Soit X une courbe lisse projective and géométriquement irréductible sur \mathbb{F}_q . Pour tout système local irréductible E sur X de rang n , il existe un (unique) faisceau pervers \mathcal{K} sur $\text{Bun}_{n,X}$, irréductible sur chaque composante connexe de $\text{Bun}_{n,X}$ tel que $\forall i = 1 \dots n$, on ait $H_i(\mathcal{K}) \simeq (\wedge^i E) \boxtimes \mathcal{K}$*

Les auteurs E. Frenkel, D. Gaitsgory et K. Vilonen affirment qu'un analogue de ce théorème est vrai lorsque le corps fini \mathbb{F}_q est remplacé par n'importe quel corps de caractéristique zéro. Nos objectifs sont les suivants :

1. Trouver une traduction cohérente du théorème pour \mathbb{C} .
2. Donner des preuves dans des cas spéciaux.

On note $\widehat{\pi_1(X)}$ le complété du groupe fondamental. On remarque que les systèmes locaux qui apparaissent dans la conjecture de Langlands géométrique correspondent à des homomorphismes continus

$$\rho : \widehat{\pi_1(X)} \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$$

pour un certain premier l (et tel que l'image de cet homomorphisme soit en réalité contenue dans $\text{GL}_n(E)$ où E désigne une extension finie du corps \mathbb{Q}_l). On peut identifier $\overline{\mathbb{Q}_l}$ à \mathbb{C} mais il n'y a pas de manière canonique de le faire. Pour la traduction dans le cas complexe, on considère les représentations

$$\rho' : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

qui induisent des systèmes locaux (complexes).

Remarquons que tous les homomorphismes

$$\tau : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$$

ne s'étendent pas nécessairement à un homomorphisme continu $\widehat{\pi_1(X)} \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$. Dans cette thèse, on choisit de travailler avec la plus grande classe de systèmes locaux complexes qui correspondent à des représentations de $\pi_1(X)$. Il existe une notion de faisceaux pervers correspondant à ces derniers qui est nécessaire pour le cas général :

Conjecture 1. *Soit X une courbe lisse projective et irréductible sur \mathbb{C} et soit E un système local irréductible de rang n sur X . Alors il existe un (unique) faisceau pervers \mathcal{K} sur $\text{Bun}_{n,X}$ irréductible sur chaque composante connexe de $\text{Bun}_{n,X}$ tel que $\forall i = 1 \dots n$, on ait $H_i(\mathcal{K}) \simeq (\wedge^i E) \boxtimes \mathcal{K}$.*

Nous allons nous intéresser à des cas particuliers du théorème, où seuls les systèmes locaux sur l'ensemble $\text{Bun}_{n,X}(\mathbb{C})$ des \mathbb{C} -points du champ $\text{Bun}_{n,X}$ sont impliqués, en

particulier le cas $n = 1$. On a vu que la catégorie des systèmes locaux est équivalente à celle des connexions donc on a un énoncé similaire en remplaçant le système local E par une connexion (\mathcal{V}, ∇) .

Dans le cas où $n = 1$, on va énoncer et prouver le théorème pour la variété algébrique $\text{Pic}X$ au lieu de l'ensemble $\text{Bun}_{1,X}(\mathbb{C})$ des \mathbb{C} -points du champs $\text{Bun}_{1,X}$ et en utilisant les connexions plutôt que les systèmes locaux. Il est légitime de remplacer $\text{Bun}_{1,X}$ par $\text{Pic}X$ puisque le premier ensemble est l'ensemble des fibrés en droite sur X et le second est l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droite sur X .

III.2 Le cas \mathbb{G}_m

Dans cette section, on s'intéresse aux connexions de rang 1 sur une courbe X de genre $g > 0$. Une telle connexion a un groupe de Galois différentiel inclus dans \mathbb{G}_m (Cf [vdPS]).

Seul le champ $Hecke_1$ n'est pas vide, puisque tous les fibrés vectoriels sont de rang 1. De plus, l'application $Hecke_1(\mathbb{C}) \rightarrow X \times \text{Bun}_{1,X}(\mathbb{C})$ est un isomorphisme. En effet, si $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ sont deux fibrés vectoriels de rang 1 vérifiant $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x]))$, on a $\mathcal{M}(-[x]) \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ ce qui impose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(-[x])$.

Ainsi

$$Hecke_1(\mathbb{C}) = \{(\mathcal{M}, \mathcal{M}(-[x]), x), x \in |X| \text{ et } \mathcal{M} \text{ fibré de rang 1}\}$$

et on a un morphisme

$$H_1 : X \times \text{Bun}_{1,X} \rightarrow \text{Bun}_{n,X}$$

donné par $H_1(x, \mathcal{L}) = \mathcal{L}([x])$. On note encore H_1 le morphisme

$$H_1 : X \times \text{Pic}X \rightarrow \text{Pic}X$$

donné par $H_1(x, [\mathcal{L}]) = [\mathcal{L}([x])]$.

Proposition III.2.1. *Soit (\mathcal{E}, ∇) une connexion de rang 1 sur X . Alors il existe une unique connexion (intégrable) $(\mathcal{K}, \nabla_{\mathcal{K}})$ de rang 1 sur $\text{Pic}X$ vérifiant $H_1^* \mathcal{K} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}$, où l'isomorphisme désigne ici un isomorphisme de connexions.*

Pour la construction de \mathcal{K} , on imite la preuve de Deligne de la correspondance de Langlands géométrique pour le cas GL_1 (Cf [Fre]). Notons \mathcal{K}_d la restriction de \mathcal{K} à $\text{Pic}^d X$. Soit n un entier tel que $n > 2g - 2$ où g est le genre de X .

III.2.1 Résultats préliminaires

Comme avant, X est une courbe lisse projective et irréductible au-dessus de \mathbb{C} . On note X^n le produit de n copies de X où on suppose $n > 2g - 2$. Sur cette variété algébrique de dimension n , on a une connexion intégrable de rang 1 immédiate $\mathcal{E}^n := \mathcal{E} \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{E}$ associée à la connexion \mathcal{E} sur X .

Le groupe des permutations \mathfrak{S}_n agit sur X^n et \mathcal{E}^n de façon claire. Ceci induit donc une connexion intégrable $\mathcal{E}^{(n)}$ sur le quotient $X^{(n)} = X^n / \mathfrak{S}_n$ qui est non singulier (Cf [Mil]). Cette connexion est définie localement par

$$\mathcal{E}^{(n)}(\pi_n(U)) := \mathcal{E}^n(\pi_n^{-1}(\pi_n(U)))^{\mathfrak{S}_n}$$

où $\pi_n : X \rightarrow X^{(n)}$ et U est un ouvert de X^n . En d'autres termes, $\mathcal{E}^{(n)}$ est définie localement comme les éléments de \mathcal{E}^n invariants sous \mathfrak{S}_n . On note B_n l'application naturelle $X \times X^n \rightarrow X^{(n)}$. Notons $\overline{(x_1, \dots, x_n)}$ l'image de (x_1, \dots, x_n) dans X^n / \mathfrak{S}_n , et

$$\beta_n : \begin{array}{ccc} X \times X^{(n)} & \rightarrow & X^{(n+1)} \\ (x, \overline{(x_1, \dots, x_n)}) & \mapsto & \overline{(x, x_1, \dots, x_n)} \end{array}$$

On peut montrer que $\beta_n^* \mathcal{E}^{(n+1)} \simeq E \boxtimes \mathcal{E}^{(n)}$.

On note ρ la représentation de $\pi_1(X)$ associée à \mathcal{E} . Rappelons que l'on omet de mentionner le point base du groupe fondamental par simplicité.

On considère maintenant le morphisme naturel $f_n : X^{(n)} \rightarrow \text{Pic}^n X$ qui associe le diviseur $[x_1 + \dots + x_n]$ au n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in X^{(n)}$. Montrons que les fibres de ce morphisme sont des espaces projectifs de dimension $n - g$. Soit D un diviseur de degré n , $f_n^{-1}(D)$ est alors en bijection avec l'ensemble $|D|$ des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D . Les éléments de $|D|$ sont en bijection avec l'espace

$$(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

On note $l(D) := \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ de sorte que la dimension de $|D|$ est $l(D) - 1$ (Cf [Har]). On rappelle que le théorème de Riemann-Roch donne

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

pour tout diviseur D sur une courbe de genre g . (Cf [Har])

En appliquant ceci au diviseur canonique, on montre que ce dernier est de degré $2g - 2$. On a d'autre part :

Lemme III.2.2. *Soit D un diviseur sur une courbe X . Alors si $l(D) \neq 0$, on doit avoir $\deg D \geq 0$. De plus, si $l(D) \neq 0$ et $\deg D = 0$, on doit avoir $D \sim 0$ c'est-à-dire $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$.*

([Har])

Ce lemme nous permet de conclure que pour $\deg D > 2g - 2$, on a

$$l(D) = \deg D + g - 1.$$

En effet, $K - D < 0$ implique $l(K - D) = 0$. Ainsi on a $l(D) > 0$ dans ce cas, ce qui permet de dire qu'il existe au moins un diviseur effectif linéairement équivalent à D .

Dans le cas qui nous intéresse, on a $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = n + g - 1$, donc chaque fibre du morphisme est en bijection avec \mathbb{P}^{n-g} . Observons maintenant comment cela peut se traduire sur les groupes fondamentaux. Nous allons utiliser le fait qu'une fibration de Serre donne une longue suite d'homotopie (Cf Appendix B).

Si on montre que $f_n : X^{(n)} \rightarrow \text{Pic}^n X$ est une fibration pour $n > 2g - 2$, alors le théorème B.0.9 nous donne une longue suite d'homotopie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_2(\text{Pic}^n X) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^{n-g}) \rightarrow \pi_1(X^{(n)}) \xrightarrow{p} \\ \pi_1(\text{Pic}^n X) \rightarrow \pi_0(\mathbb{P}^{n-g}) \rightarrow \pi_0(X^{(n)}) \rightarrow \pi_0(\text{Pic}^n X) \end{aligned}$$

On sait que $\pi_0(\mathbb{P}^{n-g})$ est trivial puisque \mathbb{P}^{n-g} est connexe. De plus, $\text{Pic}^n X$ est un espace asphérique, ce qui signifie que tous ses groupes d'homotopie d'ordre supérieur $\pi_i(\text{Pic}^n X)$

pour $i \geq 2$ sont triviaux. On peut prouver ceci en observant que $\text{Pic}^0 X$ admet \mathbb{C}^g comme revêtement universel et les groupes d'homotopie d'ordre supérieur (pour $i \geq 2$) de $\text{Pic}^0 X$ et \mathbb{C}^g sont isomorphes (Cf [Gre]). Puisque $\pi_i(\mathbb{C}^g)$ est trivial pour tout i et $\pi_1(F)$ est également trivial, la suite exacte donnée par le théorème B.0.9 est simplement un isomorphisme entre $\pi_1(X^{(n)})$ et $\pi_1(\text{Pic}^n X)$.

Il nous suffit donc de prouver le résultat suivant :

Lemme III.2.3. *Lorsque $n > 2g - 2$, l'application f_n est une fibration localement triviale.*

Démonstration. Pour la topologie complexe, le résultat provient du fait que $\text{Pic} X$ est lisse et chaque fibre est lisse et de même dimension. Alors l'application est topologiquement localement triviale (Cf [Sha2, p137]). Nous avons donc prouvé que $f_n : X^{(n)} \rightarrow \text{Pic}^n X$ est une fibration de fibre \mathbb{P}^{n-g} pour $n > 2g - 2$. \square

III.2.2 Construction de la connexion

On a vu que l'application $f_n : X^{(n)} \rightarrow \text{Pic}^n X$ était une fibration localement triviale et la fibre \mathbb{P}^{n-g} a un groupe fondamental trivial. D'après le théorème B.0.9, on a donc un isomorphisme

$$\tilde{f}_n : \pi^1(X^{(n)}) \xrightarrow{\sim} \pi^1(\text{Pic}^n X)$$

donné par l'application induite par f_n .

On note $(\mathcal{K}_n, \nabla_n)$ la connexion sur $\text{Pic}^n X$ déduite de $\mathcal{E}^{(n)}$ par cet isomorphisme. Plus précisément, la connexion $\mathcal{E}^{(n)}$ est associée à une représentation ρ_n de $\pi_1(X^{(n)})$. Grâce à l'isomorphisme, on peut définir une représentation η_n de $\pi_1(\text{Pic} X)$. Cette dernière est associée à une connexion $(\mathcal{K}_n, \nabla_n)$ qui est unique à isomorphisme près. Elle vérifie la propriété $f_n^* \mathcal{K}_n \cong \mathcal{E}^{(n)}$ (isomorphisme de connexions) par équivalence entre la catégorie des connexions sur X et celle des représentations de $\pi_1(X)$.

Il reste à montrer

$$H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1} \simeq \mathcal{K}_n \boxtimes E.$$

Montrons tout d'abord que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times X^{(n)} & \xrightarrow{\beta_n} & X^{(n+1)} \\ \downarrow (Id, f_n) & & \downarrow f_{n+1} \\ X \times \text{Pic}^n X & \xrightarrow{H_{1,n}} & \text{Pic}^{n+1} X \end{array}$$

On a

$$(id, f_n)^* H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1} = \beta_n^* f_{n+1}^* \mathcal{K}_{n+1} \simeq \beta_n^* \mathcal{E}^{(n+1)} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E}^{(n)} = (Id, f_n)^* \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_n$$

Il reste à montrer que ceci implique bien $H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_n$. La représentation associée à $(Id, f_n)^* \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_n$ est $(\rho \otimes \eta_n) \circ (Id, \tilde{f}_n)$, tandis que celle associée à $(Id, f_n)^* H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1}$ est $\eta_{n+1} \circ \widetilde{H_{1,n}} \circ (id, \tilde{f}_n)$. Comme les deux connexions sont égales, les représentations sont isomorphes. Pour simplifier les notations, notons $\rho_A \circ (Id, \tilde{f}_n)$ et $\rho_B \circ (Id, \tilde{f}_n)$ ces deux représentations. Par définition, il existe $\tau \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\tau \rho_A \circ (Id, \tilde{f}_n)(\gamma) = \rho_B \circ (Id, \tilde{f}_n)(\gamma) \tau, \forall \gamma \in \pi_1(X \times X^{(n)}).$$

Puisque (Id, \tilde{f}_n) est un isomorphisme, on a

$$\tau \rho_A(\gamma) = \rho_B(\gamma) \tau, \forall \gamma \in \pi_1(X \times \text{Pic}^n X).$$

donc les représentations ρ_A et ρ_B sont isomorphes ce qui se traduit par

$$H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_n, \forall n > 2g - 2.$$

Il reste maintenant à définir \mathcal{K}_n lorsque $n \leq 2g - 2$. On va la construire grâce à K_{2g-1} : La connexion $H_{1,2g-1}^* \mathcal{K}_{2g-1}$ est intégrable sur $X \times \text{Pic}^{2g-2} X$. Elle correspond à une représentation de

$$\pi_1(X \times \text{Pic}^{2g-2} X) = \pi_1(X) \times \pi_1(\text{Pic}^{2g-2} X),$$

que l'on peut décomposer en une représentation de $\pi_1(X)$ et une représentation de $\pi_1(\text{Pic}^{2g-2} X)$. Il existe alors $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{K}_{2g-2}, \nabla_{2g-2})$ deux connexions intégrables sur X et $\text{Pic}^{2g-2} X$ respectivement correspondant à ces deux représentations. Leur produit externe est une connexion sur $X \times \text{Pic}^{2g-2} X$, donc $H_{1,2g-1}^* \mathcal{K}_{2g-1} \cong \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-2}$ par unicité (isomorphisme de connexion).

Il reste à montrer que $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}$. Pour cela, on considère l'application

$$\begin{aligned} f : X \times X \times \text{Pic}^{2g-2} &\rightarrow \text{Pic}^{2g} X \\ (x, y, \mathcal{L}) &\mapsto \mathcal{L}([x] + [y]) \end{aligned}$$

On décompose f de deux façons :

1. $f : (x, y, \mathcal{L}) \mapsto (x, \mathcal{L}([y])) \mapsto \mathcal{L}([x] + [y])$
2. $f : (x, y, \mathcal{L}) \mapsto (y, \mathcal{L}([x])) \mapsto \mathcal{L}([x] + [y])$

Plus rigoureusement, notons

$$p_1(x, y, \mathcal{L}) = x, \quad p_2(x, y, \mathcal{L}) = y, \quad p_3(x, y, \mathcal{L}) = \mathcal{L}$$

les différentes projections. On a alors

1. Dans la première décomposition, $f = H_{1,2g-1} \circ (p_1, H_{1,2g-2}(p_2, p_3))$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
f^* \mathcal{K}_{2g} &= (p_1, H_{1,2g-2}(p_2, p_3))^* H_{1,2g-1}^* \mathcal{K}_{2g} \\
&\simeq (p_1, H_{1,2g-2}(p_2, p_3))^* (\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-1}) \\
&= p_1^* \mathcal{E} \otimes (p_2, p_3)^* H_{1,2g-2}^* \mathcal{K}_{2g-1} \\
&\simeq p_1^* \mathcal{E} \otimes p_2^* \mathcal{F} \otimes p_3^* \mathcal{K}_{2g-2} \\
&= \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-2}
\end{aligned}$$

2. et dans la deuxième décomposition, $f = H_{1,2g-1} \circ (p_2, H_{1,2g-2}(p_1, p_3))$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
f^* \mathcal{K}_{2g} &= (p_2, H_{1,2g-2}(p_1, p_3))^* H_{1,2g-1}^* \mathcal{K}_{2g} \\
&\simeq (p_2, H_{1,2g-2}(p_1, p_3))^* (\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-1}) \\
&= p_2^* \mathcal{E} \otimes (p_1, p_3)^* H_{1,2g-2}^* \mathcal{K}_{2g-1} \\
&\simeq p_2^* \mathcal{E} \otimes p_1^* \mathcal{F} \otimes p_3^* \mathcal{K}_{2g-2} \\
&= \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-2}
\end{aligned}$$

On a donc

1. $f^* \mathcal{K}_{2g} = \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-1}$ et
2. $f^* \mathcal{K}_{2g} = \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-1}$

Par unicité, on a alors $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}$, donc $H_{1,2g-1}^* \mathcal{K}_{2g-1} \cong \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_{2g-2}$. On définit ainsi par récurrence descendante tous les \mathcal{K}_n qui vérifient par construction

$$H_{1,n}^* \mathcal{K}_{n+1} \cong \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}_n, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ d'où}$$

$$H_1^* \mathcal{K} \cong \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}$$

ce qui achève la preuve.

III.3 Le cas \mathbb{G}_a

Le groupe \mathbb{G}_a identifié au sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \right\}$$

de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et on considère les connexions de rang 2 sur X ayant un groupe de Galois différentiel inclus dans \mathbb{G}_a . Ces connexions admettent une suite exacte courte (de connexions)

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow (\mathcal{E}, \nabla) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est muni de la connexion triviale.

Pour montrer ceci, on considère la représentation $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}_2$ associée à (\mathcal{E}, ∇) . Une telle représentation peut être identifiée à un $\pi_1(X)$ -module, c'est-à-dire à \mathbb{C}^2 muni de l'action de $\pi_1(X)$ induite par ρ . La clôture Zariski de l'image de ρ est égale au groupe de Galois différentiel de la connexion (\mathcal{E}, ∇) , donc elle est incluse dans \mathbb{G}_a et on a en particulier $\mathrm{im} \rho \subset \mathbb{G}_a$. La représentation ρ , ou plus exactement le $\pi_1(X)$ -module associé, admet une suite exacte courte de $\pi_1(X)$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

où \mathbb{C} est le $\pi_1(X)$ -module trivial de dimension 1.

On obtient donc une suite exacte de représentations de $\pi_1(X)$, les deux extrémités étant des représentations triviales. Par équivalence des catégories énoncée dans la section I.1, on a donc une suite exacte de connexions, les représentations triviales correspondant au faisceau \mathcal{O}_X muni de la connexion triviale et ceci prouve qu'une telle connexion vérifie

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow (\mathcal{E}, \nabla) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est muni de la connexion triviale.

Le sous-champ Bun' de Bun_2 que l'on doit considérer pour traiter ces connexions est celui des fibrés vectoriels \mathcal{M} de rang 2 sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ satisfaisant une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T} \rightarrow 0$$

On observe que l'ensemble $\mathrm{Bun}'(\mathbb{C})$ des \mathbb{C} -points de Bun' peut être vu comme l'espace affine

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^g.$$

On observe de plus qu'il n'y a pas de correspondance de Hecke pour cette situation. En effet, que l'on considère $\mathrm{Hecke}_1(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{Hecke}_2(\mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{M}(-[x]) \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M},$$

puisque $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \cong (\mathcal{O}/\mathcal{O}_X(-[x]))^i$.

- Pour $i = 2$, ceci impose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(-[x])$,
- pour $i = 1$, ceci implique $\deg \mathcal{M}' < \deg \mathcal{M} = 0$ donc à nouveau \mathcal{M}' ne peut être une extension de \mathcal{O}_X par \mathcal{O}_X .

Nous sommes donc forcés de considérer un sous groupe plus grand et une plus grande famille de connexions de rang 2.

Regardons le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$$

qui est $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$. La famille de connexions sur X que nous devons considérer est celle des connexions vérifiant une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow (\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}) \rightarrow (\mathcal{M}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}) \rightarrow 0.$$

Le champ Bun'_2 correspondant est celui des fibrés vectoriels satisfaisant une telle suite exacte (sans les connexions). Plus précisément, $\text{Bun}'_2(T)$ est l'ensemble des fibrés vectoriels \mathcal{M} de rang 2 sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ satisfaisant une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow 0$$

où \mathcal{M}_1 est un fibré vectoriel de rang 1 sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. C'est sur l'ensemble des \mathbb{C} -points du champ Bun'_2 que l'on veut établir la correspondance.

Les seules correspondances de Hecke possibles sont $Hecke_1$ et $Hecke_2$. On remarque que le fibré vectoriel qui apparaît au centre de la suite exacte, et élément de Bun'_2 , doit avoir un degré pair, égal à $2 \deg \mathcal{M}_1$ si \mathcal{M} satisfait

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow 0$$

Dans le cas de $Hecke_1$ (ou plus exactement $Hecke_1(\mathbb{C})$), on a $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x])$ donc

$$\mathcal{M}(-[x]) \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$$

et puisque \mathcal{M} est de rang 2, on a aussi

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}(-[x]) \simeq (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x]))^2,$$

ce qui implique $\mathcal{M}(-[x]) \subsetneq \mathcal{M}' \subsetneq \mathcal{M}$, puis $\deg \mathcal{M}(-[x]) < \deg \mathcal{M}' < \deg \mathcal{M}$, ce qui impose $\deg \mathcal{M}' = \deg \mathcal{M} - 1$. Puisque les degrés ne peuvent pas être simultanément pairs, la seule correspondance pouvant avoir lieu dans cette situation est donc $Hecke_2$. Montrons que dans ce cas, si $\mathcal{M}', \mathcal{M}$ sont des éléments de $\text{Bun}'_2(\mathbb{C})$, et $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x]))^2$ alors ceci impose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(-[x])$. Comme d'habitude, on a

$$\mathcal{M}(-[x]) \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}.$$

Comme le faisceau \mathcal{M} est de rang 2, on a

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}(-[x]) \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x]))^2$$

ce qui impose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(-[x])$. On se retrouve donc dans une situation analogue au cas précédent : On a un isomorphisme entre $Hecke_2(\mathbb{C})$ et $X \times \text{Bun}'_2(\mathbb{C})$ ce qui nous donne donc un morphisme

$$H_2 : \begin{cases} X \times \text{Bun}'_2(\mathbb{C}) & \rightarrow \text{Bun}'_2(\mathbb{C}) \\ (x, \mathcal{M}) & \mapsto (\mathcal{M}([x])) \end{cases}$$

Au lieu de considérer l'ensemble $\text{Bun}'_2(\mathbb{C})$, on va travailler avec la variété algébrique $\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g$ puisque comme dans le cas classique, on a une application entre les deux ensembles donnée par

$$(\mathcal{M} \text{ avec } 0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \rightarrow 0) \mapsto ([\mathcal{M}_1], 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{M}_1^{-1} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0)$$

On écrit encore H_2 pour le morphisme

$$H_2 : \begin{cases} X \times \text{Pic}X \times \mathbb{C}^g & \rightarrow \text{Pic}X \times \mathbb{C}^g \\ (x, [\mathcal{M}_1], v) & \mapsto ([\mathcal{M}_1([x])], v) \end{cases}$$

D'après l'identification faite ci-dessus pour les fibrés vectoriels, les connexions qui nous intéressent peuvent être données par une paire $(\mathcal{P}, 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0)$ ou plus simplement par une paire $((\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}), (\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}}))$, $(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}})$ étant une connexion de rang 1 et $(\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}})$ une connexion de rang 2 vérifiant

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

et $\mathcal{E} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{C}$. On suppose à nouveau que les faisceaux \mathcal{O}_X sont munis de la connexion triviale. La connexion $(\mathcal{C}, \nabla_{\mathcal{C}})$ a donc un groupe de Galois différentiel inclus dans \mathbb{G}_a .

Proposition III.3.1. *Soit $\mathcal{E} = ((\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}), (\mathcal{A}, \nabla_{\mathcal{A}}))$ une connexion de rang 2 sur X ayant un groupe de Galois différentiel inclus dans $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$. Il existe une connexion intégrable \mathcal{K} de rang 2 sur $\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g$ satisfaisant $H_2^* \mathcal{K} \cong \wedge^2 \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}$ (isomorphisme de connexions).*

Démonstration. Comme dans le cas précédent, on écrit

$$\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g = \bigcup \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g.$$

On va construire \mathcal{K}_d , la restriction de \mathcal{K} à $\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$. On cherche \mathcal{K}_d sous la forme d'un produit $\mathcal{L}_d \otimes \mathcal{A}_d$ d'une connexion \mathcal{L}_d de rang 1 et d'une connexion \mathcal{A}_d de rang 2 et qui admet une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g} \rightarrow \mathcal{A}_d \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g} \rightarrow 0,$$

où le faisceau $\mathcal{O}_{\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g}$ est muni de la connexion triviale. Ici le faisceau \mathcal{K}_d est muni de la connexion $\nabla_{\mathcal{L}_d} \otimes \nabla_{\mathcal{A}_d}$. Nous ommettrons de préciser les connexions et nous n'écrivons que les fibrés vectoriels.

D'après le cas \mathbb{G}_m , on sait qu'il existe une connexion $\tilde{\mathcal{K}}$ sur $\text{Pic}X$ associée à la connexion de rang 1 $\mathcal{P}^{\otimes 2}$ sur X . On pose $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{K}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g}$ et on obtient ainsi une connexion sur $\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g$. On veut maintenant construire une connexion de rang 2. Comme \mathbb{C}^g a un groupe fondamental trivial, on a

$$\pi_1(\text{Pic}X \times \mathbb{C}^g) \cong \pi_1(\text{Pic}^1 X) \simeq \pi_1(X)_{ab}.$$

De plus, le groupe de Galois différentiel de la connexion \mathcal{C} est inclus dans \mathbb{G}_a donc celle-ci correspond à une représentation $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{G}_a$. Par l'isomorphisme ci-dessus, elle induit une représentation $\pi_1(\text{Pic}^1 X \times \mathbb{C}^g) \rightarrow \mathbb{G}_a$ qui correspond à une connexion que l'on note \mathcal{A}_1 sur $\text{Pic}X_{\text{times}}\mathbb{C}^g$. Fixons un point $P_0 \in |X|$. On a des isomorphismes naturels

$$t_n : \text{Pic}^1 X \times \mathbb{C}^g \rightarrow \text{Pic}^{d+1} X$$

donnés par $(\mathcal{L}, v) \mapsto (\mathcal{L}(d[P_0]), v)$. Ces isomorphismes donnent des isomorphismes notés \tilde{t}_n entre les groupes fondamentaux (et indépendants du choix de P_0). Ainsi, pour tout entier d , on a un isomorphisme $\pi_1(X)_{ab} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g)$ qui donne une connexion \mathcal{A}_d sur $\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$.

Il reste enfin à vérifier que la connexion \mathcal{K}_d sur $\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$ définie par $\mathcal{K}_d := \mathcal{L}_d \boxtimes \mathcal{A}_d$ possède bien la propriété requise :

$$H_2^* \mathcal{K} \cong \wedge^2 \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}.$$

On considère l'application suivante :

$$H_{2,d} : X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g \rightarrow \text{Pic}^{d+1} X \times \mathbb{C}^g.$$

Notons $\tilde{\mathcal{K}}_d$ la restriction à $\text{Pic}^d X$ de la connexion $\tilde{\mathcal{K}}$ (qui est associée à $\mathcal{P}^{\otimes 2}$). Par définition, on a

$$\mathcal{L}_d = \tilde{\mathcal{K}}_d \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g}$$

où le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^g}$ est muni de la connexion triviale. Le faisceau \mathcal{L}_d vérifie alors

$$H_{2,d}^* \mathcal{L}_{d+1} = H_{1,d}^* \tilde{\mathcal{K}}_{d+1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g} \cong \mathcal{P}^{\otimes 2} \boxtimes \tilde{\mathcal{K}}_d \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g} = \mathcal{P}^{\otimes 2} \boxtimes \mathcal{L}_d.$$

Remarquons maintenant que

$$\wedge^2 \mathcal{E} = \wedge^2 (\mathcal{C} \otimes \mathcal{P}) = \wedge^2 \mathcal{C} \otimes \mathcal{P}^{\otimes 2}$$

puisque \mathcal{P} est de rang 1. D'autre part, \mathcal{C} admet une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 1$$

donc on a $\wedge^2 \mathcal{C} = \mathcal{O}_X$. Il nous suffit donc de montrer que l'on a

$$H_{2,n}^* \mathcal{A}_{d+1} \cong \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{A}_d,$$

où \mathcal{O}_X est muni de la connexion triviale. Pour prouver cela on écrit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g & \xrightarrow{H_{2,d}} & \text{Pic}^{d+1} X \times \mathbb{C}^g \\ F \downarrow & \nearrow u_d \circ p_2 & \\ X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g & & \end{array}$$

où p_2 désigne la deuxième projection $X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g \rightarrow \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$, u_d l'isomorphisme entre $\text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$ et $\text{Pic}^{d+1} X \times \mathbb{C}^g$ défini par $(\mathcal{L}, \nu) \mapsto (\mathcal{L}([P_0]), \nu)$ et F l'isomorphisme $(x, \mathcal{L}) \mapsto (x, \mathcal{L}([x] - [P_0]))$. Par commutativité de ce diagramme, on a $H_{2,d} = u_d \circ p_2 \circ F$ donc il nous suffit de montrer que $F^* p_2^* u_d^* \mathcal{A}_{d+1} \cong \mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X$. Par construction, on a $u_d^* \mathcal{A}_{d+1} \cong \mathcal{A}_d$. En effet, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g & \xrightarrow{u_d} & \text{Pic}^{d+1} X \times \mathbb{C}^g \\ t_d \uparrow & \nearrow t_{d+1} & \\ \text{Pic}^1 X & & \end{array}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X = p_2^* \mathcal{A}_d \otimes_{\mathcal{O}_{X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g}} p_1^* \mathcal{O}_X$$

et

$$p_1^* \mathcal{O}_X = p_1^{-1} \mathcal{O}_X \otimes_{p_1^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g} \cong \mathcal{O}_{X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g}$$

d'où

$$\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X \cong p_2^* \mathcal{A}_d \text{ (toujours en tant que connexions).}$$

Enfin montrons que

$$F^*(\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X.$$

Pour cela, passons aux représentations ; si η désigne la représentation associée au faisceau $\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X$, la représentation associée à $F^*(\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X)$ est $\eta \circ F$ et nous allons montrer que ces deux représentations sont égales en montrant que les lacets L et $F(L)$ sont homotopes, $\forall L \in \pi_1(X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g)$. Pour simplifier les notations, nous écrirons l'homotopie avec les diviseurs. Soit donc

$$t \mapsto L(t) = (x(t), D(t), \nu(t))$$

un lacet de $X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g$. L'application H définie par

$$H(s, t) = (x(t), D(t) + x(ts) - P_0)$$

transforme continûment L en $F(L)$, donc

$$\eta(L) = \eta \circ F(L), \quad \forall L \in \pi_1(X \times \text{Pic}^d X \times \mathbb{C}^g).$$

Ceci implique que les faisceaux $\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X$ et $F^*(\mathcal{A}_d \boxtimes \mathcal{O}_X)$ sont associés à la même représentation donc sont isomorphes. La connexion \mathcal{K}_d vérifie donc bien la propriété de Hecke. \square

Remarque III.3.2. *Dans cet exemple, nous considérons des connexions dont le groupe de Galois différentiel est inclus dans $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ qui n'est pas réductif. Nous sommes donc légèrement en dehors du cadre de la correspondance géométrique de Langlands ce qui pourrait expliquer pourquoi seul Hecke_2 est satisfait.*

III.4 Le cas Borel \mathbb{B}

Comme précédemment, X est une courbe lisse projective et irréductible sur \mathbb{C} .

III.4.1 Situation

On considère maintenant les connexions de rang 2 ayant un groupe de Galois différentiel inclus dans le groupe de Borel. On note ce dernier \mathbb{B} et on l'identifie au sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$$

de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

On se donne une connexion \mathcal{A} sur X vérifiant une suite exacte de connexions de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_2 \rightarrow 0,$$

où \mathcal{P}_i sont des connexions de rang 1. On voudrait établir la correspondance de Hecke sur l'ensemble des points du champs Bun' défini comme suit : Pour un schéma T sur \mathbb{C} , $\mathrm{Bun}'(T)$ est l'ensemble des fibrés vectoriels \mathcal{M} de rang 2 sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ satisfaisant une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow 0$$

où \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont des fibrés en droite sur $X \times_{\mathbb{C}} T$. Dans le cas $\mathrm{Hecke}_2(\mathbb{C})$, comme précédemment, on peut montrer que l'on a $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(-x)$ lorsque $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq \left(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x]) \right)^2$.

Observons ce qui se passe dans le cas éventuel de $\mathrm{Hecke}_1(\mathbb{C})$: on a $\mathcal{M}(-[x]) \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-[x])$. Puisque l'on a une surjection $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_2$, on a une application de $\alpha' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{L}_2$. Il y a alors deux cas possibles :

1. Si α' est surjective alors son noyau est inclus dans celui de α et de part les degrés, on doit avoir que son noyau est $\mathcal{L}_1(-[x])$ c'est-à-dire que \mathcal{M}' vérifie la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1(-[x]) \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow 0.$$

Les différents \mathcal{M}' possibles sont ici paramétrisés par \mathbb{C} .

2. Si α' n'est pas surjective, son image est incluse dans celle de α et son noyau doit toujours être inclus dans celui de α et \mathcal{M}' vérifie alors

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{L}_2(-[x]) \rightarrow 0.$$

Il n'y a qu'un seul \mathcal{M}' comme ceci.

On voit donc que pour la première fois, $Hecke_1(\mathbb{C})$ et $X \times \text{Bun}'(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes et nous ne pouvons donc pas définir une application

$$X \times \text{Bun}'(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bun}'(\mathbb{C}).$$

telle que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}_1(\mathbb{C}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \text{Bun}'(\mathbb{C}) & & X \times \text{Bun}'(\mathbb{C}) \end{array}$$

En effet, pour $(x, \mathcal{M}') \in X \times \text{Bun}'$, le fibré vectoriel \mathcal{M} tel que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) \in \text{Hecke}_1(\mathbb{C})$ n'est pas unique. Ainsi pour $\text{Hecke}_1(\mathbb{C})$ il semble qu'il n'existe pas de preuve élémentaire.

Nous allons maintenant tenter une construction élémentaire pour $\text{Hecke}_2(\mathbb{C})$ et montrer que cela débouche sur une contradiction.

III.4.2 Le cas Hecke_2

Dans ce cas, $\text{Hecke}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à $X \times \text{Bun}'(\mathbb{C})$, on a donc une application

$$H_2 : X \times \text{Bun}'(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bun}'(\mathbb{C})$$

donnée par $(x, \mathcal{L}) \mapsto \mathcal{L}([x])$. On va travailler sur les composantes connexes de l'espace $\text{Bun}'(\mathbb{C})$ c'est-à-dire $\text{Bun}'(\mathbb{C}) := \coprod_{d_1, d_2 \in \mathbb{Z}} \text{Bun}'(\mathbb{C})_{d_1, d_2}$ où $\text{Bun}'_{d_1, d_2}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des fibrés vectoriels \mathcal{M} vérifiant

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow 0$$

avec $\text{rg}(\mathcal{L}_i) = 1$ et $\text{deg } \mathcal{L}_i = d_i$. Comme avant, l'ensemble des classes d'isomorphie de $\text{Bun}'_{d_1, d_2}(\mathbb{C})$, que l'on notera $B(d_1, d_2)$, a une structure naturelle de variété algébrique. Nous allons étudier la correspondance de Hecke par rapport à $B = \sqcup B(d_1, d_2)$. Fixons les degrés d_1 et d_2 de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . On a un morphisme

$$\begin{cases} B(d_1, d_2) & \rightarrow \text{Pic}^{d_1} X \times \text{Pic}^{d_2} X \\ [\mathcal{M}] & \mapsto ([\mathcal{L}_1], [\mathcal{L}_2]) \end{cases}$$

Ce morphisme est clairement surjectif et les fibres sont de la forme

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) = H^1(X, \mathcal{L}_2^{-1} \otimes \mathcal{L}_1).$$

(Cf [CE]).

D'autre part, on a $\text{deg}(\mathcal{L}_2^{-1} \otimes \mathcal{L}_1) = d_1 - d_2$. Par Riemann-Roch, si $d_1 - d_2 > 2g - 2$, on a

$$B(d_1, d_2) \simeq \text{Pic}^{d_1} X \times \text{Pic}^{d_2} X.$$

On pose

$$H_{2,d_1,d_2} : \begin{cases} B(d_1, d_2) & \rightarrow B(d_1 + 1, d_2 + 1) \\ (x, \mathcal{M}) & \mapsto (\mathcal{M}([x])) \end{cases},$$

Étant donnée une connexion \mathcal{E} de rang 2 sur X , on cherche donc une connexion \mathcal{K} sur B satisfaisant

$$H_2^* \mathcal{K} \simeq \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{K}.$$

On voudrait utiliser l'application $B \rightarrow \text{Pic} X \times \text{Pic} X$ et le cas \mathbb{G}_m pour construire la connexion \mathcal{K} .

III.4.3 Obstruction au cas Borel pour $n > 2$

On suppose que l'on a $d_1 - d_2 > 2g - 2$ et donc $B(d_1, d_2) \simeq \text{Pic}^{d_1} X \times \text{Pic}^{d_2} X$. On se donne une connexion \mathcal{E} sur X ayant un groupe de Galois différentiel non commutatif. On veut construire une connexion sur $\text{Pic}^{d_1} X \times \text{Pic}^{d_2} X$ en utilisant le cas \mathbb{G}_m puis obtenir une connexion sur $B(d_1, d_2)$ grâce à l'isomorphisme. Une telle connexion sur $\text{Pic}^{d_1} X \times \text{Pic}^{d_2} X$ correspond à une représentation de $\pi_1(\text{Pic}^{d_1} X) \times \pi_1(\text{Pic}^{d_2} X)$, or ce groupe est commutatif donc son image l'est aussi. On obtient donc par l'isomorphisme une représentation de $\pi_1(B(d_1, d_2))$ à valeur dans un groupe commutatif. La connexion sur $B(d_1, d_2)$ associée a donc un groupe de Galois commutatif, contrairement à la connexion \mathcal{E} sur X considérée au départ.

On voit donc que dans ce cas, la méthode 'simple' qui ne considère que les systèmes locaux ne marche pas et qu'il nous faut considérer les faisceaux pervers pour énoncer et prouver la correspondance.

Chapitre IV

Les cas singuliers

IV.1 Équivalences de catégories

On veut établir des équivalences de catégories entre connexions et systèmes locaux dans le cas d'une courbe singulière ou d'une connexion singulière sur une courbe lisse. Il nous faut pour cela définir ce que l'on entend par systèmes locaux et connexions dans les deux cas.

IV.1.1 Cas d'une courbe singulière

Le faisceau des différentielles

On considère une courbe X singulière et réduite sur \mathbb{C} munie d'une structure analytique complexe. On note \mathcal{O}_X son faisceau analytique structural et $s : \tilde{X} \rightarrow X$ sa normalisation. Pour tout point $P \in X$, on note $\mathcal{O}_{X,P}$ ou parfois \mathcal{O}_P lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, l'anneau local analytique en P . On veut introduire un "bon" faisceau de formes différentielles sur X et des connexions sur des fibrés vectoriels qui correspondent à des systèmes locaux. On va définir $\underline{\Omega}$ comme étant l'image de l'application $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1 \rightarrow s_*\Omega_{\tilde{X}/\mathbb{C}}^1$ et on notera \underline{d} la composée

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\underline{d}} \Omega_{X/\mathbb{C}}^1 \rightarrow \underline{\Omega}.$$

Le calcul de $\underline{\Omega}_P$ dans les exemples suivants donnera une meilleure compréhension de cet objet.

- Lorsque P est régulier, on a $\underline{\Omega}_P = \Omega_{X,P}^1$.
- Lorsque l'on regarde le cas d'une pointe, c'est-à-dire lorsque $\#s^{-1}(P) = 1$ on n'a pas nécessairement la surjectivité. C'est vrai pour une pointe donnée par l'équation $y^2 = x^3$. En effet, soit $R = \mathbb{C}\{x, y\}/y^2 - x^3 \subset \mathbb{C}\{t\}$. L'inclusion est donnée par $x \mapsto t^2, y \mapsto t^3$ et R est identifié à $\mathbb{C}\{x\} + y\mathbb{C}\{x\}$. Le module universel des différentielles de R sur \mathbb{C} est donc

$$\Omega_{R/\mathbb{C}}^1 = \frac{Rdx \oplus Rdy}{Rd(y^2 - x^3)} = \frac{Rdx \oplus Rdy}{R(-3x^2dx + 2ydy)}.$$

On voit facilement que l'on a $\Omega_{R/\mathbb{C}}^1 = Rdx \oplus (\mathbb{C}dy + \mathbb{C}xdy + \mathbb{C}x^2dy)$ et

$$(\mathbb{C}\{x\} + y\mathbb{C}\{x\})dx \oplus (\mathbb{C}dy + \mathbb{C}xdy + \mathbb{C}x^2dy) \rightarrow \underline{\Omega} \subset \mathbb{C}\{t\}$$

et l'inclusion est donnée par $dx \mapsto 2tdt, dy \mapsto 3t^2dt$. Rappelons que $\underline{\Omega}$ est engendré en tant que R -module par ses deux éléments.

Montrons que $\underline{\Omega} = t\mathbb{C}\{t\}$. L'image d'un élément de $(\mathbb{C}\{x\} + y\mathbb{C}\{x\})$ est de la forme $a_0 + \sum_{n \geq 2} a_n t^n$. Un élément de $(\mathbb{C}\{x\} + y\mathbb{C}\{x\})dx$ s'envoie donc dans $\mathbb{C}tdt + t^3\mathbb{C}\{t\}dt$. L'image de $\mathbb{C}dy$ est $\mathbb{C}t^2dt$ et on voit facilement que $\underline{\Omega}$ ne contient pas $\mathbb{C}dt$. On a donc $\underline{\Omega} = t\mathbb{C}\{t\}$.

Avant de montrer que cette propriété est vérifiée pour une famille de pointes, nous voulons calculer le noyau de l'application $\Omega_P^1 \rightarrow \underline{\Omega}_P$ dans ce cas-là afin de montrer que

ces objets bien que proches sont différents. Dans le calcul précédent, nous avons montré que $\underline{\Omega}$ était engendré par l'image de $(\mathbb{C}\{x\} + y\mathbb{C}\{x\})dx \oplus \mathbb{C}dy$. De plus, les éléments $2xdy - 3ydx$ et $2x^2dy - 3xydy$ appartiennent au noyau et sont en réalité des générateurs de celui-ci. Le noyau est donc de dimension 2 sur \mathbb{C} .

• Rappelons qu'un point P de multiplicité r est appelé **multiple ordinaire** lorsqu'un voisinage de P est isomorphe à un voisinage du point 0 sur la courbe définie par $\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r / x_i x_j = 0 \ \forall i \neq j\}$. De manière équivalente, P est un point multiple ordinaire si

$$\mathcal{O}_P \simeq \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\} / (x_i x_j, i \neq j).$$

On peut donner une autre caractérisation de cette notion en utilisant celle d'éclatement. Ici, l'éclatement d'un point de la courbe signifie l'éclatement de son idéal maximal. Un point singulier de multiplicité r est un point multiple ordinaire si et seulement si $\#s^{-1}(P) = r$ et si sa normalisée est obtenue après un seul éclatement (cf [Sha1],[Sha2]). Soit P un point multiple ordinaire, on a $s^{-1}(P) = \{P_1, \dots, P_r\}$ et on se donne des paramètres locaux t_1, \dots, t_r en chacun des points. La fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{X,P}$ est notée $\widetilde{\mathcal{O}_{X,P}}$. C'est le produit des anneaux locaux $\mathcal{O}_{\widetilde{X},P_i}$, donc on a :

$$\widetilde{\mathcal{O}_{X,P}} = \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}.$$

L'inclusion

$$\mathcal{O}_P \subset \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}$$

est donnée par

$$x_i \mapsto (0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \forall i$$

(où on identifie \mathcal{O}_P à $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_r\} / (x_i x_j, i \neq j)$ par l'isomorphisme donné plus haut). Autrement dit, on a

$$\mathcal{O}_P = \{(f_1, \dots, f_r) \in \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\} / f_1(0) = \dots = f_r(0)\}$$

Le module $(s_*\Omega_{\widetilde{X}}^1)_P$ peut être identifié au module différentiel :

$$d\widetilde{\mathcal{O}_{X,P}} = \mathbb{C}\{t_1\}dt_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}dt_r.$$

Dans le cas d'un point multiple ordinaire, on peut montrer un résultat plus fort que la surjectivité de \underline{d} :

Lemme IV.1.1. *Si P est un point multiple ordinaire alors l'application $\underline{d} : \mathcal{O}_{X,P} \rightarrow \underline{\Omega}_P$ est surjective et on a de plus $\underline{d}m_P^s = m_P^{s-1}\underline{\Omega}$, $\forall s \geq 1$.*

Démonstration. Si P est un point multiple ordinaire, alors R est le sous-anneau de

$$\mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}$$

des r -uplets prenant la même valeur en 0. On a

$$\underline{\Omega}_P = \mathbb{C}\{t_1\}dt_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}dt_r$$

et

$$m_P^s = t_1^s \mathbb{C}\{t_1\} \underline{d}t_1 \oplus \dots \oplus t_r^s \mathbb{C}\{t_r\}.$$

On a donc

$$dm_P^s = t_1^{s-1} \mathbb{C}\{t_1\} \underline{d}t_1 \oplus \dots \oplus t_r^{s-1} \mathbb{C}\{t_r\} \underline{d}t_r.$$

Les éléments de $m_P^{s-1} \underline{\Omega}_P$ sont des sommes d'éléments de la forme $(f_1 dg_1, \dots, f_n dg_n)$ avec $(f_1, \dots, f_r) \in m_P^{s-1}$ et $(g_1, \dots, g_r) \in m_P$. En d'autres termes, $\forall i = 1 \dots r$, on a $f_i \in t_i^{s-1} \mathbb{C}\{t_i\}$ et $g_i(0) = 0$. Il nous suffit de montrer qu'un tel élément $(f_1 dg_1, \dots, f_r dg_r)$ est égal à (dh_1, \dots, dh_r) avec $(h_1, \dots, h_r) \in m_P^s$.

Le résultat est clair pour $s > 1$. Lorsque $s = 1$, on sait qu'il existe un élément (h_1, \dots, h_r) de

$$\tilde{R} = \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_n\}$$

tel que

$$(f_1 dg_1, \dots, f_n dg_n) = (dh_1, \dots, dh_n).$$

Pour avoir le résultat souhaité on doit avoir par exemple $h_i(0) = 0$, $\forall i$. Or on peut clairement faire un tel choix puisque les constantes sont de dérivées nulles donc $\underline{\Omega}$ est égal à $\underline{d}m_P$. Une autre façon de montrer la surjectivité est de remarquer qu'un élément de $(s_* \Omega_X^1)_P$ est de la forme

$$\sum a_{(1,m)} t_1^m dt_1 + \dots + a_{(r,m)} t_r^m dt_r$$

ce qui est égal à

$$\underline{d}\left(\sum \frac{a_{(1,n)}}{m+1} t_1^{m+1} + \dots + \frac{a_{(r,m)}}{m+1} t_r dt_r\right).$$

Le module $\underline{\Omega}_P$ coïncide donc avec $(s_* \Omega_X^1)_P$ et ceci achève de montrer que $\underline{d}m_P^s = m_P^{s-1} \underline{\Omega}$, $\forall s \geq 1$ lorsque P est un point multiple ordinaire. \square

Le lemme précédent motive la définition suivante :

Définition IV.1.2. Soit X une courbe sur \mathbb{C} . On appelle **singularité faible** un point singulier P de X vérifiant $\underline{d}m_P^s = m_P^{s-1} \underline{\Omega}$, $\forall s \geq 1$

On a vu que les points multiples ordinaires étaient des singularités faibles. Dans la section suivante, on va considérer des courbes singulières et déterminer si leurs singularités sont faibles ou non.

Exemples

On commence par rappeler quelques faits sur le conducteur d'un anneau.

Définition IV.1.3. Soit deux anneaux $R_1 \subset R_2$ ayant même anneau total des fractions et tels que R_2 est une extension finie de R_1 . Alors le **conducteur** \mathcal{C} , de R_1 dans R_2 est le plus grand idéal I de R_1 qui est aussi un idéal de R_2 . Dans la suite, on parle du conducteur d'un anneau local en sous-entendant son conducteur dans sa fermeture intégrale.

Remarque IV.1.4.

- Le conducteur \mathcal{C} contient au moins un élément de R_1 qui n'est pas un diviseur de zéro. En effet, on choisit une base e_1, \dots, e_s de R_2 en tant que R_1 -module et on utilise le fait que R_1 et R_2 ont même anneau total des fractions. On peut alors choisir $x \in R_1$ non nul et non diviseur de zéro tel que $xe_i \in R_1, \forall i$. On a alors $xR_2 \subset R_1$ d'où $xR_2 \subset \mathcal{C}$ ce qui implique $x \in \mathcal{C}$.
- Remarquons aussi que lorsque $R_1 \neq R_2$, le conducteur ne peut être égal à R_1 puisqu'il contiendrait alors $1 \in R_1$ donc serait égal à R_2 .

On va calculer explicitement le conducteur de certains anneaux locaux \mathcal{O}_P .

(1) On suppose que P est un point multiple ordinaire. On a

$$\mathcal{O}_P = \{(f_1, \dots, f_r) \in \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\} / f_1(0) = \dots = f_r(0)\}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{O}}_P = \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}$$

donc le plus grand idéal de \mathcal{O}_P qui soit encore un idéal de $\mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}$ est l'idéal maximal

$$m_P = \{(f_1, \dots, f_r) \in \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\} / f_1(0) = \dots = f_r(0) = 0\}.$$

(2) On suppose maintenant que l'anneau local est de la forme $\mathbb{C}\{t^a, t^b + t^c\}$ avec $a < b < c$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Le conducteur est donné par $t^{(a-1)(b-1)}$. On rappelle rapidement la preuve de ce résultat. On note $V = \{v(f), f \in \mathbb{C}\{t^a, t^{b+c}\}, f \neq 0\}$ où v est la valuation usuelle. Le conducteur $t^i\mathbb{C}\{t\}$ est caractérisé par la propriété suivante :

$$\{w \geq d, d \in \mathbb{N}\} \subset V \text{ et } d - 1 \notin V.$$

De plus, on a $V = \{na + mb/n, m \in \mathbb{N}\}$. Soit l le plus grand entier n'appartenant pas à V . On peut alors écrire $l = n_0a + m_0b$ avec $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq m_0 < a$. On doit alors

avoir $n_0 < 0$ et le plus grand l de cette forme est atteint lorsque $n_0 = -1$ et $m_0 = a - 1$ soit $l = -a + (a - 1)b$ et donc $d = (a - 1)(b - 1)$.

(3) On se place maintenant en n'importe quel point singulier P de la courbe. On a

$$\mathcal{O}_P \subset \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\}$$

donc le conducteur est de la forme

$$\mathcal{C} = t_1^{c_1} \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times t_r^{c_r} \mathbb{C}\{t_r\}$$

avec $c_i \geq 0$. En effet, si une coordonnée n'apparaissait pas dans le conducteur, celui-ci ne contiendrait que des diviseurs de zéros ce qui est contradictoire. De plus, on peut montrer qu'en réalité on a $c_i > 0, \forall i$. Supposons par exemple que c_1 soit nul. On note $e = (1, 0, \dots, 0)$ qui est un idempotent non trivial de $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_P$. On a $1 - e \in \mathcal{O}_P$ et $e(1 - e) = 0$. Si e n'appartient pas à m_P , e est inversible donc $1 - e$ est nul ce qui impliquerait que \mathcal{C} contient 1. On a donc $e \in m_P$ et on montre symétriquement que $(1 - e) \in m_P$. Il s'ensuit que leur somme appartient à m_P ce qui contredit $\mathcal{C} \neq \mathcal{O}_P$. On sait donc dorénavant que le conducteur d'un anneau local en un point singulier est de la forme

$$\mathcal{C} = t_1^{c_1} \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times t_r^{c_r} \mathbb{C}\{t_r\}$$

avec $c_i > 0$

- On peut maintenant traiter un premier exemple, celui des courbes singulières spéciales.

Définition IV.1.5. On appelle **courbe singulière spéciale** une courbe singulière dont tous les points singuliers vérifient la propriété suivante : le conducteur de l'anneau local est égal à l'idéal maximal.

On a le résultat suivant :

Lemme IV.1.6. Une courbe singulière spéciale n'a que des singularités légères.

Démonstration. Par hypothèse, chaque anneau local est de la forme $\mathbb{C} + \bigotimes_{i=1}^s t_i^{m_i} \mathbb{C}\{t_i\}$ et le résultat est donc clair. \square

Remarque IV.1.7. On considère maintenant une courbe singulière quelconque X et P un de ses points singuliers. On note $(\mathcal{O}_{X,P})$ l'anneau local en P et $\widetilde{\mathcal{O}}_{X,P}$ sa normalisation. On note P_1, \dots, P_r les points de la normalisée \widetilde{X} de X au-dessus de P et pour chaque point P_i , on note $\mathbb{C}\{t_i\}$ l'anneau local analytique. On a donc

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{X,P} = \bigotimes_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}.$$

On a vu ci-dessus que le conducteur de $\mathcal{O}_{X,P}$ (dans sa normalisation) doit être de la forme $\otimes_{i=1}^s t_i^{m_i} \mathbb{C}\{t_i\}$ où chaque m_i est un entier naturel non nul. L'anneau $\widetilde{\mathcal{O}_{X,P}}$ contient donc l'anneau $\mathbb{C} + \otimes_{i=1}^s t_i^{m_i} \mathbb{C}\{t_i\}$. On note $\mathcal{O}_{X,P,-}$ l'intersection de ce sous-anneau avec $\mathcal{O}_{X,P}$. Ainsi, on a

$$\mathcal{O}_{X,P,-} = \mathbb{C} + \mathcal{C}$$

où \mathcal{C} est le conducteur de $\mathcal{O}_{X,P}$. On note X_- la courbe obtenue à partir de X en remplaçant $\mathcal{O}_{X,P}$ par $\mathcal{O}_{X,P,-}$ pour tous les points singuliers P de X . Le morphisme $X \rightarrow X_-$ est fini et birationnel et la composée $\widetilde{X} \rightarrow X \rightarrow X_-$ donne la normalisation de X_- . Cette construction est la 'meilleure approximation' de X par une courbe spéciale singulière qui est 'plus singulière'.

• Considérons un autre exemple. Soit X la courbe localement donnée par $y^2x - x^4 = 0$. On a donc la figure suivante autour du point $(0, 0)$:

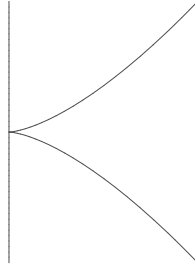


FIG. IV.1 - $xy^2 - x^4 = 0$

On note R l'anneau local en $(0, 0)$ et \widetilde{R} sa fermeture intégrale. Nous allons montrer que le point $(0, 0)$ est une singularité faible. On a $\widetilde{R} = \mathbb{C}\{t_1\} \times \mathbb{C}\{t_2\}$ où t_1, t_2 sont des paramètres locaux. L'anneau R est engendré par $(0, t_2^2)$ et (t_1, t_2^3) , soit respectivement l'image de x et y dans \widetilde{R} . On a donc

$$R = \mathbb{C} + \mathbb{C}(t_1, t_2^3) + \mathbb{C}(0, t_2^2) + t_1^2 \mathbb{C}\{t_1\} \times t_2^4 \mathbb{C}\{t_2\}$$

et le R -module $\underline{\Omega}$ est engendré par $(0, t_2 \underline{dt}_2)$ et $(\underline{dt}_1, 3t_2^2 \underline{dt}_2)$. On montre facilement que l'on a

$$m = \mathbb{C}(t_1, t_2^3) + \mathbb{C}(0, t_2^2) + t_1^2 \mathbb{C}\{t_1\} \times t_2^4 \mathbb{C}\{t_2\}$$

et

$$m^s = t_1^s \mathbb{C}\{t_1\} \times t_2^{2s} \mathbb{C}\{t_2\}, \quad \forall s \geq 2$$

Montrons tout d'abord la surjectivité de \underline{d} . Il suffit de montrer que pour tout $f \in R$, on a $f(\underline{dt}_1, 3t_2^2 \underline{dt}_2) \in \underline{d}R$ et $f(0, t_2 \underline{dt}_2) \in \underline{d}R$. En écrivant f comme une somme, il nous suffit de montrer le résultat lorsque f est constante ou lorsque $f = (t_1, t_2^3), (0, t_2^2)$ ou

$(t_1^2 f_1(t_1), t_2^4 f_2(t_2))$ avec $f_i \in \mathbb{C}\{t_i\}, i = 1, 2$. Le cas où f est constant est clair, on peut donc supposer $f \in m$ et nous allons montrer que chaque terme appartient à \underline{dm}^2 (donc en particulier à \underline{dR}). On a d'une part

$$(t_1, t_2^3).(\underline{dt}_1, 3t_2^2 \underline{dt}_2) = \frac{1}{2} \underline{d}(t_1^2, t_2^6) \in \underline{dm}^2$$

$$(0, t_2^2).(\underline{dt}_1, 3t_2^2 \underline{dt}_2) = \frac{1}{5} \underline{d}(0, t_2^5) \in \underline{dm}^2$$

$$(t_1^2 f_1(t_1), t_2^4 f_2(t_2)).(\underline{dt}_1, 3t_2^2 \underline{dt}_2) = \underline{d}(F_1(t_1), F_2(t_2)) \text{ où } (F_1, F_2) \in t_1^3 \mathbb{C}\{t_1\} \times t_2^7 \mathbb{C}\{t_2\}$$

et d'autre part

$$(t_1, t_2^3).(0, t_2 \underline{dt}_2) = \frac{1}{5} (0, t_2^5) \in \underline{dm}^2$$

$$(0, t_2^2).(0, t_2 \underline{dt}_2) = \frac{1}{4} (0, t_2^4) \in \underline{dm}^2$$

$$(t_1^2 f_1(t_1), t_2^4 f_2(t_2)).(0, t_2 \underline{dt}_2) = \underline{d}(0, F_2(t_2)) \text{ avec } F_2 \in t_2^6 \mathbb{C}\{t_2\}$$

On a donc $\underline{\Omega} = \underline{dR}$ et $m\underline{\Omega} = \underline{dm}^2$.

L'égalité $m^{s-1}\underline{\Omega} = m^s$ est claire pour $s - 1 \geq 2$, on a donc le résultat souhaité.

- On considère maintenant certaines pointes.

Lemme IV.1.8. *Soit X une courbe donnée localement par $R := \mathcal{O}_{X,P} = \mathbb{C}\{t^a, t^b\}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Alors P est une singularité faible.*

Démonstration. On note V l'ensemble des valeurs de la valuation des éléments de m_P c'est-à-dire l'ensemble

$$V := \{na + mb, (n, m) \neq (0, 0)\}.$$

On note

$$V_s := \underbrace{V + \dots + V}_{s \text{ termes}}.$$

On a d'une part

$$m_P = \left\{ \sum_{n \in V} a_n t^n \right\} \text{ et } m_P^s = \left\{ \sum_{n \in V_s} a_n t^n \right\}.$$

et d'autre part

$$\underline{dm}_P = \left\{ \sum_{n \in V} a_n t^{n-1} \right\} \text{ et } \underline{dm}_P^s = \left\{ \sum_{n \in V_s} a_n t^{n-1} \right\}.$$

Puisque V est stable sous l'addition, \underline{dm}_P est un R -module donc il est égal à $\underline{\Omega}$. Pour $s > 1$, on a

$$m_P^{s-1} \underline{\Omega} = \left\{ \sum_{n \in V_{s-1}} \left(\sum_{n \in V_{s-1}} a_n t^n \right) \left(\sum_{n \in V} b_n t^{n-1} \right) \right\}$$

de qui est bien égal à \underline{dm}_P^s et achève la démonstration. \square

- On s'intéresse maintenant à une courbe X donnée localement par

$$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8\} \simeq \mathbb{C}\{x, y\}/x^7 + x^8 + 3x^5y - y^3.$$

Elle est singulière en $(0, 0)$ et sa normalisée \tilde{X} est donnée par $u^3 = (3u + 1)x + x^2$ où l'on a posé $y = ux^2$. Si on note comme avant $s : (u, x) \mapsto (tx^2, x)$ l'application de désingularisation, on a bien $\#s^{-1}((0, 0)) = 1$. On note R l'anneau local de X en $(0, 0)$ et \tilde{R} celui de \tilde{X} . On a $\tilde{R} = \mathbb{C}\{t\}$ avec $x \mapsto t^3$ et $u \mapsto t^2 + t$.

Montrons que dans ce cas-là l'application \underline{d} n'est pas surjective et que la singularité n'est de ce fait pas faible. La valuation de \tilde{R} donne par restriction une valuation sur R . L'ensemble des valuations des éléments de l'idéal maximal m de R est $\{3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, \dots\}$. On peut montrer que $t^{12}\mathbb{C}\{t\}$ est le conducteur de R . On munit $\underline{\Omega}$ d'une valuation en posant $v(fdt) + 1 = v(f)$ ce qui implique $v(df) = v(f)$ lorsque $f \in m$ ou dit autrement, lorsque $v(f) > 0$. On considère

$$h := 10t^3\underline{d}(t^7 + t^8) - 7\underline{d}(t^3(t^7 + t^8)) \in \underline{\Omega}.$$

On a

$$10t^3\underline{d}(t^7 + t^8) - 7\underline{d}(t^3(t^7 + t^8)) = 10(7t^{10} + 8t^{11})\frac{dt}{t} - 7(10t^{10} + 11t^{11})\frac{dt}{t} = 3t^{11}\frac{dt}{t}$$

donc $v(h) = 11$ et $h \notin \underline{d}R$ puisque R ne contient aucun élément de valuation 11.

Dans cet exemple où l'application \underline{d} n'est pas surjective, on va montrer que le noyau d'une connexion sur X ne donne pas nécessairement un système local. Considérons pour cela la connexion donnée localement par

$$\nabla : Re \rightarrow \underline{\Omega} \otimes Re \text{ avec } \nabla(e) = t^{10}dt \otimes e.$$

L'équation $\nabla(fe) = 0$ n'a aucune solution pour $f \in R$.

En effet,

$$\nabla(fe) = f'dt \otimes e + ft^{10} \otimes e$$

donc

$$\nabla(fe) = 0 \iff f' + t^{10}f = 0.$$

Ceci n'est possible que lorsque $v(f) = 0$ et $v(f') = 10$. On peut donc écrire $f = c(1 + h)$ avec $c \in \mathbb{C}^*$ et $h \in m$ et l'équation est équivalente à $h' + (1 + h)t^{10} = 0$ ce qui impose $v(h') = 10$ donc $v(h) = 11$ (car $h \in m$) et ceci est une contradiction puisque R ne contient aucun élément de valuation 11. On peut généraliser ce contre-exemple :

Lemme IV.1.9. *On considère une courbe donnée localement par un anneau $R = \mathbb{C}\{t^a, t^b + t^c\}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $a < b$. On note $V = \{na + mb, (n, m) \neq (0, 0)\}$ l'ensemble des valeurs de la valuation des éléments de l'idéal maximal m de R et on suppose $a + c \notin V$. Alors l'application \underline{d} n'est pas surjective.*

Démonstration. On considère l'élément

$$b(t^b + t^c)\underline{d}(t^a) - t^a\underline{d}(t^b + t^c) = \frac{b-c}{a+c}t^{a+c-1}\underline{d}t$$

qui appartient à $\underline{\Omega}$. S'il appartenait à $\underline{d}R$, on aurait un élément de valuation $a+c$ dans R ce qui contredit l'hypothèse de départ. L'application \underline{d} n'est donc pas surjective. \square

Ceci nous donne une famille de contre-exemples. On remarque que la faiblesse d'une singularité ne dépend pas seulement de la géométrie de la singularité. En effet, l'exemple suivant, très proche du précédent, est une singularité faible.

• On considère la courbe donnée localement par $R = \mathbb{C}\{t^3, t^5 + t^7\}$. On note m son idéal maximal. On a

$$m = \mathbb{C}t^3 + \mathbb{C}t^5 + \mathbb{C}t^6 + t^8\mathbb{C}\{t\},$$

$$\underline{\Omega} = \mathbb{C}t^2dt + \mathbb{C}(5t^4 + 7t^6)dt + \mathbb{C}t^5dt + t^7\mathbb{C}\{t\}dt$$

et

$$\mathbb{C}t^2dt + \mathbb{C}(5t^4 + 7t^6)dt + \mathbb{C}t^5dt \subset \underline{d}R,$$

il suffit donc de montrer que $t^7\mathbb{C}\{t\}$ est inclus dans $\underline{d}R$ mais ceci est clair puisque R contient tous les éléments de valuation n pour tout $n \geq 8$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} m^2 &= t^6\mathcal{O} + t^8\mathbb{C}\{t\} & \underline{d}m^2 &= \mathbb{C}t^5dt + t^7\mathbb{C}\{t\}dt &= m\underline{\Omega} \\ m^3 &= t^9\mathcal{O} + t^{11}\mathbb{C}\{t\} & \underline{d}m^3 &= \mathbb{C}t^8dt + t^{10}\mathbb{C}\{t\}dt &= m^2\underline{\Omega} \end{aligned}$$

et pour tout $s \geq 1$, $\underline{d}m^s = m^{s-1}\underline{\Omega}$.

On peut montrer une généralisation de ce résultat :

Lemme IV.1.10. *Supposons qu'une courbe soit donnée localement par un anneau de la forme $R = \mathbb{C}\{t^a, t^b + t^c\}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $a < b$. Soient $V = \{na + mb \mid (n, m) \neq (0, 0)\}$ et $i \in \mathbb{Z}$ tel que $I = t^i\mathbb{C}\{t\}$ soit le conducteur de R . On suppose que $a + c \geq i$, alors la singularité est faible.*

Remarque IV.1.11. *Dans la preuve, on peut supposer $b > 3$, c'est-à-dire exclure le cas $a = 2$ et $b = 3$ puisque dans ce cas, l'anneau local est donné par $\mathbb{C}\{t^2, t^3\}$ et on a démontré qu'il satisfaisait la propriété. On suppose de plus que $c \notin V$ puisque dans le cas contraire, on est ramené à l'étude d'une pointe.*

Démonstration. On commence par remarquer que $a + c \geq i$ implique que $t^{a+c} \in R$ donc t^{a+b} aussi. Par récurrence, on montre que $t^{a+jb} \in R, \forall j \geq 1$ donc

$$t^{ia+jb} \in R, \forall i \geq 0, \forall j \geq 1.$$

De plus, on a $t^{ia+jb} \in m^{i+j}$. On sait que le R -module $\underline{\Omega}$ est engendré par $t^{a-1}\underline{dt}$ et $(bt^{b-1} + ct^{c-1})\underline{dt}$. Soit maintenant $s \geq 1$, montrons que $\underline{dm}^s = m^{s-1}\underline{\Omega}$. Un élément de m^s est une somme de la forme

$$\sum_{i+j \geq s} a_{ij} (t^a)^i (t^b + t^c)^j.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout couple (i, j) avec $i + j \geq s - 1$, on a

$$(t^a)^i (t^b + t^c)^j t^{a-1} \underline{dt} \in \underline{dm}^s$$

et

$$(t^a)^i (t^b + t^c)^j (bt^{b-1} + ct^{c-1}) \underline{dt} \in \underline{dm}^s$$

Par hypothèse, pour tout $k \geq 1$ on sait qu'il existe $(n_k, m_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $a + kc = n_k a + m_k b$ puisque $a + kc \geq i$, $\forall k \geq 1$. Supposons dans un premier temps que pour tout k , il existe un couple tel que l'on a $n_k + m_k - k \geq 1$, $\forall k \geq 0$ ce qui revient à supposer que $t^{a+kc} \in m^k$. Montrons que l'on a bien $\underline{dm}^{s-1}\underline{\Omega} = \underline{dm}^s$. On se donne donc un couple (i, j) tel que $i + j \geq s - 1$. On a

$$(t^a)^i (t^b + t^c)^j t^{a-1} \underline{dt} = \left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} t^{kc} t^{(j-k)b} \right) t^{ia+a-1} \underline{dt}$$

Il suffit donc de montrer que $t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia+a-1} \underline{dt}$ appartient à \underline{dm}^s , pour tout $k = 0 \dots j$, ce qui sera le cas si $kc + (j-k)b + ia + a = l_1 a + l_2 b$ avec $l_1 + l_2 \geq s$.

On a

$$kc + (j-k)b + ia + a = (i + n_k)a + (j-k + m_k)b$$

et par hypothèse

$$i + n_k + j - k + m_k \geq i + j + 1 \geq s$$

ce qui montre que $(t^a)^i (t^b + t^c)^j t^{a-1} \underline{dt}$ appartient à \underline{dm}^s .

Montrons maintenant que c'est également le cas de $(t^a)^i (t^b + t^c)^j (bt^{b-1} + ct^{c-1}) \underline{dt}$. Si $i = 0$, le résultat est clair. On suppose donc $i \geq 1$ et en écrivant la formule du binôme comme ci-dessus, cela revient à montrer que $t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia} (bt^{b-1} + ct^{c-1}) \underline{dt}$ appartient à \underline{dm}^s , $\forall k = 0 \dots j$. On va montrer c'est le cas de $t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia} t^{b-1} \underline{dt}$ puis de $t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia} t^{c-1} \underline{dt}$. On a

$$kc + (j-k)b + ia + b = (i-1 + n_k)a + (j-k+1 + m_k)b$$

avec

$$i-1 + n_k + j-k+1 + m_k = i+j+n-k+m_k-k \geq i+j+1 \geq s$$

donc

$$(i-1 + n_k)a + (j-k+1 + m_k)b \in V_s \text{ et } t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia} t^{b-1} \underline{dt} \in \underline{dm}^s.$$

D'autre part, on a

$$kc + (j-k)b + ia + c = (i + n_{k+1} - 1)a + (j-k + m_{k+1})b$$

avec

$$i + n_{k+1} - 1 + j - k + m_{k+1} \geq i + j + 1 \geq s$$

d'où

$$t^{kc} t^{(j-k)b} t^{ia} t^{c-1} dt \in \underline{d}m^s.$$

On a donc montré que pour tout $s \geq 1$, on a $\underline{d}m^s = m^{s-1} \underline{\Omega}$.

Il nous reste à montrer que pour tout k , il existe un couple (n_k, m_k) d'entiers satisfaisant $n_k + m_k - k \geq 1$. On va différencier deux cas :

On suppose dans un premier temps qu'il existe un couple (n_1, m_1) tel que $a + c = n_1 a + m_1 b$ avec $n_1 \neq 0$. On a alors $2a + 2c = 2n_1 a + 2m_1 b$ d'où $a + 2c = (2n_1 - 1)a + 2m_1 b$ et une récurrence évidente montre que les couples $(n_k, m_k) = (kn_1 - k + 1, km_1)$ satisfont bien $a + kc = n_k a + m_k b$ et $n_k + m_k - k \geq 1$.

Si on suppose maintenant que l'on a $a + c = bm_1$ avec $m_1 \geq 0$. Il n'existe donc pas de couple (n'_1, m'_1) avec $n'_1 \neq 0$. Dans ce cas, on a $m_1 \geq 2$ puisque $c > b$. De plus, on ne peut pas avoir $a + 2c = m_2 b$ puisque ceci impliquerait $c = (m_2 - m_1)b \in V$. Il existe donc un couple (n_2, m_2) avec $n_2 \neq 0$. On peut montrer qu'on a de plus $n_2 \geq 3$. En effet,

$$a = (2m_1 - m_2)b - n_2 a$$

implique

$$(1 + n_2)a = (2m_1 - m_2)b$$

et puisque a et b sont premiers entre eux, on a $b \mid 1 + n_2$ donc $n_2 \geq b - 1 \geq 3$. On montre comme précédemment que pour tout $k \geq 0$, le couple

$$(n_k, m_k) = (n_2 - (k - 2), (k - 2)m_1 + m_2)$$

satisfait

$$n_k a + m_k b = a + kc \text{ et } n_k + m_k - k \geq 1.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Connexions et systèmes locaux

Maintenant que l'on comprend mieux le faisceau $\underline{\Omega}$, on peut donner la définition suivante :

Définition IV.1.12. Une **connexion** de rang n sur une courbe connexe est une paire (\mathcal{V}, ∇) où \mathcal{V} est un faisceau localement libre de rang n sur X et $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \underline{\Omega} \otimes \mathcal{V}$ est un morphisme additif de faisceaux satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla(fm) = (\underline{d}(f) \otimes m) + f\nabla(m).$$

On rappelle qu'un système local sur une courbe singulière est, comme dans le cas non singulier, un faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels localement isomorphe au faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}^m$. On remarque que le pullback s^*E d'un système local E par l'application de normalisation s est un système local sur la courbe normalisée \tilde{X} . En revanche, étant donné un système local \tilde{E} sur \tilde{X} , $s_*\tilde{E}$ est un système local sur X si et seulement si s est bijective sur l'ensemble des points. On reviendra sur ces questions dans la section suivante.

Théorème IV.1.13. *On suppose que tous les points singuliers de X sont des singularités faibles. Alors pour toute connexion (\mathcal{M}, ∇) de rang n , le faisceau $\ker(\nabla, \mathcal{M})$ est un système local de rang n sur X et on obtient ainsi une équivalence entre la catégorie des connexions sur X et celle des systèmes locaux sur X .*

Avant de prouver le théorème, on commence par faire quelques observations :

1. L'énoncé de la proposition est local c'est-à-dire qu'il faut vérifier que pour tout point $P \in X$ le foncteur donné par

$$(\mathcal{M}_P, \nabla_P) \mapsto \ker(\nabla_P, \mathcal{M}_P)$$

est un équivalence de catégories entre la catégorie des connexions locales en P et celle des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{C} . Rappelons qu'une connexion locale en P est un couple (M, ∇) , où M est un \mathcal{O}_P -module libre et finiment engendré et $\nabla : M \rightarrow \underline{\Omega}_P \otimes M$ vérifie la règle de Leibniz. On se place en un point P et on note \mathcal{F} le foncteur $(M, \nabla) \rightarrow \ker(M, \nabla)$, où (M, ∇) est une connexion locale en P . Le foncteur inverse est donné par la construction suivante. On associe à un \mathbb{C} -espace vectoriel V de dimension finie la connexion locale

$$\underline{d} \otimes 1_V : \mathcal{O}_P \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \underline{\Omega} \otimes_{\mathbb{C}} V.$$

Toute connexion isomorphe à cette connexion est dite **triviale**. L'énoncé local est alors équivalent au fait que toute connexion locale (M, ∇) est triviale. En travaillant avec une base du module, on obtient un critère explicite de trivialité de la connexion. On note e_1, \dots, e_n une base libre de M sur \mathcal{O}_P , alors la connexion ∇ est déterminée par

$$\nabla(e_i) = \sum w_{ji} \otimes e_j \text{ où } w_{ji} \in \underline{\Omega}_P \forall i = 1 \dots n.$$

On peut identifier M à \mathcal{O}_P^n grâce à cette base et la connexion ∇ est alors déterminée par

$$\nabla(y) = \underline{d}(y) + (w_{ji})y, \forall y \in \mathbb{C}^n.$$

La connexion locale (M, ∇) est donc triviale si et seulement s'il existe une matrice inversible Y à coefficients dans \mathcal{O}_P telle que $\underline{d}Y + (w_{ji})Y = 0$. Une telle matrice est appelée **matrice fondamentale**. On remarque qu'une matrice fondamentale est unique à multiplication à droite près par un élément de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Si P est un point régulier et t un paramètre local, on peut réécrire ∇ sous la forme

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} = \frac{d}{dt} + A(t) \text{ avec } A(t) \in M_n(\mathbb{C}\{t\}).$$

Il est bien connu (Cf [vdPS] et [Sab]) que $\ker(\frac{d}{dt} + A(t), \mathbb{C}\{t\})$ est de dimension n et on montre ainsi l'équivalence de catégories entre les connexions locales et les espaces vectoriels de dimension finie. Pour la preuve de la proposition, on ne considèrera donc que les points singuliers de X .

3. Si P est un point multiple ordinaire, le résultat est clair. En effet, l'équation différentielle vue comme une équation dans \tilde{R} se décompose en une somme directe d'équations différentielles régulières sur $\mathbb{C}\{t_i\}$ pour tout i , chacune ayant une unique solution s'annulant en 0. Cette équation a donc une unique solution à coefficients dans

$$t_1\mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times t_r\mathbb{C}\{t_r\} \subset \mathcal{O}_P = \{(f_1, \dots, f_r) \in \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\} / f_1(0) = \dots = f_r(0)\}.$$

On peut maintenant commencer la preuve du théorème IV.1.13

Démonstration. Soit (\mathcal{M}, ∇) une connexion de rang n sur X . On travaille localement en un point singulier P de la courbe. On a vu dans les observations ci-dessus qu'il suffisait de trouver une matrice fondamentale Y satisfaisant

$$\underline{d}Y + (w_{ji})Y = 0.$$

Afin de garantir son inversibilité on cherche une telle matrice sous la forme $Id + B$ où tous les coefficients de B sont dans m_P . Si on trouve une telle matrice, une solution est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes donc l'ensemble des solutions est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et on aura montré que le noyau $\ker(\nabla_P, \mathcal{M}_P)$ est isomorphe à \mathbb{C}^n . Par hypothèse on a $\underline{d}(m_P) = \underline{\Omega}_P$ donc il existe $a_{i,j} \in m_P$ tels que $w_{ij} = \underline{d}(a_{ij}), \forall i, j$. On note $A = (a_{ji})$ et on est ramené à résoudre l'équation matricielle suivante :

$$\underline{d}(Id + B) + \underline{d}A.(1 + B).$$

On va d'abord montrer qu'une solution B à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}_P$, le complété de \mathcal{O}_P existe. Ceci découle des deux faits suivants :

1. $B_1 = -A$ satisfait

$$\underline{d}(Id + B_1) + \underline{d}A(Id + B_1) \equiv 0 \pmod{m_P \underline{\Omega}_P}$$

2. Si la matrice B_s , à coefficients dans m_P vérifie

$$\underline{d}(Id + B_s) + \underline{d}A(Id + B_s) \equiv 0 \pmod{m_P^s \underline{\Omega}_P}$$

alors il existe une matrice B' à coefficients dans m_P^{s+1} telle que

$$\underline{d}(Id + B_s + B') + \underline{d}A(Id + B_s + B') \equiv 0 \pmod{m_P^{s+1} \underline{\Omega}_P}$$

Si on note \widehat{B} la limite inductive des B_s , alors \widehat{B} est clairement une solution formelle du problème. La preuve du premier fait est évidente. Montrons donc le deuxième. On cherche B' telle que

$$\underline{d}(B') + \underline{d}(B_s) + \underline{d}(A)(Id + B_s + B') \equiv 0 \pmod{m_P^{s+1}\underline{\Omega}_P}$$

ce qui est équivalent à

$$\underline{d}(B') \equiv -\underline{d}(B_s) - \underline{d}(A)(Id + B_s) \pmod{m_P^{s+1}\underline{\Omega}_P}$$

puisque $\underline{d}(A)B' \in m_P^{s+1}\underline{\Omega}_P$. De plus

$$-\underline{d}(B_s) - \underline{d}(A)(Id + B_s) \in m_P^s\underline{\Omega}_P$$

et par hypothèse $\underline{d}m_P^{s+1} = m_P^s\underline{\Omega}_P$ donc une telle matrice B' existe. Ceci achève la preuve de l'existence de \widehat{B} . Cette matrice appartient a priori à $M_n(\widehat{\mathcal{O}}_P)$. Nous allons montrer qu'elle appartient en réalité à $M_n(\mathcal{O}_P)$, c'est-à-dire que ses coefficients sont des séries convergentes. On va utiliser le conducteur de l'anneau \mathcal{O}_P que l'on note \mathcal{C} . On a vu ci-dessus que si

$$\mathcal{O}_P \subset \mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t_r\},$$

le conducteur est de la forme

$$\mathcal{C} = t_1^{c_1}\mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times t_r^{c_r}\mathbb{C}\{t_r\}$$

avec $c_i \geq 1$. D'autre part, on a

$$m_P \subset t_1\mathbb{C}\{t_1\} \times \dots \times t_r\mathbb{C}\{t_r\}$$

donc pour k tel suffisamment grand, on a $m_P^k \subset \mathcal{C}$. On fixe un tel k et on note comme ci-dessus B_k la matrice à coefficients dans m_P vérifiant $\underline{d}B_k + \underline{d}A(1 + B_k) \in m_P^k\underline{\Omega}_P$. On veut exhiber une matrice M à coefficients dans \mathcal{C} telle que

$$\underline{d}(B_k + M) + \underline{d}A(Id + B_k + M) = 0$$

ce qui se réécrit

$$\underline{d}M + \underline{d}AM = -\underline{d}B_k - \underline{d}A(Id + B_k).$$

On écrit $M = t_1^{c_1}M_1 + \dots + t_r^{c_r}M_r$ où les matrices M_i sont à coefficients dans $\mathbb{C}\{t_i\}$. De même, on peut écrire $A = A_1 + \dots + A_r$ avec $A_i \in M_n(\mathbb{C}\{t_i\})$, $\forall i$ et le membre de droite s'écrit $N_1t_1^{c_1}dt_1 + \dots + N_rt_r^{c_r}dt_r$ avec $N_i \in M_n(\mathbb{C}\{t_i\})$, $\forall i$.

Pour tout facteur $\mathbb{C}\{t_i\}$ de $\widetilde{\mathcal{O}}_P$, on obtient une équation

$$\underline{d}t_i^{c_i}M_i + \underline{d}A_it_i^{c_i}M_i = N_it_i^{c_i}dt_i.$$

En remplaçant \underline{d} par $\frac{d}{dt_i}$ puis en divisant par $t_i^{c_i}$, on obtient

$$\frac{d}{dt_i} M_i + c_i t_i^{-1} M_i + \frac{d}{dt_i} (A_i) M_i = N_i, \forall i.$$

Ces équations sont régulières singulières par conséquent, pour tout i , la solution formelle M_i est convergente ([vdPS]). Ceci achève de montrer l'existence d'une matrice $B \in M_n(\mathcal{O}_P)$ telle que $Id + B$ soit solution de l'équation ce qui permet de conclure que les deux catégories sont équivalentes. \square

IV.1.2 Cas d'une courbe non singulière munie d'une connexion singulière

On considère ici une courbe X non singulière, irréductible et complète. Par le principe GAGA (Cf [Ser2]), on sait que les notions algébriques développées dans cette section ont un sens sur l'analytification de X . De ce fait, lorsque nous travaillons sur X , on ne spécifiera pas si les objets sont algébriques ou analytiques. Cependant, lorsqu'on enlève un nombre fini de points comme c'est le cas plus tard dans cette section, la courbe n'est plus projective et nous devons donc distinguer les deux cas.

Un **module différentiel** sur $\mathbb{C}(X)$ est un espace vectoriel M de dimension finie sur $\mathbb{C}(X)$ muni d'une application

$$\nabla : M \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}}^1 \otimes M$$

satisfaisant la règle de Leibniz. On remarque que si l'on fait le choix d'une dérivation non triviale D de $\mathbb{C}(X)$, alors $\delta := \nabla_D : M \rightarrow M$ est un module différentiel au sens ordinaire. On considère dans toute la suite des modules différentiels comme ci-dessus, c'est-à-dire sans fixer une dérivation.

Soit (M, ∇) un module différentiel sur $\mathbb{C}(X)$. On dira qu'il est **régulier singulier** sur un sous-ensemble T de X si pour tout point $P \in T$, il existe une base (e_1, \dots, e_n) de M (ou de manière équivalente une base locale de $M \otimes \mathbb{C}(\{t\})$ ou $M \otimes \mathbb{C}((t))$) telle que

$$\nabla(e_i) = \sum_j \frac{a_{ij}}{t} dt \otimes e_j \quad \forall i$$

où t est un paramètre local en P et $a_{ij} \in \mathcal{O}_{X,P}$. Ainsi, pour tout élément $f \in M$, on a $f = \sum_i f_i e_i$ donc

$$\nabla(f) = \sum_i (f'_i(t) + \frac{1}{t} \sum_j a_{ij} f_j) dt \otimes e_i$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle $\nabla_{\frac{d}{dt}} = \frac{d}{dt} + \frac{A}{t}$. On notera $\underline{\ker}(M, \nabla)$ le faisceau défini par

$$\underline{\ker}(\nabla, M)(U) := \ker(\nabla, (Mer(U) \otimes_{\mathbb{C}(X)} M))$$

où $Mer(U)$ désigne les fonctions méromorphes sur U .

Remarque IV.1.14.

Si A est à coefficients dans m_P , la connexion est régulière en P .

Lemme IV.1.15. *Soit (M, ∇) un module différentiel singulier régulier en S , alors en tout point $P \in S$, on peut trouver une base (e_1, \dots, e_n) de $M \otimes_{\mathbb{C}(X)} \mathbb{C}(\{t\})$ (ou $M \otimes_{\mathbb{C}(X)} \mathbb{C}((t))$) telle que $\forall i \nabla(e_i) = \sum_j \frac{a_{ij}}{t} dt \otimes e_j$ où t est un paramètre local en P et $a_{ij} \in \mathbb{C}$.*

(Cf [vdPS])

On supposera donc dorénavant que pour la base choisie, la matrice est à coefficients constants.

Définition IV.1.16. *Un système local à singularités régulières en T , où T est un sous-ensemble fini de $|X|$, est un faisceau de \mathbb{C} -espace vectoriel E sur X tel que*

- $E|_{X \setminus T}$ est localement isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}^n$ sur $X \setminus T$
- $\forall P \in T$ il existe un voisinage connexe U de P tel que $E(U) \xrightarrow{\sim} E(U \setminus \{P\})$ (i.e. la restriction est un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels).

On veut également travailler avec le langage des connexions :

Définition IV.1.17. *Une connexion (\mathcal{V}, ∇) sur X est dite à singularités régulières en T si \mathcal{V} est un faisceau de \mathcal{O}_X -module localement libre et*

$$\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \Omega^1(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}$$

vérifie la règle de Leibniz.

On considère ici l'ensemble T comme un diviseur positif sur X . Pour une différentielle non nulle ω sur la courbe X , on définit son diviseur, comme pour les fonctions, de la manière suivante :

$$(\omega) = \sum_{P \in |X|} v_P(\omega)[P].$$

Pour tout ouvert $U \subset X$, on définit $\Omega^1(T)(U)$ comme l'ensemble des différentielles non nulles ω telles que $(\omega) \geq T$ sur U . En d'autres termes, ω doit vérifier $v_P(\omega) \geq v_P(T)$ pour tout $P \in U$. Ceci définit un faisceau sur X que l'on note $\Omega^1(T)$.

On a la proposition suivante :

Proposition IV.1.18. *La restriction à $X \setminus T$ est un foncteur essentiellement surjectif entre les catégories suivantes :*

1. *Connexions (\mathcal{V}, ∇) de rang n sur X , avec singularités régulières en T c'est-à-dire satisfaisant $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \Omega_X^1(T) \otimes \mathcal{V}$.*

2. Connexions analytiques de rang n sur $X \setminus T$.

Remarque IV.1.19. *Étant donnée une connexion analytique sur $X \setminus T$, il n'est pas clair que l'on obtienne une connexion algébrique sur $X \setminus T$ et nous nous restreignons par conséquent aux connexions analytiques sur $X \setminus T$.*

Démonstration. On rappelle que d'après la section I.1 la catégorie des connexions sur $X \setminus T$ est équivalente à celle des représentations $\pi_1(X \setminus T) \rightarrow \text{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} . Soit maintenant (\mathcal{V}, ∇) un connexion sur $X \setminus T$. Elle correspond donc à une représentation

$$\rho : \pi_1(X \setminus T) \rightarrow \text{GL}(V)$$

On peut étendre \mathcal{V} à un faisceau $\tilde{\mathcal{V}}$ sur X , localement libre de rang n . On veut maintenant étendre ∇ . Pour cela on se place en un point s_i de T . On note γ_i un lacet tournant une fois autour de s_i dans le sens positif et tel que $\gamma_i([0, 1]) \subset X \setminus T$. De plus, on suppose qu'il n'y a aucun point de T à part s_i à l'intérieur du lacet. On a ainsi $[\gamma_i] \in \pi_1(X)$ où $[\gamma_i]$ désigne la classe d'homotopie contenant γ_i . On a $\rho([\gamma_i]) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et on choisit $\alpha_i \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\rho([\gamma_i]) = e^{2i\pi\alpha_i}$. On définit localement

$$\tilde{\nabla} := \frac{d}{d\pi_i} - \frac{\alpha_i}{\pi_i}$$

où π_i est une uniformisante locale n'ayant pas d'autre singularité que s_i dans l'ouvert sur lequel on travaille. On recolle ensuite ces connexions afin d'obtenir une connexion $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\nabla})$ sur X telle que

$$\tilde{\nabla} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \Omega^1(T) \otimes \tilde{\mathcal{V}}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. □

On se restreint maintenant au cas des connexions de rang 1. On considère deux les catégories précédentes comme des groupes, la loi de groupe étant donnée par le produit tensoriel en quotientant par les relations d'équivalence. De manière similaire au cas régulier, deux connexions $(\mathcal{L}_1, \nabla_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \nabla_2)$ singulières régulières en T sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_2$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\nabla_1} & \mathcal{L}_1 \otimes \Omega^1(T) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \otimes Id \\ \mathcal{L}_2 & \xrightarrow{\nabla_2} & \mathcal{L}_2 \otimes \Omega^1(T) \end{array}$$

On a le résultat suivant :

Proposition IV.1.20. *On a un homomorphisme surjectif de groupe entre*

$$\{ \text{Connexions de rang 1, singulières régulières en } T \} / \sim$$

et

$$\{ \text{Connexions analytiques de rang 1 sur } X \setminus T \} / \sim$$

et le noyau est composé des connexions (équivalentes à des connexions) de la forme $(\mathcal{O}_X(D), d)$ avec $\text{Supp}(D) \subset S$.

Démonstration. La surjectivité découle de la proposition précédente. Montrons que l'ensemble des objets dont la restriction est une connexion triviale est l'ensemble

$$\{ (\mathcal{O}_X(D), d) / \text{Supp}(D) \subset S \}$$

On va préciser le sens de $(\mathcal{O}_X(D), d)$. Soit D un diviseur à support dans T et montrons que l'on peut définir une connexion sur $\mathcal{O}_X(D)$ avec pôles. On se place localement en $s_i \in T$, on note t un paramètre local en s_i . Soit $f \in \mathcal{O}_X(D)_{s_i}$, alors

$$f = \sum_{k \geq n_i} a_k t^k \text{ si } v_{s_i}(D) = n_i.$$

On a donc

$$df = \sum_{k \geq n_i} k a_k t^{k-1} dt = \sum_{k \geq n_i} k a_k t^k \frac{dt}{t}$$

avec $\sum_{k \geq n_i} k a_k t^k \in \mathcal{O}_X(D)_{s_i}$ et $\frac{dt}{t} \in \Omega^1(T)_{s_i}$ donc en recollant on obtient une connexion que l'on note encore d telle que

$$d : \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \Omega^1(T) \otimes \mathcal{O}_X(D)$$

On rappelle que deux connexions $(\mathcal{L}_1, \nabla_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \nabla_2)$ sont équivalentes s'il existe un morphisme φ de \mathcal{O}_X -modules commutant avec ∇_i . Voyons comment ceci se traduit sur les objets de $\{ (\mathcal{O}_X(D), d) / \text{Supp}(D) \subset T \}$. Soient $(\mathcal{O}_X(D_1), d)$ et $(\mathcal{O}_X(D_2), d)$ deux éléments équivalents, alors il existe $f \in \mathbb{C}(X)^*$ telle que $D_1 = D_2 + (f)$ et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D_1) & \xrightarrow{\cdot f} & \mathcal{O}_X(D_2) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega^1(S) \otimes \mathcal{O}_X(D_1) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes f} & \Omega^1(S) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \end{array}$$

et la commutativité du diagramme impose $f \in \mathbb{C}^*$ donc $D_1 = D_2$. On vient donc de montrer que deux tels objets équivalents sont en réalité égaux. Par construction, de tels objets sont dans le noyau du foncteur. Soit maintenant une connexion (\mathcal{L}, ∇) telle que

$$(\mathcal{L}, \nabla)|_{X \setminus T} = (\mathcal{O}_{X \setminus T}, d)$$

et $\nabla : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \Omega^1(T)$. Montrons qu'il existe un diviseur D tel que $\text{Supp}(D) \subset T$ et $(\mathcal{L}, \nabla) \sim (\mathcal{O}_X(D), d)$. Par hypothèse on a

$$\ker(\nabla, \text{Mer} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L})|_{X \setminus T} \simeq \ker(d, \text{Mer} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{X \setminus T}) = \underline{\mathbb{C}}.1$$

donc il existe $f \in H^0(X \setminus T, \text{Mer} \otimes \mathcal{L})$ telle que $\ker(\nabla, \text{Mer} \otimes \mathcal{L})|_{X \setminus T} = \underline{\mathbb{C}}f$. Elle est non nulle et vérifie $\nabla(f) = 0$ donc ne s'annule pas sur $X \setminus T$ et comme ∇ est régulière sur $X \setminus T$, f n'a pas de pôles sur $X \setminus T$. De plus, comme (\mathcal{L}, ∇) est à singularités régulières en T , f peut se prolonger en une section globale (algébrique) de $\mathbb{C}(X) \otimes \mathcal{L}$. On associe à f le diviseur à support dans T suivant :

$$D = \sum_{s_i \in T} \text{ord}_{s_i}(f, \mathcal{L}) \cdot s_i$$

où $\text{ord}_{s_i}(f, \mathcal{L})$ désigne l'ordre de f en tant que section locale $\mathbb{C}(X) \otimes \mathcal{L}$ (et pas en tant qu'élément de $\mathbb{C}(X)$). En d'autres termes, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$, on a $D = (f) + L$. On considère maintenant la connexion sur X singulière régulière en T :

$$(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\nabla}) := (\mathcal{L}, \nabla) \otimes (\mathcal{O}_X(-D), d)$$

On a

$$\ker(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\nabla})|_{X \setminus T} = \ker(\mathcal{L}, \nabla)|_{X \setminus T} = \underline{\mathbb{C}}f$$

et l'ordre de f en tant que section globale de $\text{Mer} \otimes \tilde{\mathcal{L}}$ est 0. En effet, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$, on a

$$\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(L + (f))$$

donc $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_X(-(f))$. De plus, $\mathcal{O}_X(-(f)) \subset \mathcal{L}$ puisque $f \in H^0(X, \text{Mer} \otimes \mathcal{L})$ donc

$$\ker(\tilde{\nabla}, \text{Mer} \otimes \tilde{\mathcal{L}}) = \underline{\mathbb{C}}f.$$

Cependant, par construction, on a $\text{ord}_s(f, \tilde{\mathcal{L}}) = 0, \forall s \in T$ donc $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_X f$ et comme $\tilde{\nabla}(f) = 0$, on a $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\nabla}) = (\mathcal{O}_X, d)$ ce qui implique $(\mathcal{L}, \nabla) \sim (\mathcal{O}_X(D), d)$ et achève la preuve. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Proposition IV.1.21. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les catégories suivantes sont équivalentes*

1. *Modules différentiels de rang n sur X singuliers réguliers en T .*
2. *systèmes locaux de rang n à singularités régulières en T .*

3. systèmes locaux de rang n sur $X \setminus T$.
4. Homomorphismes $\rho : \pi_1(X \setminus T) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
5. Connexions analytiques de rang n sur $X \setminus T$.

Remarque IV.1.22. *On ne précise pas si les modules différentiels sont algébriques ou analytiques puisque le principe GAGA s'applique. Pour les systèmes locaux, qu'ils soient au-dessus de X ou de $X \setminus T$, nous ne nous intéressons qu'aux analytiques. De même, pour les représentations, on travaille avec le groupe fondamental topologique et pas celui algébrique.*

Démonstration. $3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ est connu, voir par exemple [Del1] et [vdPS].

On prouve ensuite l'équivalence entre la catégorie (2) et (3) qui ne prend que quelques lignes.

$2 \Leftrightarrow 3$:

Étant donné un système local à singularités régulières, sa restriction donne un système local sur $X \setminus T$. Réciproquement, soit E un système local sur $X \setminus T$ et notons $i : X \setminus T \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrons que i_*E est un système local sur X à singularités régulières. La restriction de i_*E à $X \setminus T$ est E , c'est donc un faisceau localement constant sur $X \setminus T$. De plus, pour un ouvert U de X contenant $s_i \in T$ et aucun autre point de T , on a

$$i_*E(U) = E(U \cap (X \setminus T)) = E(U \setminus \{s_i\}) \rightarrow i_*E(U \setminus \{s_i\}) = E(U \setminus \{s_i\})$$

donc la restriction est un isomorphisme puisque c'est l'application identité. Ainsi, les catégories sont bien équivalentes.

$1 \Leftrightarrow 2$:

Soit (M, ∇) un module différentiel singulier régulier et on pose $\mathcal{F}(M, \nabla) = \underline{\ker}(M, \nabla)$. On note $E := \underline{\ker}(M, \nabla)$ et on vérifie que E est un système local à singularités régulières. En effet, sur $X \setminus T$ la connexion est régulière donc son noyau est localement isomorphe à \mathbb{C}^n . Ainsi, le faisceau vérifie bien la première propriété. Il reste à montrer qu'autour de chaque point P de T , on peut trouver un voisinage connexe U tel que $\underline{\ker}(\nabla, U) \simeq \underline{\ker}(\nabla, U \setminus \{P\})$. Pour tout $f \in \underline{\ker}(\nabla, U \setminus T)$ on a une monodromie triviale et la connexion étant à singularités régulières, f se prolonge en une fonction méromorphe en P donc méromorphe sur tout U (Cf [Del1, thm 1.19])

Montrons maintenant que \mathcal{F} est un foncteur. On se donne un morphisme φ de (M_1, ∇_1) vers (M_2, ∇_2) c'est-à-dire que le morphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ est $\mathbb{C}(X)$ -linéaire et tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{\nabla_1} & \Omega_{\mathbb{C}(X)}^1 \otimes M_1 \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow id \otimes \varphi \\
 M_2 & \xrightarrow{\nabla_2} & \Omega_{\mathbb{C}(X)}^1 \otimes M_2
 \end{array}$$

On veut que $\mathcal{F}(\varphi)$ soit un morphisme de $\underline{\ker}(M_1, \nabla_1)$ dans $\underline{\ker}(M_2, \nabla_2)$, c'est-à-dire que l'on ait un morphisme $\underline{\ker}(M_1, \nabla_1)(U) \rightarrow \underline{\ker}(M_2, \nabla_2)(U)$ pour tout ouvert U et que les morphismes se recollent en un morphisme de faisceaux. On a

$$\underline{\ker}(M_1, \nabla_1)(U) = \{f \in Mer(U) \otimes_{\mathbb{C}(X)} M_1, \nabla_1 f = 0\}.$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\varphi)(\underline{\ker}(M_1, \nabla_1)(U)) &= \{(Id \otimes \varphi)(f) \in Mer(U) \otimes_{\mathbb{C}(X)} M_2, \nabla_2 (Id \otimes \varphi)(f) = 0\} \\
 &= \{g \in Mer(U) \otimes_{\mathbb{C}(X)} M_2, \nabla_2 g = 0\}
 \end{aligned}$$

par commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 Mer(U) \otimes M_1 & \xrightarrow{\nabla_1} & \Omega_{\mathbb{C}(X)}^1 \otimes Mer(U) \otimes M_1 \\
 id \otimes \varphi \downarrow & & \downarrow id \otimes \varphi \\
 Mer(U) \otimes M_2 & \xrightarrow{\nabla_2} & \Omega_{\mathbb{C}(X)}^1 \otimes Mer(U) \otimes M_2
 \end{array}$$

ce qui achève de montrer que \mathcal{F} est un foncteur.

Montrons que c'est une équivalence de catégorie. Soit (M, ∇) un module différentiel singulier régulier en T , montrons que

$$Hom(1, (M, \nabla)) \simeq Hom(\underline{\mathbb{C}}, \mathcal{F}(M, \nabla))$$

(isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels). Ici 1 désigne le module différentiel trivial $\mathbb{C}(X)e$ muni de la connexion triviale vérifiant $\nabla_0(e) = 0$. Le système local trivial considéré dans le membre de droite est le faisceau globalement constant $\underline{\mathbb{C}}$. Nous allons montrer que chaque membre est isomorphe à $\underline{\ker}(M, \nabla)(X)$. On commence par le membre de gauche. Un élément θ de $Hom(1, (M, \nabla))$ est déterminé par l'image de e et puisque c'est un morphisme de modules différentiels, on doit avoir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}(X)e & \xrightarrow{\theta} & M \\
 \nabla_0 \downarrow & & \downarrow \nabla \\
 \mathbb{C}(X)e \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\theta \otimes Id} & M \otimes \Omega^1
 \end{array}$$

Ce dernier impose $\nabla(\theta(e)) = 0$ donc

$$\mathrm{Hom}(1, (M, \nabla)) \simeq \underline{\ker}(\nabla, M)(X).$$

Maintenant, pour le membre de droite, on observe qu'un morphisme de $\underline{\mathbb{C}}$ est déterminé par l'image de la section globale 1 de $\underline{\mathbb{C}}$ et par construction, cette image est un élément de $\underline{\ker}(\nabla, M)(X)$ et ceci montre l'isomorphisme.

Il reste à montrer que pour tout système local E singulier régulier, il existe (M, ∇) tel que $\mathcal{F}(M, \nabla) = E$. Le faisceau $E|_{X \setminus T}$ est localement constant de rang n , il correspond donc à une unique connexion (\mathcal{V}, ∇) sur $X \setminus T$. Par ailleurs, d'après la proposition IV.1.18, nous savons qu'il existe une connexion $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\nabla})$ sur X à singularités régulières en T donc la restriction à $X \setminus T$ est (\mathcal{V}, ∇) .

On a $\ker(\tilde{\nabla}, \tilde{\mathcal{L}}) = E$. En effet, les faisceaux coïncident sur $X \setminus T$ et dans les deux cas, sur un ouvert suffisamment petit autour de $s_i \in T$, la restriction est un isomorphisme. Enfin, on pose $(M, \nabla) := (\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\nabla})_\eta$, la fibre au point générique ce qui nous donne un module différentiel avec $\underline{\ker}(M, \nabla) = E$ et (M, ∇) ne dépend pas des choix faits lors de la définition de $\tilde{\nabla}$. En effet, un choix différent de logarithme ne change pas le système local. Ceci achève de montrer l'équivalence entre les deux premières catégories et termine la preuve de la proposition. \square

En fait on a un résultat plus fort que l'on ne souhaite pas montrer. Avant de l'énoncer, on rappelle la définition suivante :

Définition IV.1.23.

Une catégorie C est dite une **catégorie tannakienne neutre** sur k si :

1. Elle est munie d'un produit tensoriel c'est-à-dire que pour tout objet $x, y \in \mathrm{Obj}(C)$ il existe un objet $x \otimes y$ qui dépend fonctoriellement de x et y . Le produit tensoriel est associatif, commutatif et muni d'un élément neutre noté $\mathbf{1}$ vérifiant $x \otimes \mathbf{1} \simeq x, \forall x \in \mathrm{Obj}(C)$.
2. Elle a des homomorphismes internes.
3. Elle est abélienne.
4. Un isomorphisme entre $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ et k est donné.
5. Il y a un foncteur fibre $\Omega^1 : C \rightarrow \mathrm{Vect}_k$.

Définition IV.1.24. Une catégorie est **tannakienne** si dans la définition précédente on remplace 5. par

- 5'. Il existe un foncteur fibre $\Omega^1 : C \rightarrow \mathrm{Vect}_K$ où K est une extension de corps de k .

(cf [vdPS] ou [Del2]).

On a alors le résultat suivant :

Proposition IV.1.25. *Les catégories tannakiennes suivantes sont équivalentes*

1. *Modules différentiels de dimension finie sur $\mathbb{C}(X)$, singuliers réguliers en T .*
2. *systemes locaux de rang fini à singularités régulières en T .*
3. *systemes locaux de rang fini sur $X \setminus T$.*
4. *Homomorphismes $\rho : \pi_1(X \setminus T) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. (on parle aussi de $\pi_1(X \setminus T)$ -module sur \mathbb{C}).*
5. *Connexions analytiques de rang fini sur $X \setminus T$.*

IV.2 Connexions avec structure de niveau sur la normalisée

On rappelle qu'un système local de rang n sur X est la donnée d'un faisceau de \mathbb{C} -espace vectoriel E ainsi qu'un recouvrement $\{U_i\}$ de X et des isomorphismes $E(U_i) \simeq \underline{\mathbb{C}}^n$. On considère une courbe X irréductible, projective et singulière. On demande de plus que la courbe n'ait que des points multiples ordinaires. Ces singularités étant faibles, d'après le théorème IV.1.13, on a une équivalence de catégories entre les systèmes locaux sur X et les connexions sur X .

On note \tilde{X} la normalisée de X et $s : \tilde{X} \rightarrow X$ la désingularisation. Soit F un système local sur X , alors s^*F est un système local sur \tilde{X} . De plus, s_*F est muni d'isomorphismes aux fibres qui sont canoniques. Réciproquement, à quelle condition un système local sur \tilde{X} donne-t-il un système local sur X ? Au dessus de chaque point singulier Q_i de X , on a un ensemble S_i de points de \tilde{X} avec $\#S_i \geq 2$. Étant donné un système local E sur \tilde{X} on a $(s_*E)_{Q_i} = E_{P_{i,1}} \oplus \dots \oplus E_{P_{i,r}}$ si on note $P_{i,1}, \dots, P_{i,r}$ les éléments de S_i . Pour avoir un système local, on doit donc fixer des isomorphismes entre les $E_{P_{i,j}}$ qui doivent satisfaire une propriété de *transitivité*. Plus précisément, on se donne une collection d'isomorphismes de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\psi_{j,k}^i : E_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} E_{P_{i,k}} \quad \forall P_{i,j}, P_{i,k} \in S_i \text{ tels que } \psi_{j,k}^i = \psi_{l,k}^i \circ \psi_{j,l}^i \quad \forall i, j, k, l.$$

De manière équivalente, cette collection est déterminée par la donnée des isomorphismes $\psi_{j,j+1}^i$ ce qui justifie la définition suivante :

Définition IV.2.1.

Un **système local sur \tilde{X} muni d'une structure de niveau** (en (S_1, \dots, S_r)) est la donnée d'un système local E sur \tilde{X} et d'une collection d'isomorphismes de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\varphi_{ij} : E_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} E_{P_{i,j+1}}$$

avec $S_i = \{P_{i,j}\}_{j \geq 1}$ pour tout i . On notera $(E, \{\varphi_{ij}\})$ un tel objet.

On définit la catégorie des systèmes locaux sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau. Un morphisme entre deux systèmes locaux sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau $(E, \{\varphi_{ij}\})$ et $(F, \{\psi_{ij}\})$ est un morphisme de faisceaux θ qui commute avec la structure de niveau c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute pour tout i, j

$$\begin{array}{ccc} E_{P_{i,j}} & \xrightarrow{\theta} & F_{P_{i,j}} \\ \varphi_{ij} \downarrow & & \downarrow \psi_{ij} \\ E_{P_{i,j+1}} & \xrightarrow{\theta} & F_{P_{i,j+1}} \end{array}$$

où on note encore θ le morphisme induit aux fibres.

Voyons maintenant comment cela se traduit en terme de connexions. Étant donné un système local $(E, \{\varphi_{ij}\})$ sur \tilde{X} muni d'une structure de niveau, on peut lui associer une connexion (\mathcal{M}, ∇) sur \tilde{X} en posant

$$\mathcal{M} = E \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{X}}.$$

On considère les isomorphismes associés aux points de S_i . Pour tout $a, b \in S_i$, l'isomorphisme $E_a \xrightarrow{\sim} E_b$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules :

$$\mathcal{M}_a \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_b$$

puis un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$\mathcal{M}_a/\mathcal{M}_a(-[a]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_b/\mathcal{M}_b(-[b])$$

où on note $[a]$ le diviseur réduit au point a . Ces isomorphismes vérifient encore une propriété de transitivité similaire à celle ci-dessus.

Définition IV.2.2. Une connexion sur \tilde{X} munie d'une structure de niveau sur (S_1, \dots, S_r) est la donnée d'une connexion (\mathcal{M}, ∇) et d'isomorphismes de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\varphi_{ij} : \mathcal{M}_{P_{i,j}}/\mathcal{M}_{P_{i,j}}(-[P_{i,j}]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{P_{i,j+1}}/\mathcal{M}_{P_{i,j+1}}(-[P_{i,j+1}])$$

avec $S_i = \{P_{i,j}\}_{j \geq 1}$ pour tout i . On notera $(\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_{ij}\})$ un tel objet.

Remarque IV.2.3. Étant donné un point P de \tilde{X} et un faisceau \mathcal{M} localement libre sur \tilde{X} , $\mathcal{M}(-[P])$ est par définition $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-[P])$. Si on note m_P l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\tilde{X},P}$ on a $\mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P(-[P]) = \mathcal{M}_P/m_P\mathcal{M}_P$.

On introduit la catégorie des connexions sur \tilde{X} munies d'une structure de niveau en (S_1, \dots, S_r) . Un morphisme de $(\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_{ij}\})$ vers $(\mathcal{M}', \nabla', \{\varphi'_{ij}\})$ est un morphisme de connexion $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ qui rend le diagramme suivant commutatif pour tout i, j :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{P_{ij}}/\mathcal{M}_{P_{ij}}(-[P_{ij}]) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{M}'_{P_{ij}}/\mathcal{M}'_{P_{ij}}(-[P_{ij}]) \\ \downarrow \varphi_{ij} & & \downarrow \varphi'_{ij} \\ \mathcal{M}_{P_{ij+1}}/\mathcal{M}_{P_{ij+1}}(-[P_{ij+1}]) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{M}'_{P_{ij+1}}/\mathcal{M}'_{P_{ij+1}}(-[P_{ij+1}]) \end{array}$$

Le morphisme $\tilde{\theta}$ désigne le morphisme induit par θ sur les quotients. Cette catégorie est équivalente à celle introduite précédemment :

Lemme IV.2.4. *La catégorie des systèmes locaux sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau est équivalente avec la catégorie des connexions sur \tilde{X} munies d'une structure de niveau.*

Démonstration. On a vu ci-dessus comment obtenir une connexion avec structure de niveau à partir d'un système local avec structure de niveau. Réciproquement, à partir d'une connexion $(\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_{ij}\})$, on obtient un système local sur \tilde{X} en posant $E := \ker(\mathcal{M}, \nabla)$. Montrons maintenant comment obtenir les isomorphismes. Pour simplifier les notations, on fixe i et on se donne deux points $a, b \in S_i$. On sait que l'on a un isomorphisme

$$\varphi : \mathcal{M}_a/\mathcal{M}_a(-[a]) \rightarrow \mathcal{M}_b/\mathcal{M}_b(-[b]).$$

Par ailleurs, on a $E_a = \ker(\mathcal{M}_a, \nabla) \subset \mathcal{M}_a$ et \mathcal{M}_a se surjecte dans $\mathcal{M}_a/\mathcal{M}_a(-[a])$. L'application naturelle induite $E_a \rightarrow \mathcal{M}_a/\mathcal{M}_a(-[a])$ est un isomorphisme naturel entre E_a et $\mathcal{M}_a/\mathcal{M}_a(-[a])$. Il est en de même pour b et ces deux isomorphismes naturels composés avec φ nous permettent de définir un isomorphisme

$$E_a \xrightarrow{\sim} E_b$$

Pour montrer que les catégories sont équivalentes, il reste à montrer que les morphismes sont compatibles ce qui est clair. \square

On introduit les diviseurs $D_i := \sum_j [P_{i,j}]$. On a alors la définition équivalente suivante

Définition IV.2.5. *Une connexion sur \tilde{X} munie d'une structure de niveau est la donnée d'une connexion (\mathcal{M}, ∇) et d'une collection d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules définis à multiplication par un scalaire non nul près.*

$$\varphi_i : \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D_i) \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i)$$

Montrons que cette définition est bien équivalente à la précédente. On se donne une collection d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules comme ci-dessus :

$$\varphi_i : \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D_i) \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i) = \otimes_j \mathcal{M}/\mathcal{M}(-[P_{i,j}])$$

L'image par φ_i de la classe d'équivalence de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D_i)$ contenant 1 est un r_i -uplet $(a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i})$ et puisque φ_i est un isomorphisme, chaque $a_{i,j}$ est non nul. On définit donc des isomorphismes locaux

$$\varphi_{ij} : \mathcal{M}_{P_{i,j}}/\mathcal{M}_{P_{i,j}}(-[P_{i,j}]) \rightarrow \mathcal{M}_{P_{i,j+1}}/\mathcal{M}_{P_{i,j+1}}(-[P_{i,j+1}])$$

en posant $\varphi_{ij}(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$. Montrons que ceci est bien défini bien que l'isomorphisme φ_i soit défini à multiplication scalaire près pour tout i . Si l'image de la classe de 1 est $(\lambda a_{i,1}, \dots, \lambda a_{i,r_i})$. On voit alors que l'on définit le même morphisme en posant $\varphi_{ij}(\lambda a_{i,j}) = \lambda a_{i,j+1}$.

Réciproquement, on se donne une collection de morphismes de \mathbb{C} -espaces vectoriels $\{\varphi_{i,j}\}$ et on veut construire des morphismes $\{\varphi_j\}$ de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -modules. Pour cela, on choisit pour tout i un isomorphisme $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}(-[P_i])$. On pose ensuite $a_{i,1} = \theta_i(1), \forall i$ puis

$$\varphi(\bar{1}) = (a_{i,1}, \varphi_{i1}(a_{i,1}), \varphi_{i,2} \circ \varphi_{i,1}(a_{i,1}), \dots)$$

Ceci définit bien un isomorphisme et puisqu'il dépend du choix de θ_i , il est bien défini à multiplication scalaire près.

Explicitons maintenant quels sont les morphismes pour cette définition. Un morphisme entre deux connexions $(\mathcal{M}, \nabla, \{\varphi_i\})$ et $(\mathcal{M}', \nabla', \{\varphi'_i\})$ munies d'une structure de niveau est une collection de morphismes de connexions $\{f_i\}$ de (\mathcal{M}, ∇) vers (\mathcal{M}', ∇') qui commutent avec la structure de niveau. Plus précisément, si \tilde{f}_i désigne l'application induite sur les quotients, le diagramme suivant doit être commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D_i) & & \\ \varphi_i \downarrow & \searrow \varphi'_i & \\ \mathcal{M}_1/\mathcal{M}_1(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_2(-D_i) \end{array}$$

L'intérêt d'introduire ces structures de niveau est que cela permet de travailler sur la normalisée d'une courbe singulière au lieu de celle-ci comme le montre la proposition suivante :

Proposition IV.2.6. *Les catégories suivantes sont équivalentes :*

1. Connexions de rang n sur X .
2. Systèmes locaux de rang n sur X .
3. Systèmes locaux de rang n sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau sur $S = (S_1, \dots, S_r), \#S_i \geq 2$.
4. Connexions de rang n sur \tilde{X} munies d'une structure de niveau sur $S = (S_1, \dots, S_r), \#S_i \geq 2$.

Cette proposition nous permettra dans la section suivante d'établir la correspondance de Hecke pour une courbe singulière en travaillant sur une courbe non singulière, sa désingularisée.

Démonstration. L'équivalence des deux premières catégories est donnée par le théorème IV.1.13 puisque X ne possède que des singularités faibles.

On veut montrer l'équivalence entre les catégories 2 et 3. On définit un foncteur \mathcal{F} qui à un système local E sur X associe (s^*E, can) où can désigne la structure de niveau

canonique. Ceci définit clairement un foncteur entre les deux catégories. Montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soit $(F, \{\varphi_i\})$ un système local sur \tilde{X} de rang n . On cherche un système local E sur X tel que $(s^*E, can) \sim (F, \{\varphi_{ij}\})$ c'est-à-dire que l'on cherche un morphisme $\psi : s^*E \rightarrow F$ tel que pour tout $P_{i,j} \in S_i$, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} (s^*E)_{P_{i,j}} & \xrightarrow{\psi_{P_{i,j}}} & F_{P_{i,j}} \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \varphi_{i,j} \\ (s^*E)_{P_{i,j+1}} & \xrightarrow{\psi_{P_{i,j+1}}} & F_{P_{i,j+1}} \end{array}$$

où can désigne l'isomorphisme canonique induit par les isomorphismes

$$(s^*E)_{P_{i,j}} \simeq E_{P_i} \text{ pour tout } P_{i,j} \in S_i.$$

On définit un tel faisceau localement constant E en posant $E(U) = F(s^{-1}(U) \cap \tilde{X} \setminus \{P_{i,j}, j \neq 1\})$ pour tout ouvert U de X . Ceci définit bien un faisceau localement constant de rang n et on a $E_{P_i} = F_{P_{i,1}}$, pour tout i , donc $(s^*E, can) \sim (F, \{\varphi_i\})$ et on bien l'essentielle surjectivité.

Montrons enfin qu'étant donnés deux systèmes locaux E_1 et E_2 sur X , on a

$$Hom(E_1, E_2) \simeq Hom(\mathcal{F}(E_1), \mathcal{F}(E_2)).$$

L'injectivité est claire, montrons la surjectivité. Soit $\theta : (s^*E_1, can) \rightarrow (s^*E_2, can)$ un morphisme dans cette catégorie, on a donc un morphisme $\theta : s^*E_1 \rightarrow s^*E_2$ tel que $\theta_{P_{i,j}} = \theta_{P_{i,j+1}}$ pour tout i, j . On veut définir un morphisme ψ entre E_1 et E_2 en posant $\psi_{s(x)} = \theta_x : E_{1,s(x)} \rightarrow E_{2,s(x)}$. Ceci définit bien un morphisme à chaque fibre et nous devons montrer qu'on peut définir un morphisme sur chaque ouvert. Soit $\{U_{i,j}\}$ un recouvrement de \tilde{X} avec $U_{i,j} \subset \tilde{X} \setminus \{P_{l,k}, (l,k) \neq (i,j)\}$ et on suppose que ses ouverts sont suffisamment petits pour rendre commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} s^*E_1(U_{i,j}) & \xrightarrow{Id} & s^*E_1(U_{i,j+1}) \\ \theta(U_{i,j}) \downarrow & & \downarrow \theta(U_{i,j+1}) \\ s^*E_2(U_{i,j}) & \xrightarrow{Id} & s^*E_2(U_{i,j+1}) \end{array}$$

De plus, on peut restreindre encore les $U_{i,j}$ pour avoir $s(U_{i,j}) = s(U_{i,k})$, pour tout j, k . On pose $U_i := s(U_{i,j})$ pour tout j ce qui implique $s^*E_1(U_{i,j}) = E_1(U_i)$. On pose alors

$\psi(U_i) := \theta(U_{ij})$ et ceci définit bien un morphisme entre les faisceaux E_1 et E_2 ce qui achève de montrer la surjectivité.

On a donc montré l'équivalence entre les catégories 2 et 3. Celle entre les catégories 3 et 4 a été montrée dans la proposition précédente, on a donc montré la proposition. \square

IV.3 Faisceaux localement libres munis d'une structure de niveau

IV.3.1 Définitions

On considère une courbe projective non singulière irréductible Y sur \mathbb{C} et on se donne r diviseurs D_1, \dots, D_r avec $D_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} P_{ij}$ et les supports sont disjoints.

Définition IV.3.1. *un faisceau localement libre de rang 1 sur Y muni d'une structure de niveau sur D_1, \dots, D_r est un couple $(\mathcal{L}, \{\varphi_i\}_{i=1}^r)$ où \mathcal{L} est un faisceau de \mathcal{O}_Y -module localement libre de rang 1 sur Y et*

$$\varphi_i : \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i)$$

un isomorphisme de \mathcal{O}_Y -module défini à multiplication scalaire près pour tout i .

On définit la catégorie des faisceaux munis d'une structure de niveau en demandant que les morphismes commutent avec la structure de niveau. Plus précisément, un morphisme entre deux objets $(\mathcal{L}, \{\varphi_i\}, \psi)$ et $(\mathcal{L}', \{\varphi'_i\})$ est la donnée de morphismes $\theta_i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ tel que pour tout i , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \varphi_i \downarrow & \searrow^{\varphi'_i} & \\ \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_i} & \mathcal{L}'/\mathcal{L}'(-D_i) \end{array}$$

où $\tilde{\theta}_i$ désigne l'application induite par θ_i sur les quotients. On observe que ces isomorphismes θ_i sont égaux à multiplication scalaire près. De manière équivalente, on peut donc demander l'existence d'un morphisme $\theta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ et de scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & \xrightarrow{\cdot\alpha_i} & \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi'_i \\ \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_i} & \mathcal{L}'/\mathcal{L}'(-D_i) \end{array}$$

commute.

Définition IV.3.2. Deux éléments $(\mathcal{L}, \{\varphi_i\})$ et $(\mathcal{L}', \{\varphi'_i\})$ sont **équivalents** s'il existe des isomorphismes de \mathcal{O}_Y -module $\theta_i : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ tel que pour tout i , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \varphi_i \downarrow & \searrow \varphi'_i & \\ \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_i} & \mathcal{L}'/\mathcal{L}'(-D_i) \end{array}$$

où $\tilde{\theta}_i$ désigne l'application induite par θ_i sur les quotients.

On note $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}]$ la classe d'équivalence contenant $(\mathcal{L}, \{\varphi_i\})$ et $F(D_1, \dots, D_r)$ l'ensemble des classes d'équivalence. On va montrer que l'on peut munir cet ensemble d'une structure de groupe commutatif. Soient deux éléments $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}]$ et $[\mathcal{F}, \{\psi_i\}]$ de $F(D_1, \dots, D_r)$. On considère naturellement le faisceau $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$ et on veut le munir d'une structure de niveau, c'est-à-dire construire une collection d'isomorphismes que l'on notera $\varphi_i * \psi_i$ de $\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)$ vers $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})/(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}(-D_i))$, pour tout $i = 1 \dots r$. On va utiliser l'isomorphisme canonique qui existe entre $\mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) \otimes \mathcal{F}/\mathcal{F}(-D_i)$ et $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})/(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}(-D_i))$. L'existence de cet isomorphisme est clair en rappelant que $\mathcal{F}(-D) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(-D)$.

De plus, pour tout i , on a un isomorphisme de \mathcal{O}_Y -modules, lui aussi canonique entre $\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)$ et $\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)$ donné par $h \mapsto h \otimes 1$. On notera $\varphi_i * \psi_i$ l'isomorphisme obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) &\xrightarrow{\text{can}} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \xrightarrow{\varphi_i \otimes \psi_i} \\ &\mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) \otimes \mathcal{F}/\mathcal{F}(-D_i) \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}/\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}(-D_i) \end{aligned}$$

On pose $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}] * [\mathcal{F}, \{\psi_i\}] = [\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}, \{\varphi_i * \psi_i\}]$.

Montrons que cette application est bien définie, c'est-à-dire que cela ne dépend pas du choix du représentant de la classe. Supposons donc que l'on a $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}] = [\mathcal{L}', \{\varphi'_i\}]$ et $[\mathcal{F}, \{\psi_i\}] = [\mathcal{F}', \{\psi'_i\}]$, et montrons que

$$[\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}, \{\varphi_i * \psi_i\}] = [\mathcal{L}' \otimes \mathcal{F}', \{\varphi'_i * \psi'_i\}]$$

On sait qu'il existe des morphismes $\mathcal{L} \xrightarrow{\theta_i} \mathcal{L}'$ et $\mathcal{F} \xrightarrow{\lambda_i} \mathcal{F}'$ tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \downarrow \varphi_i & \searrow \varphi'_i & \\ \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) & \xrightarrow{\theta_i} & \mathcal{L}'/\mathcal{L}'(-D_i) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \downarrow \psi_i & \searrow \psi'_i & \\ \mathcal{F}/\mathcal{F}(-D_i) & \xrightarrow{\lambda_i} & \mathcal{F}'/\mathcal{F}'(-D_i) \end{array}$$

commutent pour tout $i = 1$ ce qui implique

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \\
\downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\
\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \text{Id}} & \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \otimes \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \\
\downarrow \varphi_i \otimes \psi_i & & \downarrow \varphi'_i \otimes \psi'_i \\
(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})/(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(-D_i)) & \xrightarrow{\theta_i \otimes \lambda_i} & (\mathcal{L}' \otimes \mathcal{F}')/(\mathcal{L}' \otimes \mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_Y(-D_i))
\end{array}$$

donc on a bien

$$[\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}, \{\varphi_i * \psi_i\}] = [\mathcal{L}' \otimes \mathcal{F}', \{\varphi'_i * \psi'_i\}]$$

et ceci définit une loi de groupe sur

$$F(D_1, \dots, D_r) := \{[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}], \varphi_i : \mathcal{L}/\mathcal{L}(-D_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)\}$$

dont le neutre est $[\mathcal{O}_Y, \{Id\}_i]$. Elle est commutative car la multiplication dans \mathcal{O}_Y , donc dans $\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)$, l'est pour tout i .

On a un morphisme surjectif naturel $F(D_1, \dots, D_r) \rightarrow \text{Pic}Y$ et il est clair que c'est un homomorphisme de groupe. Nous allons maintenant déterminer son noyau. On montrera plus tard que ce groupe a en réalité une structure de groupe algébrique.

Pour déterminer le noyau de cette application, on doit déterminer dans quels cas on a $[\mathcal{O}_Y, \{\varphi_i\}] = [\mathcal{O}_Y, \{\varphi'_i\}]$. Par définition, il existe des automorphismes de \mathcal{O}_Y , donné par la multiplication par un élément $f_i \in \mathbb{C}(X)^*$. Puisque 1 est une section globale du faisceau \mathcal{O}_Y , f_i doit être un élément inversible de $H^0(X, \mathcal{O}_Y)$ c'est-à-dire une constante non nulle α_i . Ainsi, la commutativité du diagramme impose $\varphi_i = \alpha_i \cdot \varphi'_i$ pour tout i .

On veut maintenant déterminer l'ensemble $\{[\mathcal{O}_Y, \{\varphi_i\}]\}$. Pour cela, on va montrer que chaque morphisme φ_i est défini par un élément de $(\mathbb{C}^*)^{r_i-1} \times \mathbb{C}^{\sum_j (n_{ij}-1)}$ ce qui montrera qu'un élément $[\mathcal{O}_Y, \{\varphi_i\}]$ est déterminé par un élément de $(\mathbb{C}^*)^{(\sum r_i)-1} \times (\mathbb{C})^{\sum_{i,j} (n_{ij}-1)}$, où $D_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij}[P_{ij}]$.

Pour montrer cela, il nous suffit de montrer que chaque isomorphisme φ_i est déterminé localement (en P_{ij}) par la donnée d'un élément inversible de $\mathcal{O}_{Y, P_{ij}}$. On considère un recouvrement \mathcal{U} de Y tel que pour tout P_{ij} il existe $U \in \mathcal{U}$ et une uniformisante locale π_{ij} en P_{ij} qui n'ait pas d'autre singularité que P_{ij} sur U . L'isomorphisme φ_i est alors déterminé sur U par l'image de $\bar{1}$. Cette dernière est de la forme $a_0 + a_1\pi + \dots + a_{n_i-1}\pi^{n_i-1}$

et comme c est un élément inversible, on doit avoir $a_0 \in \mathbb{C}^*$. Comme de plus, chaque isomorphisme φ_i est déterminé à multiplication par un scalaire non nul près, on a montré que chaque φ_i est déterminé par la donnée d'un élément de

$$\prod_j (\mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}^{n_{ij}-1} / \mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^*)^{r_i-1} \times \mathbb{C}^{\sum_j (n_{ij}-1)}$$

donc la structure de niveau est déterminée par un élément de

$$\prod_i (\mathbb{C}^*)^{r_i-1} \times \mathbb{C}^{\sum_j (n_{ij}-1)} = (\mathbb{C}^*)^{\sum_i (r_i-1)} \times \mathbb{C}^{\sum_{i,j} n_{ij}-1}$$

et on a

$$\{[\mathcal{O}_Y, \{\varphi_i\}], \varphi_i : \mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y(-D_i) \simeq \mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y(-D_i)\} \simeq (\mathbb{C}^*)^{\sum_i (r_i-1)} \times (\mathbb{C})^{\sum_i (n_{ij}-1)}.$$

Ceci donne une suite exacte courte

$$0 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{\sum_i (r_i-1)} \times \mathbb{C}^{\sum_{i,j} n_{ij}-1} F(D_1, \dots, D_r) \rightarrow \text{Pic} Y \rightarrow 0.$$

On veut maintenant montrer le lien entre les faisceaux localement libres sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau et les faisceaux localement libres sur X . Pour cela, on va rappeler la construction d'une courbe singulière associée à une collection de diviseurs puis expliciter sa jacobienne J_{D_1, \dots, D_r} . On montrera ensuite que l'ensemble $F(D_1, \dots, D_r)$ des classes d'équivalence de faisceaux munis de structure de niveau est en bijection avec J_{D_1, \dots, D_r} .

IV.3.2 Courbes spéciales singulières et jacobiniennes généralisées

Rappels sur les courbes singulière associées à un ensemble de diviseurs

On suppose que l'on a une courbe Y lisse projective et irréductible sur \mathbb{C} et on se donne une collection de diviseurs effectifs $D_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} [P_{ij}]$ sur Y à supports disjoints. On veut construire une courbe singulière associée à cet ensemble de diviseurs. Pour tout i , on fixe un point Q_i de chaque support $S_i := \text{supp}(D_i)$. On note $S = \cup_i S_i$ et $S' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$. On sait que l'on peut définir une courbe, que l'on note Y_{D_1, \dots, D_r} ou Y' quand il n'y a pas de confusion, dont l'ensemble des points est $|Y \setminus \cup_i S_i| \cup \{Q_1, \dots, Q_r\}$. On la construit en posant

$$\mathcal{O}_{Y', P} = \begin{cases} \mathcal{O}_Y & \text{si } P \notin \{Q_1, \dots, Q_r\} \\ \mathbb{C} + \cap_j m_{P_{i,j}}^{n_{ij}} & \text{si } P = Q_i \text{ pour un certain } i \end{cases}$$

où m_P désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y, P}$ (Cf [Ser2, IV.3]). On montre que cela définit une courbe, singulière en les Q_i , et dont la désingularisée est la courbe de départ Y .

On rappelle qu'une courbe spéciale singulière est une courbe telle que, en tout point singulier, le conducteur de l'anneau local (dans sa normalisation) est égal à l'idéal maximal. On remarque que la courbe construite ci-dessus est spéciale singulière et n'admet

donc que des singularités faibles. On remarque de plus que les courbes de la forme Y_{D_1, \dots, D_r} , lorsque D_i et r varient, sont toutes les courbes spéciales singulières admettant Y pour normalisée.

Soit M un diviseur étranger à S , on peut alors définir un faisceau localement libre sur Y' en posant :

$$\mathcal{O}_{Y'}(M)_P = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(M)_P & \text{si } P \notin \{Q_1, \dots, Q_r\} \\ \mathcal{O}_{Y',P} & \text{si } P = Q_i \text{ pour un certain } i \end{cases}$$

Le faisceau ainsi construit étant cohérent, les groupes de cohomologie $H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ et $H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ sont de dimension finie. On note respectivement $h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ et $h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ leurs dimensions. On a

Théorème IV.3.3 (théorème de Riemann-Roch généralisé).

Pour tout diviseur M étranger à S , on a

$$h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) - h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = \deg M + 1 - g - \sum_i \deg D_i + r.$$

(Cf [Ser2, thm 1 IV.6]).

De plus, on peut définir le faisceau des différentielles régulières sur Y' :

Définition IV.3.4. *Soit ω une forme différentielle sur Y . On dit que ω est **régulière** en Q_i si on a*

$$\sum_j \text{Res}_{P_{ij}}(f\omega) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{O}_{Y', Q_i}$$

On note Ω'_Q l'ensemble des différentielles régulières en un point Q de l'ensemble $S' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$. On définit ainsi un faisceau cohérent sur Y' que l'on note $\Omega_{Y'}$. Si M est un diviseur de Y étranger à S , on pose

$$\Omega_{Y'}(M)_P = \begin{cases} \Omega_Y(M)_P & \text{si } P \notin \{Q_1, \dots, Q_r\} \\ \Omega_{Y',P} & \text{si } P = Q_i \text{ pour un certain } i \end{cases}$$

ce qui définit un faisceau $\Omega_{Y'}(M)$ sur Y' . On a un théorème de dualité comme dans le cas classique :

Théorème IV.3.5 (Théorème de dualité). *Pour tout diviseur M étranger à S , l'espace vectoriel $H^0(Y', \Omega_{Y'}(M))$ est canoniquement isomorphe au dual de $H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$. On a donc $h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = \dim \Omega_{Y'}(M)$.*

(Cf [Ser2])

Corollaire IV.3.6. *Soit M un diviseur sur Y étranger à S et tel que $\deg M > 2g - 2$, alors*

$$h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = 0$$

Démonstration. Par le théorème de dualité, on a $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(M)) = H^0(Y, \Omega_Y(M))$ donc pour $\deg M > 2g - 2$, on a $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(M)) = 0$. Or, par construction on a

$$H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) \subset H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M))$$

d'où $H^0(Y', \Omega_{Y'}(M)) = 0$ et on conclut la preuve du corollaire grâce au théorème de dualité. \square

On veut maintenant étudier les fibrés en droite sur Y' . On introduit pour cela une relation d'équivalence sur les diviseurs étrangers à D_1, \dots, D_r .

Relation d'équivalence associée à une collection de diviseurs effectifs

On adapte la preuve connue du cas où il n'y a qu'un seul diviseur (cf par exemple [Ser2] pour la construction détaillée dans le cas où il n'y a qu'un diviseur).

Définition IV.3.7. *On considère la relation d'équivalence suivante pour deux diviseurs M_1, M_2 de Y , tous deux étrangers à S :*

$$M_1 \sim M_2 \iff \exists f \in \mathbb{C}(X)^*, M_1 = M_2 + (f) \text{ et } f \equiv \alpha_i \pmod{D_i} \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{C}^* \forall i = 1 \dots r$$

On rappelle que $f \equiv \alpha_i \pmod{D_i}$ signifie $v_{P_{ij}}(f - \alpha_i) \geq n_{ij} \forall j = 1 \dots r_i$. On note \overline{M} la classe d'équivalence modulo la D_1, \dots, D_r -équivalence contenant M .

On note J_{D_1, \dots, D_r} l'ensemble des classes d'équivalence de diviseur étrangers à S (Cet ensemble correspond à C_D avec les notations de [Ser2, chp V] lorsque l'on a $r = 1$).

Cet ensemble a clairement une structure de groupe. On veut maintenant déterminer l'ensemble des diviseurs effectifs équivalents à un diviseur donné, pour la relation définie en IV.3.7. On a

Proposition IV.3.8. *Soit M un diviseur sur Y étranger à S . L'ensemble des diviseurs effectifs équivalents à M est en bijection avec $\mathbb{P}H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) \setminus \mathbb{P}H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M))$.*

Démonstration. On se donne un diviseur M sur Y étranger à S et on veut déterminer l'ensemble des diviseurs M' effectifs équivalents à M . Cela revient à déterminer l'ensemble des fonctions g qui vérifient $(g) + M \geq 0$ en dehors de S et $g \equiv \alpha_i$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\forall i = 1 \dots r$. Une telle fonction g appartient aux anneaux locaux \mathcal{O}_{Y', Q_i} , $\forall i$. On rappelle que Q_i est le point de Y' sur lequel tous les points du support de D_i sont envoyés. On a donc $g \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$. Réciproquement, si $g \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ et ne s'annule pas sur $S' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$, alors le diviseur $M' := M + (g)$ est équivalent à M pour la relation IV.3.8. Les fonctions de $H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M))$ qui s'annulent en S' sont exactement les éléments de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M - \sum_i D_i))$ d'où le résultat.

Remarque IV.3.9. *Cet ensemble peut être identifié à l'ensemble des éléments h non nuls de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M))$ tels que $h(P_{ij}) = \alpha_i \forall i, j$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$.*

□

On a le corollaire suivant :

Corollaire IV.3.10. *Soit M un diviseur de Y étranger à S et de degré*

$$\deg M > 2g - 2 + \sum \deg D_i,$$

alors il existe un diviseur effectif équivalent à M (pour la relation d'équivalence IV.3.7).

Démonstration. D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que l'ensemble

$$\mathbb{P}H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) \setminus \mathbb{P}H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M))$$

est non vide. Pour cela on va calculer les dimensions en utilisant les théorèmes de Riemann-Roch et Riemann-Roch généralisé qui nous donnent :

$$h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) - h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = \deg M + 1 - (g + \sum \deg D_i - r)$$

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(M - \sum D_i)) - h^1(Y, \mathcal{O}_Y(M - \sum D_i)) = (\deg M - \sum \deg D_i) + 1 - g$$

On suppose $\deg M > 2g - 2 + \sum \deg D_i$, ce qui implique $\deg(M - \sum D_i) > 2g - 2 = 0$ puisque M est étranger à S . On a donc $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(M - \sum D_i)) = 0$. De plus, les diviseurs D_i étant effectifs, on a $\deg M > 2g - 2$ donc par le corollaire IV.3.6, on obtient $h^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = 0$. On a donc

$$h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) = \deg M + 1 + r - g - \sum_i \deg D_i$$

et

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(M - \sum D_i)) = \deg(M - \sum D_i) + 1 - g = \deg M + 1 - g - \sum_i \deg D_i$$

On a donc

$$h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}(M)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(M - \sum D_i)) = r > 0$$

ce qui montre que l'ensemble est non vide donc qu'il existe un diviseur effectif équivalent à M . □

IV.3.3 Lien avec les faisceaux localement libres sur X

Identification de $F(D_1, \dots, D_r)$ à J_{D_1, \dots, D_r}

Dans cette section, nous allons montrer que l'ensemble $F(D_1, \dots, D_r)$ des classes d'équivalence de fibrés en droite avec structure de niveau peut être identifié de manière naturelle à J_{D_1, \dots, D_r} . L'identification est donnée par

$$\begin{aligned} J_{D_1, \dots, D_r} &\rightarrow F(D_1, \dots, D_r) \\ \overline{M} &\mapsto [(\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\})] \end{aligned}$$

où pour tout i , $\varphi(M)_i$ désigne l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{O}_Y(M)/\mathcal{O}_Y(M - D_i)$ et $\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)$ donné par l'identité aux fibres en P_{ij} pour tout j (M est étranger à D_i par définition donc les fibres des faisceaux sont identiques en les P_{ij}). Cette application est bien définie. En effet, si $\overline{M} = \overline{M'}$, il existe $f \in \mathbb{C}(X)^*$, $f \equiv \alpha_i \pmod{D_i}$ pour des scalaires non nuls α_i et f est telle que $M' = M + (f)$. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \downarrow \varphi(M)_i & \searrow \varphi(M')_i & \\ \mathcal{O}_Y(M)/\mathcal{O}_Y(M - D_i) & \xrightarrow{\cdot \alpha_i^{-1} f} & \mathcal{O}_Y(M')/\mathcal{O}_Y(M' - D_i) \end{array}$$

où $\cdot \alpha_i^{-1} f$ désigne la multiplication par l'image de $\alpha_i^{-1} f$ (dans les quotients). La commutativité provient du fait que $\varphi(M)_i$ et $\varphi(M')_i$ sont définis comme l'identité aux fibres et on a $\alpha_i^{-1} f \equiv 1 \pmod{D_i}$. L'application est donc bien définie. On montre facilement qu'elle est injective. En effet, si

$$[\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M'), \{\varphi(M')_i\}],$$

on sait qu'il existe des isomorphismes donnés par des éléments $f_i \in \mathbb{C}(X)^*$ tels que le diagramme suivant est commutatif pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \downarrow \varphi(M)_i & \searrow \varphi(M')_i & \\ \mathcal{O}_Y(M)/\mathcal{O}_Y(M - D_i) & \xrightarrow{\cdot f_i} & \mathcal{O}_Y(M')/\mathcal{O}_Y(M' - D_i) \end{array}$$

Ceci impose $f_i \equiv 1 \pmod{D_i}$, pour tout i . On fixe le premier isomorphisme $f_1 \in \mathbb{C}(X)^*$. On sait qu'il existe des éléments $\alpha_i \in \mathbb{C}(X)^*$ pour $i = 2 \dots r$ tels que $f_1 = \alpha_i f_i$, $\forall i = 2 \dots r$. On a donc $f_1 = \alpha_i \pmod{D_i}$ pour tout $i = 2 \dots r$ et $f_1 \equiv 1 \pmod{D_1}$. Comme par ailleurs, on

a $M' = M + (f_1)$, on a bien que les deux diviseurs sont équivalents donc que l'application est injective.

Montrons maintenant la surjectivité. On veut montrer que pour tout élément $[\mathcal{L}, \{\varphi_i\}]$, il existe un diviseur M étranger à S tel que l'on ait $[\mathcal{L}, \{\varphi\}] = [\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}]$. Il est facile de montrer que pour tout \mathcal{L} il existe un diviseur L étranger à S tel que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y(L)$. Il suffit donc de montrer que pour tout élément $[\mathcal{O}_Y(L), \{\varphi_i\}]$ il existe un diviseur M étranger à S tel que

$$[\mathcal{O}_Y(L), \{\varphi_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}].$$

Lorsque $\deg L > 2g - 2 + \sum_i \deg D_i$, il existe par le corollaire IV.3.10 un diviseur M_0 effectif et équivalent à L (donc étranger à S lui aussi). On note $\{\varphi_i^0\}$ la structure de niveau telle que $[\mathcal{O}_Y(L), \{\varphi_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M_0), \{\varphi_i^0\}]$ et on cherche $f \in \mathbb{C}(X)^*$ satisfaisant $[\mathcal{O}_Y(M_0), \{\varphi_i^0\}] = [\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}]$ et $M = M_0 - (f)$ étranger à D . Le faisceau $\mathcal{O}_Y(M_0)$ admet 1 pour section globale puisque M_0 est effectif. On prend alors $f \in \mathbb{C}(X)^*$ telle que $\bar{f} = \varphi_i^0(\bar{1}) \in \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i)(X)$, pour tout $i = 1 \dots r$. C'est une fonction sans zéro ni pôle en S et elle satisfait :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \downarrow \varphi(M)_i & \searrow \varphi_i^0 & \\ \mathcal{O}_Y(M)/\mathcal{O}_Y(M-D_i) & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_Y(M_0)/\mathcal{O}_Y(M_0-D_i) \end{array}$$

puisque en chaque point P_{ij} on a

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \right)_{P_{ij}} & & \\ \downarrow Id & \searrow \varphi_i^0 & \\ \left(\mathcal{O}_Y(M)/\mathcal{O}_Y(M-D_i) \right)_{P_{ij}} & \xrightarrow{f} & \left(\mathcal{O}_Y(M_0)/\mathcal{O}_Y(M_0-D_i) \right)_{P_{ij}} \end{array}$$

De plus, comme f n'a pas de singularité en S , M est étranger à S et nous avons le résultat souhaité.

Dans le cas où L est un diviseur de degré quelconque, on se donne un point P_0 hors de S et on pose

$$k = 2g - 2 + \sum_i \deg D_i - \deg L.$$

D'après ce qui précède, on sait qu'il existe un diviseur M tel que

$$[\mathcal{O}_Y(L), \{\varphi_i\}] * [\mathcal{O}_Y(k[P_0]), \{\varphi(k[P_0])_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}]$$

ce qui implique

$$[\mathcal{O}_Y(L), \{\varphi_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}] * [\mathcal{O}_Y(-k[P_0]), \{\varphi(-k[P_0])_i\}]$$

et on vérifie facilement que

$$[\mathcal{O}_Y(M), \{\varphi(M)_i\}] * [\mathcal{O}_Y(-k[P_0]), \{\varphi(-k[P_0])_i\}] = [\mathcal{O}_Y(M - k[P_0]), \{\varphi(M - k[P_0])_i\}]$$

ce qui nous donne le résultat. On a donc montré que l'ensemble des faisceaux inversibles munis d'une structure de niveau était en bijection avec J_{D_1, \dots, D_r} . Par ailleurs il est clair que application est un morphisme de groupe.

Approche fonctorielle

On définit un foncteur de la catégorie des schémas sur \mathbb{C} vers celle des groupes abéliens en posant

$$\mathcal{F}(T) = \{(\mathcal{L}, \{\varphi_i\}), \mathcal{L} \text{ sur } Y \times_{\mathbb{C}} T\} / \sim$$

où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur $Y \times_{\mathbb{C}} T$ et

$$\varphi_i : \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} / \mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{L} / ((\mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{O}_T) \otimes \mathcal{L})$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}$ -modules pour tout $i = 1 \dots r$. On quotiente par la relation d'équivalence suivante :

$$(\mathcal{L}, \{\varphi_i\}) \sim (\mathcal{L}', \{\varphi'_i\}) \iff$$

$$\text{il existe } \mathcal{M} \text{ faisceau inversible sur } T, \mathcal{L} = \mathcal{L}' \otimes p_2^* \mathcal{M} \text{ et } \varphi_i = \varphi'_i * \varphi(\mathcal{M})_i, \forall i = 1 \dots r$$

où p_2 désigne la deuxième projection de $Y \times_{\mathbb{C}} T$ vers T . On va préciser ce que l'on entend par $*$ et par $\varphi(\mathcal{M})_i$.

On note $\mathcal{I}_{D_i} := \mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{O}_T$ le faisceau sur $\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}$. On a

$$\frac{p_2^* \mathcal{M}}{\mathcal{I}_{D_i} \otimes p_2^* \mathcal{M}} = \frac{\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{M}}{(\mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{O}_T) \otimes (\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{M})} = \frac{\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{M}}{\mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{M}}, \forall i$$

On note $\varphi(\mathcal{M})_i$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}$ -modules

$$\frac{\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{M}}{\mathcal{O}_Y(-D_i) \boxtimes \mathcal{M}} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}}{\mathcal{I}_{D_i}}$$

obtenu en tensorisant par $(\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{M})^{-1}$. L'isomorphisme $\varphi'_i * \varphi(\mathcal{M})_i$ est obtenu comme suit :

$$\frac{\mathcal{L}' \otimes p_2^* \mathcal{M}}{\mathcal{I}_{D_i} \otimes (\mathcal{L}' \otimes p_2^* \mathcal{M})} \xrightarrow{\text{can}} \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathcal{L}'} \otimes \frac{p_2^* \mathcal{M}}{\mathcal{I}_{D_i} \otimes p_2^* \mathcal{M}} \xrightarrow{\varphi'_i \otimes \varphi(\mathcal{M})_i} \frac{\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}}{\mathcal{I}_{D_i}} \otimes \frac{\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}}{\mathcal{I}_{D_i}} \xrightarrow{\text{can}} \frac{\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}}{\mathcal{I}_{D_i}}$$

On note $[\mathcal{L}, \varphi]$ la classe d'équivalence contenant (\mathcal{L}, φ) . Pour tout schémas T , on pose

$$\text{Pic}_Y(T) := \{[\mathcal{L}], \mathcal{L} \text{ faisceau inversible sur } Y \times_{\mathbb{C}} T\}$$

où $[\mathcal{L}]$ désigne la classe d'équivalence contenant \mathcal{L} pour la relation suivante :

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \iff \text{il existe } \mathcal{M} \text{ inversible sur } T \text{ tel que } \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \otimes p_2^* \mathcal{M}$$

On a l'application naturelle suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(T) & \rightarrow & \text{Pic}_Y(T) \\ [\mathcal{L}, \varphi] & \mapsto & [\mathcal{L}] \end{array}$$

qui est clairement surjective et dont le noyau est

$$M(T) = \left\{ [\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}, \{\varphi_i\}], \text{ avec } \varphi_i : \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} / \mathcal{I}_{D_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} / \mathcal{I}_{D_i} \right\}$$

On a donc la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow M(T) \rightarrow \mathcal{F}(T) \rightarrow \text{Pic}_X(T) \rightarrow 0$$

pour tout schéma T .

Pour montrer que le foncteur \mathcal{F} est représentable, on va considérer un foncteur équivalent défini en utilisant la rigidification. On se restreint au cas d'un unique diviseur $D := D_1$ (et $r = 1$).

Définition IV.3.11. *On fixe un point P_0 en dehors du support de D . On appelle **fibré en droite rigidifié avec structure de niveau** un triplet $(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$ où \mathcal{L} est un fibré en droite sur Y , φ est une structure de niveau c'est-à-dire un isomorphisme de \mathcal{O}_Y -module*

$$\mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y(-D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} / \mathcal{L}(-D)$$

et ψ est isomorphisme de \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L} / \mathcal{L}(-[P_0])$$

Deux triplets $(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$ et $(\mathcal{L}', \varphi', \psi')$ sont **équivalents** s'il existe un isomorphisme $\theta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ faisant commuter les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y(-D) & & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & \searrow \varphi' & \downarrow \psi \\ \mathcal{L} / \mathcal{L}(-D) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{L}' / \mathcal{L}'(-D) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & \mathcal{L}' / \mathcal{L}'(-[P_0]) \\ \downarrow \psi & \searrow \psi' & \downarrow \tilde{\theta} \\ \mathcal{L} / \mathcal{L}(-[P_0]) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{L}' / \mathcal{L}'(-[P_0]) \end{array}$$

où on note comme d'habitude $\tilde{\theta}$ l'application induite par θ sur les quotients.

Ceci nous permet de définir un foncteur \mathcal{G} de la catégorie des schémas sur \mathbb{C} vers celle des groupes abéliens. Par définition, $\mathcal{G}(T)$ est l'ensemble des classes d'équivalence

de triplets $(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$ où \mathcal{L} est un fibré en droite sur $Y \times_{\mathbb{C}} T$, φ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}$ -module

$$\varphi : \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} / \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}(-D \times T) \rightarrow \mathcal{L} / \mathcal{L}(-D \times T)$$

et ψ un isomorphisme de \mathcal{O}_T -module

$$\psi : \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{L} / \mathcal{L}(-[P_0] \times T)$$

Précisons ce que l'on entend par $-D \times T$. On a $D = \sum n_i [P_i]$ et on note $-D \times T$ le diviseur $\sum_i (-n_i) \{P_i\} \times T$ de $Y \times_{\mathbb{C}} T$. La relation d'équivalence est similaire à celle définie ci-dessus en remplaçant Y par $Y \times_{\mathbb{C}} T$. Il est clair que l'ensemble des classes d'équivalence est munie d'une structure de groupe. En effet, comme précédemment, on considère le produit tensoriel des fibrés en droite et on utilise les applications naturelles $\mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} \otimes \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T} \rightarrow \mathcal{O}_{Y \times_{\mathbb{C}} T}$ et $\mathcal{O}_T \times \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T$. Il est clair que le groupe obtenu ainsi est abélien.

On rappelle maintenant que le foncteur de Picard, représenté par la variété de Picard, peut être défini comme suit : Soit T un schéma sur \mathbb{C} , on note $\text{Pic}_Y(T)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fibrés en droite rigidifiés c'est-à-dire les couples (\mathcal{L}, ψ) où \mathcal{L} est un fibré en droite sur $Y \times_{\mathbb{C}} T$ et ψ une rigidification. On a clairement un morphisme de foncteur $\mathcal{G} \rightarrow \text{Pic}_Y$ qui est le foncteur oubli. Ceci va nous permettre de montrer la représentabilité de \mathcal{G} en utilisant celle de Pic_Y . On a le résultat suivant :

Proposition IV.3.12. *Le foncteur \mathcal{G} est représentable par un schéma en groupe abélien $J(D)$ de type fini sur \mathbb{C} . De plus, on a une suite exacte de schémas en groupes abéliens :*

$$1 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\sum (n_i - 1)} \rightarrow J(D) \rightarrow \text{Pic}_Y \rightarrow 1$$

avec $D = \sum_{i=1}^r n_i [P_i]$.

Démonstration. On note $(\mathcal{U}, \psi_{\mathcal{U}})$ le fibré en droite rigidifié sur $Y \times \text{Pic}Y$ qui est l'objet universel du foncteur \mathcal{G} . On considère le faisceau

$$\text{Isom} \left(\mathcal{O}_{Y \times \text{Pic}Y} / \mathcal{O}_{Y \times \text{Pic}Y}(-D \times \text{Pic}Y), \mathcal{U} / \mathcal{U}(-D \times \text{Pic}Y) \right),$$

où *Isom* signifie l'ensemble des isomorphismes au-dessus de $\mathcal{O}_{Y \times \text{Pic}Y}$. On note p_2 la deuxième projection $p_2 : Y \times \text{Pic}Y \rightarrow \text{Pic}Y$. Soit

$$\mathcal{A} := p_{2*} \mathcal{O}_{Y \times \text{Pic}Y} / \mathcal{O}_{Y \times \text{Pic}Y}(-D \times \text{Pic}Y)$$

et

$$\mathcal{B} := p_{2*} \mathcal{U} / \mathcal{U}(-D \times \text{Pic}Y)$$

On remarque que \mathcal{A} est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\text{Pic}Y}$ -algèbres commutatives sur $\text{Pic}Y$. Plus explicitement, \mathcal{A} est isomorphe à $\mathcal{O}_{\text{Pic}Y} \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{O}_Y / \mathcal{O}_Y(-D))$. De plus, le schéma

sur $\text{Pic}Y$ associé au faisceau $\text{Isom}_{\mathcal{O}_{\text{Pic}Y}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est égal au produit en tant que schéma en groupe abélien $\text{Pic}Y \times ((\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)})$.

L'image directe \mathcal{B} de $\mathcal{U}/\mathcal{U}(-D \times \text{Pic}Y)$ est un faisceau sur $\text{Pic}Y$ localement (pour la topologie de Zariski) isomorphe à \mathcal{A} . Posons $\mathcal{S} = \text{Isom}_{\mathcal{O}_{\text{Pic}Y}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et montrons que c'est localement le produit $\text{Aut}(H^0(\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D))) = (\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}$ et d'un ouvert de $\text{Pic}Y$. On choisit une trivialisaton de \mathcal{B} . Elle est donnée par un recouvrement ouvert $\{Z_j\}$ de $\text{Pic}Y$ et un ensemble de $\mathcal{O}|_{Z_j}$ -isomorphismes

$$\alpha_j : \mathcal{A}|_{Z_j} \rightarrow \mathcal{B}|_{Z_j}.$$

La restriction $\mathcal{S}|_{Z_j}$ de $\mathcal{S} = \text{Isom}_{\mathcal{O}_{\text{Pic}Y}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ à Z_j est isomorphe à $\text{Isom}_{\mathcal{O}_{\text{Pic}Y}}(\mathcal{A}|_{Z_j}, \mathcal{A}|_{Z_j})$ par α_j et ce dernier est égal à $((\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}) \times Z_j$. Ces schémas se recollent au-dessus de $Z_j \cap Z_k$ par les isomorphismes

$$((\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}) \times (Z_j \cap Z_k) \rightarrow ((\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}) \times (Z_j \cap Z_k)$$

de la forme $(m, z) \mapsto (\alpha_k^{-1}\alpha_j \cdot m, z)$. Notons $J(D) \rightarrow \text{Pic}Y$ le fibré géométrique correspondant à \mathcal{S} . Alors cette application est une fibration de fibre $(\mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}$.

La construction de $J(D)$ implique que $J(D)$ est un schéma abélien. La suite exacte de la proposition est également claire. Il reste à montrer que $J(D)$ représente \mathcal{G} . Pour un élément $(\mathcal{L}, \varphi, \psi) \in \mathcal{G}(T)$ on trouve un unique morphisme $g : T \rightarrow \text{Pic}Y$ tel que $g^*(\mathcal{U}, \psi_{\mathcal{U}})$ soit isomorphe (de manière unique) à (\mathcal{L}, ψ) . On veut maintenant construire une application $T \rightarrow J(D)$ en utilisant la structure de niveau φ . On commence par choisir un raffinement de $\{Z_j\}$, disons $\{W_j\}$, qui trivialisent le fibré universel \mathcal{U} . Pour tout ouvert W_j , on fixe un isomorphisme $\psi_i : \mathcal{U}|_{W_j} \rightarrow \mathcal{U}|_{W_j}(-D \times \text{Pic}Y)$. Soit $T_i := g^{-1}(W_i)$ et considérons le pullback $g|_{T_i}^* \psi_i$. Pour tout $t \in T_i$, les deux isomorphismes φ_t et $(g|_{T_i}^* \psi_i)_t$ sont égaux à multiplication par un élément $\alpha_i(t)$ de $\text{Aut}(H^0(X, \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D)))$. On définit ainsi une application

$$T_i \rightarrow W_i \times \text{Aut}(H^0(X, \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D)))$$

donnée par $t \mapsto (g(t), \alpha_i(t))$ et il est clair que l'on peut recoller ces fonctions locales pour obtenir une application $T \rightarrow J(D)$. Ceci prouve la représentabilité du foncteur \mathcal{G} et ceci achève la preuve de la proposition. \square

Corollaire IV.3.13. *Le morphisme $J(D) \rightarrow \text{Pic}Y$ est une fibration de fibre $(\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\Sigma(n_i-1)}$.*

Démonstration. Le résultat est clair par la construction de $J(D)$ donnée dans la preuve précédente. \square

Remarque IV.3.14.

1. On aurait pu aussi considérer une relation d'équivalence différente en disant que deux triplets $(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$ et $(\mathcal{L}', \varphi', \psi')$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ tel que $\psi' = \hat{f} \circ \psi$ et $\varphi' = \beta \cdot \hat{f} \circ \varphi$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$. Le foncteur associé à cette relation d'équivalence est $J(D)/\mathbb{C}^*$.

2. De plus, on montre facilement que l'on a $J_D \simeq J(D)/\mathbb{C}^*$, où J_D est l'ensemble des classes d'équivalence des fibrés en droite avec structure de niveau sur un unique diviseur D , comme défini dans la sous-section IV.3.2. En effet, le choix d'une rigidification est déterminé par un élément de \mathbb{C}^* et le noyau de l'application de $J(D)$ vers J_D donnée par $(\mathcal{L}, \varphi, \psi) \mapsto (\mathcal{L}, \varphi)$ est donc \mathbb{C}^* .
3. On remarque aussi que l'on a $J(D) \simeq J_{D+[P_0]}$. En d'autres termes, la rigidification est équivalente à ajouter un point donné au support du diviseur.
4. On suppose maintenant que l'on a une collection de diviseurs positifs D_1, \dots, D_r avec comme avant $D_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij}[P_{ij}]$ et les supports disjoints. Soit $D = \sum_{i=1}^r D_i$. On a clairement une application de $J(D)$ vers J_{D_1, \dots, D_r} . Elle est obtenue en 'divisant' la structure de niveau φ d'un triplet $(\mathcal{L}, \varphi, \psi)$ en r structures de niveau φ_i pour chaque diviseur D_i . L'application est clairement surjective et le noyau est $(\mathbb{C}^*)^r$. Ainsi, on a

$$J_{D_1, \dots, D_r} \simeq J(D_1 + \dots + D_r)/(\mathbb{C}^*)^r$$

et le foncteur \mathcal{F} associé aux fibrés en droite avec structure de niveau est donc représenté par J_{D_1, \dots, D_r} .

5. De manière générale, on peut fixer un sous-groupe algébrique H de $(\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\sum(n_i-1)}$ et on observe que $J(D)/H$ représente les fibrés en droite rigidifiés avec structure de niveau et pour la relation d'équivalence associée à H .

Jacobienne d'une courbe singulière

On commence par montrer le résultat suivant :

Proposition IV.3.15. *La variété de Picard de la courbe singulière X_{D_1, \dots, D_r} est canoniquement isomorphe à J_{D_1, \dots, D_r} .*

Démonstration. Notons $s : Y \rightarrow Y_{D_1, \dots, D_r}$ la normalisation de la courbe. Par facilité, on se restreint aux fibrés en droite sur Y_{D_1, \dots, D_r} (au lieu des familles). Nous allons construire une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence des fibrés en droite sur Y_{D_1, \dots, D_r} et l'ensemble J_{D_1, \dots, D_r} des classes d'équivalence des fibrés en droite sur Y avec structure de niveau.

On se donne un fibré en droite \mathcal{L} sur Y_{D_1, \dots, D_r} . On considère le pullback $\mathcal{M} := s^*\mathcal{L}$ de \mathcal{L} et nous voulons construire une structure de niveau. Soit Q_i le point singulier de Y_{D_1, \dots, D_r} qui correspond à D_i et on choisit un voisinage ouvert U_i de Q_i qui ne contienne pas d'autre singularité et tel que $\mathcal{L}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}e$ pour un certain élément e . Alors e est unique à multiplication par un élément de $\mathcal{O}_{U_i}(U_i)^*$ près. On pose $V_i = s^{-1}(U_i)$, et $\mathcal{M}|_{V_i}$ est alors engendré par e sur \mathcal{O}_{V_i} . Le générateur e induit un isomorphisme

$$\varphi_i : \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) = \mathcal{O}_{V_i}/\mathcal{O}_{V_i}(-D_i) \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i)$$

de \mathcal{O}_Y -modules, qui est unique à un élément de \mathbb{C}^* près. Les isomorphismes φ_i nous donne une structure de niveau sur \mathcal{L} et on envoie la classe $[\mathcal{L}]$ de \mathcal{L} sur la classe d'équivalence contenant $(\mathcal{M}, \{\varphi_i\})$.

Cette application est bien définie. En effet, supposons qu'on a $[\mathcal{L}] = [\mathcal{L}']$ et on note \mathcal{M} et \mathcal{M}' les pullbacks de \mathcal{L} et \mathcal{L}' . Par hypothèse, il existe un isomorphisme $\theta : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ et de ce fait un isomorphisme entre les restrictions $\mathcal{L}|_{U_i}$ et $\mathcal{L}'|_{U_i}$ qui induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}|_{V_i}$ et $\mathcal{M}'|_{V_i}$. Par construction on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \varphi_i \downarrow & \searrow \varphi'_i & \\ \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{M}'/\mathcal{M}'(-D_i) \end{array}$$

ce qui montre que $[\mathcal{M}, \{\varphi_i\}] = [\mathcal{M}, \{\varphi'_i\}]$.

On veut maintenant construire une application inverse. On se donne un fibré en droite \mathcal{M} sur Y muni d'une structure de niveau

$$\varphi_i : \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i)$$

On définit un fibré en droite $\mathcal{L} \subset s_*\mathcal{M}$ sur Y_{D_1, \dots, D_r} de la manière suivante. La restriction de \mathcal{L} au lieu régulier de Y_{D_1, \dots, D_r} (qui est $|Y_{D_1, \dots, D_r} \setminus S| = |Y \setminus S|$) est simplement la restriction de $s_*\mathcal{M}$ au même ouvert, c'est-à-dire $|Y \setminus S|$. Pour un point singulier Q_i on choisit un voisinage ouvert U_i suffisamment petit et on impose que le générateur de $\mathcal{L}|_{U_i}$ au-dessus de \mathcal{O}_{U_i} soit l'image $\varphi_i(\bar{1}) \in \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i)(s^{-1}(U_i))$ de la section 1 poussée en avant par s_* sur Y_{D_1, \dots, D_r} . Ce choix d'un générateur est fait modulo $\mathcal{O}_{U_i}(U_i)^*$. Montrons que cette application est bien définie. On suppose que l'on a $[\mathcal{M}, \{\varphi_i\}] = [\mathcal{M}', \{\varphi'_i\}]$ et on note \mathcal{L} et \mathcal{L}' les fibrés en droite sur Y_{D_1, \dots, D_r} construit comme ci-dessus. Par hypothèse, il existe des isomorphismes $\theta_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ tels que le diagramme suivant commute pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-D_i) & & \\ \varphi_i \downarrow & \searrow \varphi'_i & \\ \mathcal{M}/\mathcal{M}(-D_i) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_i} & \mathcal{M}'/\mathcal{M}'(-D_i) \end{array}$$

On a donc $\varphi_i(\bar{1}) = \theta_i \circ \varphi'_i(\bar{1})$ ce qui implique $\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathcal{L}'|_{U_i}$ pour tout i et les fibrés en droite sont donc isomorphes. Ce qui précède montre que le foncteur associé aux fibrés en droite sur X_{D_1, \dots, D_r} est isomorphe à celui associé à J_{D_1, \dots, D_r} . \square

Remarque IV.3.16. *La proposition IV.3.15 justifie l'introduction de fibrés vectoriels sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau en les points au-dessus des points singuliers de X .*

Ce résultat combiné avec l'approximation de toute courbe singulière par une courbe singulière spéciale (Cf remarque IV.1.7) permet d'obtenir une description explicite de la variété de Picard d'une courbe singulière.

Corollaire IV.3.17. *Soit X une courbe singulière et \tilde{X} sa normalisée. Alors il existe un diviseur effectif D de \tilde{X} (étranger aux relevés des points singuliers de X) et un groupe algébrique H de $(\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}^{\sum_i(n_i-1)}$ tels que le foncteur associé aux fibrés en droite sur X soit représenté par $J(D)/H$*

Démonstration. Ceci se déduit de la proposition IV.3.15 et du fait qu'il existe un morphisme birationnel fini

$$Y \rightarrow Y_{D_1, \dots, D_s}$$

□

Exemple :

Soient D_1, \dots, D_r des diviseurs effectifs à support disjoint et tels que $D_i = \sum_j [P_{ij}]$ (i.e. toutes les multiplicités égales à 1) et de degré au moins 2. Ceci est équivalent à demander que la courbe Y_{D_1, \dots, D_r} n'ait que r points singuliers, chacun multiple ordinaire. Alors, la variété de Picard J_{D_1, \dots, D_r} de Y_{D_1, \dots, D_r} est une extension de $\text{Pic} X$ par \mathbb{G}_m^t avec $t = (\sum_i \deg D_i) - r$.

IV.4 Correspondance de Hecke

IV.4.1 Enoncé

On rappelle que l'on s'est donné une courbe X singulière sur \mathbb{C} mais n'ayant que des points multiples ordinaires. On a noté \tilde{X} sa normalisée et on a montré que la catégorie des systèmes locaux sur X est équivalente à celle des systèmes locaux sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau. On a montré le même résultat pour les connexions. Les structures de niveau dans ce cas correspondent à des diviseurs n'ayant que des multiplicités égales à 1. On les note comme auparavant D_1, \dots, D_r avec $D_i = \sum_{j=1}^{r_i} [P_{ij}]$.

On note $S = \cup_i \text{supp}(D_i)$ et J_{D_1, \dots, D_r} désigne comme avant l'ensemble des classes d'équivalences de faisceaux localement libres de rang 1 sur \tilde{X} munis d'une structure de niveau associée à ces diviseurs. C'est sur cet ensemble que l'on veut établir la correspondance de Hecke. On note $\text{Hecke}_1(T)$ l'ensemble des triplets $((\mathcal{L}, \{\varphi_i\}), (\mathcal{L}', \{\varphi'_i\}), x)$ où $x \in (\tilde{X} \setminus S)$ et $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sont des fibrés en droite sur $\tilde{X} \times_{\mathbb{C}} T$ munis d'une structure de niveau et satisfaisant $\mathcal{L}/\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X} \times_{\mathbb{C}} T} / \mathcal{O}_{\tilde{X} \times_{\mathbb{C}} T}(-[x])$ et $\{\varphi_i\} = \{\varphi'_i\}$. Nous ne considérerons que les \mathbb{C} -points de ce champ et l'isomorphisme $\mathcal{O}_{\tilde{X}} / \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-[x])$ impose $(\mathcal{L}', \{\varphi'_i\}) = (\mathcal{L}(-[x]), \{\varphi_i\})$. Précisons le sens de l'égalité $\{\varphi_i\} = \{\varphi'_i\}$. Les faisceaux \mathcal{L} et $\mathcal{L}(-[x])$ ont même fibre en tous les points de S puisque x n'appartient pas à S . Cela

a donc un sens de demander que les isomorphismes aux fibres soient égaux aux fibres. On a

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}_1 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (\tilde{X} \setminus S) \times J_{D_1, \dots, D_r} & \xrightarrow{H} & J_{D_1, \dots, D_r} \end{array}$$

où $H(x, (\mathcal{L}, \{\varphi_i\})) = (\mathcal{L}([x]), \{\varphi_i\})$.

Théorème IV.4.1. *Soit $(\mathcal{V}, \nabla, \{\varphi_i\})$ une connexion de rang 1 sur Y avec structure de niveau. Il existe une connexion $(\mathcal{K}, \nabla_{\mathcal{K}})$ de rang 1 sur J_{D_1, \dots, D_r} qui satisfait $H^* \mathcal{K} \simeq \mathcal{V}|_{Y \setminus S} \boxtimes \mathcal{K}$ (isomorphisme de connexions)*

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on note J_{D_1, \dots, D_r}^k l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droite de degré k et on note H_k la restriction

$$H_k : (\tilde{X} \setminus S) \times J_{D_1, \dots, D_r}^k \rightarrow J_{D_1, \dots, D_r}^{k+1}$$

IV.4.2 Preuve du théorème IV.4.1 en utilisant le cas G_m

On a vu que l'on a la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^N \rightarrow J_{D_1, \dots, D_r} \rightarrow \text{Pic} \tilde{X} \rightarrow 0$$

où $N := \sum_i (r_i - 1)$. On note $F := (\mathbb{C}^*)^N$ pour alléger les notations. On commence par oublier la structure de niveau et ne considérer que la connexion (\mathcal{V}, ∇) . D'après le cas G_m sans singularités (Cf section III.2), on sait qu'il existe une connexion $(\mathcal{M}, \nabla_{\mathcal{M}})$ sur $\text{Pic} \tilde{X}$ telle que $h^* \mathcal{M} = \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{M}$ où

$$h : \tilde{X} \times \text{Pic} \tilde{X} \rightarrow \text{Pic} \tilde{X}, (x, [\mathcal{V}]) \mapsto [\mathcal{V}([x])].$$

On a donc

$$h^* \mathcal{M} = \mathcal{V}|_{(\tilde{X} \setminus S)} \boxtimes \mathcal{M}$$

où $h| := h|_{(\tilde{X} \setminus S) \times \text{Pic} \tilde{X}}$. Cette connexion correspond à une (unique) représentation

$$\rho_{\mathcal{M}} : \pi_1(\text{Pic} \tilde{X}) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

satisfaisant

$$\rho_{\mathcal{M}} \circ \tilde{h}| \simeq \rho_{\mathcal{M}} \otimes \mu|$$

où $\mu|$ désigne la représentation associée à $(\mathcal{V}, \nabla)|_{\tilde{X} \setminus S}$ et $\tilde{h}|$ est l'application induite par $h|$ entre les π_1 . On note $\rho_{\mathcal{M}}^k$ la représentation de $\pi_1(\text{Pic}^k \tilde{X})$ induite par $\rho_{\mathcal{M}}$. Il est clair qu'une telle représentation vérifie

$$\rho_{\mathcal{M}}^{k+1} \circ \tilde{h}| \simeq \rho_{\mathcal{M}}^k \otimes \mu|$$

où on note encore h_{\downarrow} l'application $h_{\downarrow} : (\tilde{X} \setminus S) \times \text{Pic}^k \tilde{X} \rightarrow \text{Pic}^{k+1} \tilde{X}$.

D'autre part, on a une représentation naturelle sur F donnée par la structure de niveau. En effet, il existe un diviseur Δ étranger à D_1, \dots, D_r et tel que $\mathcal{V} \sim \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\Delta)$ et on peut trouver une structure de niveau $\{\psi_i\}$ telle que $(\mathcal{V}, \{\varphi_i\}) \sim (\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\Delta), \{\psi_i\})$. La structure de niveau ψ sur $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\Delta)$ donne une structure de niveau sur $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ que l'on note encore ψ . Le faisceau avec structure de niveau $(\mathcal{O}_{\tilde{X}}, \{\psi\})$ est dans le noyau de $J_{D_1, \dots, D_r} \rightarrow \text{Pic} \tilde{X}$, il correspond donc à un unique élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in F$. On définit une représentation en posant

$$\rho_F : \pi_1((\mathbb{C}^*)^N) \simeq \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{C}^*, \forall \mu((n_1, \dots, n_N)) = \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_N^{n_N}$$

Nous pouvons maintenant définir une représentation η^k de $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k)$. On remarque tout d'abord que la fibration $J_{D_1, \dots, D_r} \rightarrow \text{Pic} \tilde{X}$ (Cf Corollary IV.3.13) restreinte aux diviseurs de degré 0 nous donne la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow F \rightarrow J_{D_1, \dots, D_r}^0 \rightarrow \text{Pic}^0 \tilde{X} \rightarrow 0$$

Par le théorème B.0.9, la suite précédente induit une suite exacte longue d'homotopie et puisque $\pi_0(F)$ et $\pi_2(\text{Pic}^0 \tilde{X})$ sont tous les deux triviaux, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^0) \rightarrow \pi_1(\text{Pic}^0 \tilde{X}) \rightarrow 0$$

De plus, pour tout entier k , on a $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^0) \simeq \pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k)$ et $\pi_1(\text{Pic}^0 \tilde{X}) \simeq \pi_1(\text{Pic}^k \tilde{X})$ donc pour tout k on a

$$0 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k) \rightarrow \pi_1(\text{Pic}^k \tilde{X}) \rightarrow 0$$

Observons maintenant que $\pi_1(F) \simeq \mathbb{Z}^N$ et $\pi_1(\text{Pic}^k \tilde{X}) = \pi_1(\tilde{X})_{ab} = \mathbb{Z}^{2g}$ où g est le genre de X ce qui implique

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^N \rightarrow \pi_1(J_k) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow 0$$

Puisque $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k)$ est abélien, la suite précédente se scinde et on obtient $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k) \simeq \mathbb{Z}^{2g+N}$. On peut donc construire facilement une représentation de $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r}^k)$ à partir d'une représentation de $\pi_1(F)$ et d'une de $\pi_1(\text{Pic}^k \tilde{X})$ en prenant leur produit. On pose $\eta^k := \rho_F \otimes \rho_{\mathcal{M}}^k$ et on vérifie que cette représentation satisfait

$$\eta^{k+1} \circ \tilde{H} \simeq \mu \otimes \eta^k$$

où on note \tilde{H} l'application induite par H sur les π_1 (et par abus de langage on note encore H l'application restreinte aux fibrés de degré k). En posant $\eta = (\eta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ on obtient une représentation de $\pi_1(J_{D_1, \dots, D_r})^k$ qui vérifie

$$\eta \circ \tilde{H} \simeq \mu \otimes \eta.$$

On note $(\mathcal{K}, \nabla_{\mathcal{K}})$ la connexion sur J_{D_1, \dots, D_r} correspondant à η . Il est clair que cette connexion vérifie la propriété requise ce qui achève la preuve du théorème.

Annexe A

De Langlands à Langlands géométrique

A.1 La correspondance en caractéristique positive

Dans toute cette section, on reprend l'article de E. Frenkel [Fre] en donnant plus de détails. On se réfère régulièrement au livre 'introduction to the Langlands program' [BG].

A.1.1 La théorie du corps des classes

Soit F un corps global c'est-à-dire un corps de nombre ou le corps des fonctions d'une courbe lisse projective (géométriquement irréductible) sur un corps fini. La théorie du corps de classe abélien décrit le groupe de galois $Gal(F^{ab}/F)$ de l'extension maximale abélienne d'un corps global en fonction du quotient $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$ où \mathbb{A}_F (ou \mathbb{A} quand il n'y a pas d'ambiguïté) désigne l'anneau des adèles de F . Plus précisément, le groupe $Gal(F^{ab}/F)$ est en bijection avec le complété profini de $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$. Le groupe $Gal(F^{ab}/F)$ est le quotient maximal abélien de $Gal(\bar{F}/F)$ où \bar{F} est la clôture séparable de F . Un tel quotient est déterminé par les représentations de dimension 1 de $Gal(\bar{F}/F)$. On peut donc reformuler la théorie du corps de classe abélien en disant que les représentations de dimension 1 de $Gal(\bar{F}/F)$ sont 'presque' en bijection avec celles du groupe abélien \mathbb{A}_F^* qui proviennent d'une action sur l'espace des fonctions sur $F^* \backslash \mathbb{A}_F^* = GL_1(F) \backslash GL_1(\mathbb{A}_F)$.

Robert Langlands a conjecturé que ceci se généralise aux représentations de dimension n . La correspondance de Langlands est plus qu'une simple bijection puisqu'elle relie également les valeurs propres des classes de conjugaison du Frobenius du côté galoisien aux valeurs propres de Hecke du côté automorphe. On va se restreindre au cas des corps de fonctions puisque c'est le cas qui nous intéressera par la suite. On se donne donc une courbe X lisse projective sur un corps fini \mathbb{F}_q et on note $\bar{X} = X \times_{Spec \mathbb{F}_q} Spec \bar{\mathbb{F}}_q$ où $\bar{\mathbb{F}}_q$ désigne une clôture algébrique de \mathbb{F}_q . On suppose que \bar{X} est irréductible (autrement dit que X est **géométriquement irréductible**). On note F le corps de fonctions de X , \bar{F} sa clôture séparable et $G_F := Gal(\bar{F}/F)$ le groupe de Galois. On se restreint aux représentations irréductibles de rang n de G_F . Toute représentation de G_F peut s'écrire comme le produit tensoriel d'une représentation de rang 1 et d'une représentation dont le déterminant est d'ordre fini. De même, toute représentation de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ peut s'écrire comme le produit tensoriel d'une représentation de rang 1 et d'une représentation dont le caractère central est d'ordre fini. La théorie du corps de classe abélien nous permet donc de nous restreindre aux représentations de G_F et de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ dont le déterminant, respectivement le caractère central, est d'ordre fini.

On va maintenant expliciter les objets que l'on considère de chaque côté afin d'énoncer la correspondance de Langlands.

A.1.2 Le côté galoisien :

On considère un "point \bar{x} de \bar{F} au-dessus d'un point $x \in |X|$ ". Le corps \bar{F} n'est pas le corps de fonctions d'une courbe, on n'a donc pas la notion de points fermés. Par abus de langage, on appellera un **point \bar{x} au dessus de $x \in |X|$** la donnée d'une valuation $v_{\bar{x}}$ de \bar{F} qui étend celle correspondant à x . On note $\mathcal{O}_{\bar{x}} = \{y \in \bar{F}, v_{\bar{x}}(y) \geq 0\}$.

Définition A.1.1. On appelle **groupe de décomposition** le sous-groupe de G_F qui préserve \bar{x} soit $D_x := \{\tau \in G_F / \tau(\mathcal{O}_{\bar{x}}) = \mathcal{O}_{\bar{x}}\}$. Un choix différent de \bar{x} donne un sous-groupe conjugué. De plus, on a $D_x \simeq \text{Gal}(\bar{F}_x / F_x)$, avec $F_x := \text{Frac } \widehat{\mathcal{O}_x}$.

On note k_x le corps résiduel en x et \bar{k}_x sa clôture algébrique. On a donc $k_x = \widehat{\mathcal{O}_x} / m_x$ où m_x désigne l'idéal maximal de $\widehat{\mathcal{O}_x}$.

Définition A.1.2. Le **sous-groupe d'inertie** I_x est le noyau de l'homomorphisme naturel $D_x \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}_x / k_x)$. On a donc $I_x = \{g \in D_x, (g-1)y \in m_x, \forall y \in \bar{F}_x\}$

On note $q_x = q^{\deg x}$. On a alors $k_x = \mathbb{F}_{q_x}$. On note Fr_x le Frobenius défini comme l'inverse de l'automorphisme $y \mapsto y^{q_x}$ de \bar{k}_x .

Définition A.1.3. Un homomorphisme continu de groupe $\sigma : G_F \rightarrow H$ est dit **non ramifié** en x si son noyau contient I_x . Cette définition est indépendante du choix de \bar{x} .

Lorsque l'homomorphisme est non-ramifié, on peut choisir un antécédent du Frobenius par l'application $D_x \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}_x / k_x)$ et considérer son image par σ . Celle-ci ne dépend pas du choix de l'antécédent puisque $I_x \subset \ker \sigma$. On note $\sigma(Fr_x)$ la classe de conjugaison dans H de cet élément.

On se donne un nombre premier l qui ne divise pas q et on note \mathbb{Q}_l le corps des nombres l -adiques. On peut maintenant définir les objets qui nous intéressent :

Définition A.1.4. On appelle **représentation l -adique** de G_F de rang n un homomorphisme $\sigma : G_F \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ qui satisfait les conditions suivantes :

- Il existe une extension finie $E \subset \overline{\mathbb{Q}_l}$ de \mathbb{Q}_l telle que σ se factorise en un homomorphisme $G_F \rightarrow \text{GL}_n(E)$, qui est continu pour la topologie de Krull de G_F et la topologie l -adique sur $\text{GL}_n(E)$.
- L'homomorphisme est non ramifié en presque tous les points $x \in |X|$.

On note \mathcal{G}_n l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles l -adiques de G_F de rang n dont le déterminant est d'ordre fini. Etant donnée une telle représentation σ et un point fermé x en lequel σ est non ramifié, on peut considérer l'ensemble des classes de conjugaison du Frobenius $\{\sigma(Fr_x)\}$ dans $\text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$. On note $\sigma_x := \sigma(Fr_x)$ et $(z_1(\sigma_x), \dots, z_n(\sigma_x))$ l'ensemble, défini à permutation près, de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Le théorème de densité de Chebotarev implique le résultat suivant :

Proposition A.1.5. *Soient deux représentations l -adiques semi-simples ayant des ensembles de classes de conjugaison du Frobenius identiques pour presque tout point $x \in |X|$, alors ces deux représentations sont équivalentes.*

A.1.3 Le côté automorphe

On commence par rappeler quelques faits généraux sur les représentations.

Définition A.1.6. *Soit $\pi : G \rightarrow \mathrm{Gl}(E)$ une représentation provenant de l'action d'un groupe topologique réductif G sur un espace vectoriel E . Elle est dite **irréductible** s'il elle ne contient pas de sous-représentations non-triviales. On dira qu'elle est **admissible** si le stabilisateur $\mathrm{Stab}(v)$ de chaque élément v de E est ouvert et si pour tout sous-groupe ouvert $K \subset G$ le sous espace vectoriel E^K des vecteurs fixés par K est de dimension finie.*

On se place maintenant dans le cas où l'on a $G = \mathrm{GL}_n(F_x)$, $x \in |X|$ et π est une représentation irréductible et admissible. La représentation sera dite **non-ramifiée** ou **sphérique** si l'ensemble de vecteurs fixés par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$ est non nul. Dans ce cas, on peut montrer qu'il est de dimension un. On a le résultat suivant :

Proposition A.1.7.

1. *Pour tout $x \in |X|$ on se donne une représentation admissible irréductible (π_x, V_x) de $\mathrm{GL}_n(F_x)$. Pour presque tout x , on suppose que π_x est non ramifiée et on fixe un vecteur non-nul $v_x \in V_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$. On considère la limite directe $V := \bigotimes'_x V_x$ des espaces $V_S = \bigotimes_{x \in S} V_x$ où S est un sous-ensemble fini de $|X|$ contenant toutes les places ramifiées et l'inclusion $V_S \hookrightarrow V_T$ lorsque $S \subset T$ est donnée par $x_S \mapsto x_S \otimes (\bigotimes_{x \in (T \setminus S)} v_x)$. Alors la représentation $(\pi, V) := (\bigotimes' \pi_x, V)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est irréductible et admissible.*
2. *Réciproquement, soit (π, V) est une représentation admissible et irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, alors il existe une collection de représentations (π_x, V_x) comme ci-dessus et un isomorphisme de représentations*

$$(\pi, V) \xrightarrow{\sim} (\bigotimes' \pi_x, \bigotimes'_x V_x).$$

(cf [God, thm2 chp3.7] ou [BG, thm2.5 chp7]) Par définition, un élément de $\bigotimes'_{x \in |X|} V_x$ est une somme d'éléments de la forme $\bigotimes w_x$ avec $w_x \in \pi_x$ et $w_x = v_x$ pour presque tout $x \in |X| \setminus S$.

On va maintenant s'intéresser aux représentations provenant d'une action sur l'ensemble des formes paraboliques automorphes. On considère le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ munie d'une mesure de Haar notée d que l'on normalise pour avoir $d(\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})) = 1$. De plus, sur chaque composante en x , on a une mesure que l'on note μ que l'on normalise pour

avoir $\mu(\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)) = 1 \forall x \in |X|$. On note P_{n_1, n_2} le groupe parabolique standard associé à la partition $n = n_1 + n_2$ c'est à -dire l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{c} n_1 \updownarrow \\ n_2 \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc} \nabla & * \\ 0 & \nabla \end{array} \right) \in M_n(F), n_1 + n_2 = n \text{ et } \nabla \in \mathrm{GL}_{n_i}(F), i = 1, 2 \right\}$$

et

$$N_{n_1, n_2} := \left\{ \begin{array}{c} n_1 \updownarrow \\ n_2 \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc} Id & * \\ 0 & Id \end{array} \right) \in M_n(F), n_1 + n_2 = n \right\} \subset P_{n_1, n_2}$$

Définition A.1.8. Une fonction $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ est une **forme automorphe parabolique** (*cuspidal en anglais*) si elle satisfait les conditions suivantes :

1. Elle est invariante à gauche par $\mathrm{GL}_n(F)$.
2. Elle est invariante à droite par un sous groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.
3. Il existe un élément $a \in \mathbb{A}^*$ de degré non nul tel que $\varphi(ag) = \varphi(g)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$.

$$4. \int_{N_{n_1, n_2}(F) \backslash N_{n_1, n_2}(\mathbb{A})} \varphi(ug) du = 0, \forall g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F).$$

Remarque A.1.9. La somme a lieu sur un ensemble compact, c'est donc une somme finie et l'intégrale est donc bien définie.

On note V l'espace vectoriel des formes automorphes paraboliques sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ agit sur V . L'action est $(g, \varphi)(h) = \varphi(hg)$, $\forall g, h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ et $\varphi \in V$. Montrons que l'action est bien définie. Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. On a $g = (g_x)_{x \in |X|}$ avec $g_x \in \mathrm{GL}_n(F_x)$, $\forall x$ et $g_x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$ pour presque tout x . L'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ sur V est donc définie coordonnée par coordonnée par $g_x * w_x = w_x(g_x \cdot)$. Pour presque tout x , on a $w_x = v_x$ et v_x étant invariant sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$, on a $g_x * w_x = w_x$ pour presque tout x . Cela montre que l'action est bien définie. On note π la représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ dans $Gl(V)$ induite par cette action. Elle se décompose en une somme de représentations admissibles irréductibles que l'on appelle **représentations automorphes irréductibles paraboliques** de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Les représentations apparaissent avec une multiplicité un dans cette décomposition, d'après un théorème de Piatetski-Shapiro et Shalika. On note \mathcal{A}_n l'ensemble des classes d'équivalence de ces représentations.

Remarque A.1.10. La troisième condition est équivalente à la finitude de l'ordre du caractère central de la représentation π .

Soit π une représentation automorphe irréductible parabolique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. En appliquant la proposition A.1.7, on sait que π s'écrit comme un produit tensoriel restreint de représentations admissibles irréductibles π_x de $\mathrm{GL}_n(F_x)$ dans $Gl(V_x)$ avec $V = \bigotimes' V_x$.

De plus, on sait qu'il existe un sous-ensemble fini $S \subset |X|$ tel que π_x est non ramifiée, pour tout $x \in |X| \setminus S$ et pour ces points x , on fixe $v_x \in V_x$ un vecteur non-nul stable sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$.

On note \mathcal{H}_x l'ensemble des fonctions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ à support compact et bi-invariantes sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$. C'est une algèbre pour le produit de convolution

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f_1(gh) f_2(h^{-1}) \mu(h)$$

appelée **algèbre sphérique de Hecke**. L'élément neutre est la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$.

Lemme A.1.11. *On a*

$$\mathcal{H}_x = \overline{\mathbb{Q}}_l[H_{1,x}, \dots, H_{n,x}, (H_{n,x})^{-1}]$$

où $H_{i,x} \in \mathcal{H}_x$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{M}_{i,x} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x) \mathcal{D}_{i,x} \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$ où $\mathcal{D}_{i,x}$ désigne la matrice $\mathrm{diag}(\underbrace{t_x, \dots, t_x}_i, 1, \dots, 1)$ avec t_x un paramètre local en x .

Démonstration. On note z_i les fonctions sur \mathbb{Z}^n définies par

$$z_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$z_i^{-1}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions sur \mathbb{Z}^n localement compactes sont munies du produit de convolution défini par $f * g(a) = \sum_{b+c=a} f(b)g(c)$. On vérifie que pour ce produit de convolution on a bien $z_i * z_i^{-1} = 1_{\mathbb{Z}^n}$. On va montrer que l'on a

$$\mathcal{H}_x \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n} = \overline{\mathbb{Q}}_l[H_{1,x}, \dots, H_{n,x}, H_{n,x}^{\pm 1}]$$

où $T_{i,x}$ sont les fonctions symétriques en les z_i c'est-à-dire

$$T_{i,x} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} z_{j_1} \dots z_{j_i}, i = 1 \dots n$$

Observons tout d'abord que l'on a

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x) \backslash \mathrm{GL}_n(F_x) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x) \simeq \mathbb{Z}^n / \mathfrak{S}_n$$

En effet, si t_x désigne une uniformisante en x , pour tout élément $A \in \mathrm{GL}_n(F_x)$, il existe $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ (définis à permutation près) tels que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x) \begin{pmatrix} t^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{m_n} \end{pmatrix} \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x).$$

Les fonctions sur $\mathrm{GL}_n(F_x)$ bi-invariantes sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$ peuvent donc être considérées comme des fonctions sur $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$. Soit $f \in \mathcal{H}_x$, elle induit une fonction sur le double quotient qui est localement compacte sur un ensemble discret donc non nulle en un nombre fini de points. Cette fonction sur $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ se relève en une fonction sur \mathbb{Z}^n , constante sur les orbites et qui appartient donc à $\overline{\mathbb{Q}}_l[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$. Une telle fonction peut s'écrire comme un polynôme en les fonctions symétriques, en inversant le produit $T_{n,x}$ des z_i . De plus cette écriture est unique, l'application de \mathcal{H}_x vers $\overline{\mathbb{Q}}_l[H_1, \dots, H_n, H_n^{-1}]$ est donc bien définie et envoie $H_{i,x}$ sur $T_{i,x}$. On montre facilement que cette application est bijective. Il reste à montrer que c'est un morphisme d'algèbre. On a d'une part

$$T_{i,x} * T_{j,x}(a) = \sum_{b+c=a} T_{i,x}(b)T_{j,x}(c) = \sum_{c \in \mathfrak{S}_n * e_j} T_{i,x}(a-c)$$

où $\mathfrak{S}_n * e_j = \{\sigma * (0, \dots, 1, \dots, 0), \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$. D'autre part, on a

$$H_{i,x} * H_{j,x}(a) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} H_{i,x}(ah^{-1})H_{j,x}(h)\mu(h) = \int_{\mathcal{M}_{j,x}} H_{i,x}(ah^{-1})\mu(h)$$

et la structure d'algèbre est transportée par l'isomorphisme. \square

L'algèbre de Hecke \mathcal{H}_x agit naturellement sur toute représentation irréductible non ramifiée π_x de $\mathrm{GL}_n(F_x)$ par

$$(H_{i,x}.f)(g) = \int_{\mathcal{M}_{i,x}} f(gh)\mu(h), \forall f \in V_x, g \in \mathrm{GL}_n(F_x).$$

On a le résultat suivant :

Lemme A.1.12. *Soit π_x une représentation irréductible non ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F_x)$. Alors tout élément de l'algèbre sphérique de Hecke \mathcal{H}_x préserve le sous espace $\pi_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$.*

Démonstration. Soient $v \in \pi_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$, $f \in \mathcal{H}_x$ et montrons que $f.v \in \pi_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$. Soit h un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$, on a

$$\begin{aligned} \pi_x(h)(f.v) &= \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} \pi_x(h)(f(g)\pi_x(g)(v))\mu(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f(g)\pi_x(gh)(v)\mu(g) \\ &= \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f(gh)\pi_x(gh)(v)\mu(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f(k)\pi_x(k)\mu(k) \end{aligned}$$

car la mesure de Haar est normalisée avec $\mu(\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)) = 1$. \square

On peut donc définir une action de \mathcal{H}_x sur les fonctions définies sur

$$\mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$$

On revient au cas d'une représentation irréductible admissible $\pi = \otimes' \pi_x$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. On vient de montrer que pour tout x où π_x est non ramifiée \mathcal{H}_x préserve l'espace $\pi_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$ engendré par le vecteur v_x . C'est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ donc pour tout $f \in \mathcal{H}_x$, on a $f.v_x \in \overline{\mathbb{Q}_l}v_x$. Il existe donc $\lambda_i(\pi_x) \in \overline{\mathbb{Q}_l}, \forall i = 1, \dots, n$ tels que

$$H_{i,x}.v_x = \lambda_i(\pi_x)v_x, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On appelle **valeurs propres de Hecke** de π en x les racines $(z_1(\pi_x), \dots, z_n(\pi_x)) \in \overline{\mathbb{Q}_l}^n$ du polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda_i(\pi_x) X^i$. Ces scalaires sont définis à permutation près et les $\lambda_i(\pi_x)$ sont les fonctions symétriques en les $z_i(\pi_x)$. On sait que λ_n est non nul puisque $T_{n,x}$ est inversible et puisque $\lambda_n = \prod_i z_i(\pi_x)$, ces valeurs propres sont non nulles. De plus, on peut montrer que pour tout x où elles sont définies, ces valeurs propres de Hecke déterminent la représentation π_x . En effet, toute représentation π_x irréductible admissible non ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F_x)$ peut être obtenue comme une représentation induite d'une représentation du groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Une telle représentation π_x est déterminée par n caractères $\chi_{i,x} : F_x^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_j}^*$ satisfaisant

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \mapsto \chi_{1,x}(a_1) \cdots \chi_{n,x}(a_n)$$

Chaque caractère se factorise par la valuation discrète de F_x et est donc déterminé par l'image de t_x (paramètre local en x fixé pour définir $H_{i,x}$). On a $\chi_{i,x}(t_x) = z_i(\pi_x)$ ce qui montre que les $z_i(\pi_x)$ déterminent la représentation π_x .

On a donc montré qu'à toute représentation automorphe parabolique irréductible π , on peut attacher une collection de valeurs propres $\{(z_1(\pi_x), \dots, z_n(\pi_x))\}_{x \in |X| \setminus S}$ dites de Hecke et définies à permutation près. On a de plus le résultat suivant :

Proposition A.1.13 (Théorème fort de la multiplicité un, [Pia]).

Soient deux représentations automorphes irréductibles paraboliques π et π' de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ telles que $\pi_x \simeq \pi'_x$ pour presque tout x , alors les représentations π et π' sont isomorphes.

Le théorème montre donc que la collection des valeurs propres de Hecke détermine la représentation à isomorphisme près. On peut maintenant énoncer la conjecture de Langlands pour $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_l})$ dans le cas des corps de fonctions. Elle a été prouvée par Drinfeld [Dri1] pour $n = 2$ et par Lafforgue [Laf] pour $n > 2$.

Théorème A.1.14. *On a une bijection entre les ensembles \mathcal{A}_n et \mathcal{G}_n définie ci-dessus qui vérifie la condition suivante : Si $\pi \in \mathcal{A}_n$ correspond à un élément $\sigma \in \mathcal{G}_n$, alors les représentations sont non ramifiées en les mêmes points et pour tout tel x , il existe une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que*

$$(z_1(\pi_x), \dots, z_n(\pi_x)) = (z_{\tau(1)}(\sigma_x), \dots, z_{\tau(n)}(\sigma_x)).$$

A.2 La correspondance de Langlands géométrique

A.2.1 Des représentations galoisiennes aux systèmes locaux

Soit X une courbe algébrique irréductible et lisse sur \mathbb{F}_q et l un premier ne divisant pas q .

Définition A.2.1. Un \mathbb{Z}_l -faisceau sur X de rang n est un système projectif $\{\mathcal{F}_m\}_{m \geq 1}$ où chaque \mathcal{F}_m est un faisceau de $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ -module localement libre de rang n sur X munie de la topologie étale.

Par abus de notations, si $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_m\}$ est un \mathbb{Z}_l -faisceau, on notera

$$H^i(X, \mathcal{F}) := \varprojlim H^i(X, \mathcal{F}_m).$$

Définition A.2.2. Un \mathbb{Q}_l -faisceau \mathcal{F} sur X est un faisceau défini par

$$H^0(U, \mathcal{F}) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^0(U, \tilde{\mathcal{F}})$$

où $\tilde{\mathcal{F}}$ est un \mathbb{Z}_l -faisceau et U un ouvert de X .

Le fait de tensoriser par \mathbb{Q}_l permet d'éliminer la torsion dans les groupes de cohomologie. De manière similaire, on définit la catégorie des E -faisceaux où E est une extension finie de \mathbb{Q}_l . Enfin, on considère la limite directe des catégories de E -faisceaux sur X (c'est-à-dire l'union croissante). Les objets de cette catégorie sont appelés **faisceaux l -adiques** lisses sur X ou **systèmes locaux l -adiques**. Le fait de prendre cette limite directe permet de travailler avec des systèmes locaux sur une extension finie de \mathbb{Q}_l , sans préciser l'extension. On a le lemme suivant :

Lemme A.2.3. À un système local l -adique de rang n sur $X \setminus N$, où N est un sous-ensemble fini de $|X|$, on peut associer une représentation l -adique de dimension n de G_F , non-ramifiée partout sur $X \setminus N$ et réciproquement.

Démonstration. On commence par se donner un \mathbb{Q}_l -faisceau. On sait qu'il est obtenu en tensorisant un \mathbb{Z}_l -faisceau $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_m\}$ de rang n sur $X \setminus N$ par \mathbb{Q}_l (Cf ci-dessus). Pour tout m , \mathcal{F}_m est donc un faisceau de $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ -module localement libre de rang n sur $X \setminus N$. Pour chaque m , il existe donc un revêtement étale fini et galoisien Y_m de $X \setminus N$ sur lequel \mathcal{F}_m est constant. En d'autres termes, le pullback de \mathcal{F}_m sur Y_m est isomorphe au faisceau constant $\left(\underline{\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}}\right)^n$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(Y_m/X \setminus N)$ agit sur les sections globales de ce faisceau ce qui nous donne une représentation

$$\rho_m : \text{Gal}(Y_m/X \setminus N) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$$

On prend la limite directe $\rho := \varinjlim \rho_m$ ce qui nous donne une représentation

$$\rho : \varinjlim Gal(Y_m/X \setminus N) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}_l)$$

Cette limite directe ne prend en compte que certains revêtements étales finis, on a donc une application surjective

$$\pi_1^{alg}(X \setminus N) \rightarrow \varinjlim Gal(Y_m/X \setminus N)$$

et une application surjective $G_F \rightarrow \pi_1^{alg}(X \setminus N)$ ce qui nous donne par composition une représentation

$$G_F \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}_l)$$

Montrons maintenant que cette représentation est non ramifiée en dehors de N . Le groupe arithmétique fondamental $\pi_1^{alg}(X \setminus N)$ correspond à l'extension maximale étale non ramifiée de $X \setminus N$. Pour tout point x de $X \setminus N$, le groupe d'inertie I_x est donc envoyé sur 1 dans $\pi_1^{alg}(X \setminus N)$ donc est contenu dans le noyau de la représentation ce qui montre que celle-ci est non ramifiée en dehors de N .

Réciproquement, on se donne une représentation continue $\rho : G_F \rightarrow GL_n(\mathbb{Q}_l)$, non ramifiée en dehors de N . Comme G_F est compact, son image l'est aussi donc elle est contenue dans le sous-groupe ouvert compact maximal $GL_n(\mathbb{Z}_l)$. De plus, puisque cette représentation est non-ramifiée en dehors de N , elle se factorise par $\pi_1^{alg}(X \setminus N)$ qui correspond à l'extension étale non ramifiée maximale de $X \setminus N$. De plus, on a une application surjective de $GL_n(\mathbb{Z}_l)$ vers $GL_n(\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$, pour tout m et chaque application nous donne par composition une représentation

$$\rho_m : \pi_1^{alg}(X \setminus N) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$$

avec $\rho = \varinjlim \rho_m$. Pour tout m , on considère le revêtement étale fini $f_m : Y_m \rightarrow X \setminus N$ dont le groupe de Galois H_m correspond à l'image de ρ_m . Puisque l'on a $\rho = \varinjlim \rho_m$, on a $\text{Im} \rho_m \leq \rho_{m+1}$ donc Y_{m+1} est une extension de Y_m . On considère le faisceau constant $\left(\underline{\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}}\right)^n$ sur Y_m . Le groupe H_m agit sur ses sections. Pour tout ouvert U de $X \setminus N$, on pose

$$\mathcal{F}_m(U) := H^0\left(f_m^{-1}(U), \left(\underline{\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}}\right)^n\right)^{H_m}$$

ce qui définit un faisceau de $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ -modules localement libre de rang n . On obtient une collection de faisceau de $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ -faisceaux. Ceci nous donne un système projectif du fait que les extensions Y_m de X sont emboîtées. En tensorisant par \mathbb{Q}_l , on obtient un \mathbb{Q}_l -faisceau.

De manière similaire, pour une extension finie E de \mathbb{Q}_l , on obtient un E -faisceau sur $X \setminus N$ en partant d'une représentation $G_F \rightarrow GL_n(E)$ non ramifiée sur $X \setminus N$ et réciproquement.

□

Le lemme précédent permet d'interpréter les représentations galoisiennes de manière géométrique : ce sont des systèmes locaux l -adiques et cette notion a encore un sens lorsque X est définie sur \mathbb{C} par exemple.

A.2.2 Des représentations automorphes aux faisceaux pervers

On veut maintenant interpréter géométriquement les représentations automorphes. On se restreint aux représentations paraboliques non ramifiées et irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. À une telle représentation π , on a vu qu'on pouvait associer un vecteur $v = \otimes w_x$ avec $w_x = v_x$ presque partout. Rappelons que pour tout x où π_x est non ramifiée, on a fixé un vecteur v_x tel que $\pi_x^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)} = \overline{\mathbb{Q}_l} v_x$. Ce vecteur v , est défini à multiplication scalaire près, puisqu'un nombre fini de w_x ne sont pas fixés. Il peut être vu comme une fonction f_π sur

$$\mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$$

Cette fonction est elle aussi définie à scalaire près et comme v_x est vecteur propre des générateurs $H_{i,x}$ de l'algèbre de Hecke \mathcal{H}_x , pour presque tout $x \in |X|$, cette fonction détermine la représentation π à isomorphisme près. Au lieu de considérer les classes d'équivalence des représentations non-ramifiées, on peut donc considérer l'ensemble des fonctions automorphes non ramifiées qui leur sont associées (définies à multiplication scalaire près).

Le lien avec les fibrés vectoriels apparaît grâce au lemme suivant dû à A. Weil

Lemme A.2.4. *L'ensemble*

$$\mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$$

est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels de rang n sur X .

On a donc une application surjective de l'ensemble des \mathbb{F}_q -points du champ $\mathrm{Bun}_{n,X}$ des fibrés vectoriels de rang n vers ce double quotient. On pourra donc considérer une fonction automorphe comme une fonction sur l'ensemble $\mathrm{Bun}_{n,X}(\mathbb{F}_q)$ des fibrés vectoriels de rang n sur X , constante sur les classes d'isomorphismes.

Il nous reste à interpréter l'algèbre $\mathcal{H} = \bigotimes_{x \in |X|} \mathcal{H}_x$ de Hecke. Elle agit naturellement sur l'espace des fonctions sur $\mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$. On rappelle l'isomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}_x \simeq \overline{\mathbb{Q}_l}[H_{1,x}, \dots, H_{n,x}, H_{n,x}^{-1}]$. L'action est définie par

$$(H_{i,x} * f)(g) = \int_{\mathcal{M}_{i,x}} f(gh) \mu(h).$$

Cette action préserve les sous-espaces $\overline{\mathbb{Q}_l} f_{\pi,x}$ de dimension 1 des éléments $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$ -invariants. On va considérer un système projectif sur X c'est-à-dire une collection $\{\mathcal{F}_m\}$

de $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ -faisceaux sur X , chacun constructible ce qui signifie qu'il existe une stratification de X telle que la restriction à chaque strate soit localement constante. Soient \mathcal{F} un tel faisceau et x un \mathbb{F}_{q_x} -point de X où $q_x = q^{\deg x}$. Alors la classe de conjugaison Fr_x du Frobenius agit sur la fibre \mathcal{F}_x de \mathcal{F} en x . On peut définir une fonction $\mathbb{F}_{q_x}(\mathcal{F})$ sur l'ensemble $X(\mathbb{F}_{q_x})$ des \mathbb{F}_{q_x} -points de X , dont la valeur en x est $Tr(Fr_x, \mathcal{F}_x)$. Ceci a un sens parce que les fibres sont des modules libres de rang fini. Plus généralement, on peut associer une fonction $\mathbb{F}_{q_x}(\mathcal{K})$ à un complexe \mathcal{K} de faisceaux l -adiques en prenant la somme alternée des traces de Fr_x sur les cohomologies aux fibres de \mathcal{K} en x . En d'autres termes, on associe à \mathcal{K} la fonction dont la valeur en x , pour $x \in X(\mathbb{F}_{q_x})$ est $\sum_{i \geq 0} (-i)^i Tr(Fr_x, H^i(\mathcal{K}_x))$. L'application $\mathcal{K} \rightarrow \{\mathbb{F}_{q_x}(\mathcal{K})\}_{d \geq 1}$ commute avec les opérations naturelles c'est-à-dire que le pullback d'un faisceau correspond au pullback d'une fonction et le pushforward d'un faisceau à support compact correspond à l'intégration le long d'une fibre. Ceci découle de la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz. (Cf [Gro3])

On considère la catégorie des faisceaux pervers dans la catégorie dérivée des faisceaux l -adiques. Cette catégorie abélienne rend l'application $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{F}_{q_x}(\mathcal{K})$ injective. Un exemple de faisceaux pervers est un complexe partout nul sauf en -1 où on a un système local sur X . Une propriété remarquable est le fait qu'un faisceau pervers irréductible est déterminé par sa restriction à un ouvert dense dès lors que celle-ci est non nulle. De plus, cette catégorie est stable par la dualité de Verdier, contrairement à celle des faisceaux l -adiques.

A.2.3 Enoncé de la correspondance géométrique pour les corps de fonctions

On note comme précédemment X/\mathbb{F}_q une courbe lisse, projective de genre $g > 0$ et telle que $X \times \overline{\mathbb{F}_q}$ soit irréductible. L'ensemble des \mathbb{F}_q -points du champ des fibrés vectoriels de rang n sur X est noté $\text{Bun}_{n,X}(\mathbb{F}_q)$. Pour $i = 1..n$, on définit le champ suivant : Pour T un schéma sur \mathbb{F}_q , $Hecke_i(T)$ désigne l'ensemble des triplets $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x)$ où $x \in |X|$ et $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ sont des fibrés vectoriels de rang n sur $X \times_{\mathbb{F}_q} T$ avec $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \simeq (\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{F}_q} T} / \mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{F}_q} T}(-\{x\} \times T))^i$.

La i -ème correspondance de Hecke est alors donnée par :

$$\begin{array}{ccc}
 & Hecke_i & \\
 h^{\leftarrow} \swarrow & & \searrow \text{supp} \times h^{\rightarrow} \\
 \text{Bun}_{n,X} & & X \times \text{Bun}_{n,X}
 \end{array}$$

où $h^{\leftarrow}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = (\mathcal{M})$, $h^{\rightarrow}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = \mathcal{M}'$ et $\text{supp}(\mathcal{M}, \mathcal{M}', x) = x$. Soit $x \in |X|$ et notons $Hecke_{i,x} = \text{supp}^{-1}(x)$. Ceci donne une correspondance entre $\{x\} \times \text{Bun}_{n,X}$ et $\text{Bun}_{n,X}$. Par le lemme A.2.4, on définit ainsi un opérateur sur l'espace des fonctions sur $\text{GL}_n(F) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}) / \text{GL}_n(\mathbb{O})$. Puisque les opérations naturelles commutent avec l'applica-

tion $\mathcal{K} \mapsto \mathbb{F}_q(\mathcal{K})$ définie dans la section précédente, on sait que cet opérateur associe à une fonction f la fonction $h_1^\rightarrow((h^\leftarrow)^* f)$. L'opérateur h_1^\rightarrow désigne l'intégration le long des fibres de h^\rightarrow . On vérifie que cet opérateur est précisément le i -ème opérateur $H_{i,x}$. Les faisceaux (pervers) correspondants aux fonctions associées aux représentations automorphes sont donc des faisceaux propres (eigensheaves) pour la correspondance de Hecke.

Soit \mathcal{K} un faisceau pervers sur $\text{Bun}_{n,X}$ et posons $H_i(\mathcal{K}) = (supp, h^\rightarrow)_! h^{\leftarrow,*}(\mathcal{K})$. On rappelle qu'étant donnée une application continue $f : X \rightarrow Y$ et un faisceau \mathcal{F} sur X , on définit l'**image directe à support compact** comme le foncteur qui au faisceau \mathcal{F} associe

$$f_! \mathcal{F}(V) := \{s \in \Gamma(f^{-1}(V, \mathcal{F})), f|_{\text{supp}(s)} : \text{supp}(s) \rightarrow V \text{ est propre}\}$$

(Cf [Dim, p.36]).

On ne veut pas rappeler la définition de morphisme propre qui demande d'autres notions comme celles de morphismes séparés ou universellement fermés. Une définition précise est donnée dans [Har, p.100]. On remarque que l'image directe à support compact est simplement l'image directe lorsque f est propre. Le faisceau $H_i(\mathcal{K})$ est encore un faisceau pervers sur $\text{Bun}_{n,X}$. La correspondance de Langlands pour les corps de fonctions, sous forme géométrique peut alors s'écrire :

Théorème A.2.5. *Pour chaque système local irréductible E sur X de rang n , il existe un faisceau pervers \mathcal{K} sur $\text{Bun}_{n,X}$, irréductible sur chaque composante connexe $\text{Bun}_{n,X}^d$ tel que $\forall i = 1 \dots n$, on ait $H_i(\mathcal{K}) \simeq (\wedge^i E) \boxtimes \mathcal{K}$*

(Cf [Lau] et [Fre]).

Il y a beaucoup plus que cette appendice dans l'article de Frenkel, notamment la correspondance géométrique de Langlands pour d'autres groupes que GL_n (cf [BD] pour plus de détails).

Annexe B

Fibration and homotopy groups

Définition B.0.6. On appelle **fibration** une application $p : A \rightarrow B$ entre deux espaces topologiques telle que pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme $\phi_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, où F est un espace topologique, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times F \\ \downarrow & \swarrow & \\ U & & \end{array}$$

Une telle application satisfait la propriété de 'relèvement des homotopies' définie comme suit :

Définition B.0.7. Étant donné une application continue $p : A \rightarrow B$ et un espace topologique X , on dit que p satisfait la **propriété de relèvement des homotopies** par rapport à X si

- Pour toute homotopie $f : X \times [0, 1] \rightarrow B$,
- Pour tout relèvement $\tilde{f}_0 : X \rightarrow A$ de $f_0 := f|_{X \times \{0\}}$ i.e. tel que $f_0 = p\tilde{f}_0$

il existe une homotopie $\tilde{f} : X \times [0, 1] \rightarrow A$ qui relève f autrement dit, telle que $f = p\tilde{f}$ avec $\tilde{f}_0 = \tilde{f}|_{X \times \{0\}}$. En termes de diagrammes, cela s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \tilde{f}_0 \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f_0} & B \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & A & \\ \exists \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Définition B.0.8. Une application est appelée une **fibration de Serre** si elle satisfait la propriété de relèvement des homotopies pour des espaces topologiques particuliers appelés *CW-complexes*.

On peut montrer qu'une fibration définie comme précédemment est une fibration de Serre (Cf par exemple [Hat]). On a le résultat suivant :

Théorème B.0.9. Soit $p : A \rightarrow B$ une fibration de Serre et a un point de A au-dessus d'un point b donné de B , alors on a la suite exacte longue suivante :

$$\dots \rightarrow \pi_2(B, b) \rightarrow \pi_1(F, a) \rightarrow \pi_1(A, a) \xrightarrow{p} \pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$$

où π_i sont les groupes d'homotopie d'ordre supérieur.

(Cf [Hat]).

Index

A

- Admissible
 - représentation, 169
 - stratification, 11
- Algèbre de Hecke, 171
- automorphe
 - forme, 170

C

- Cartésien, 21
- Catégorie
 - dérivée, 11
 - fibrée en groupoïdes, 21
 - tannakienne, 140
- Champ, 32
 - connexe, 75
 - des connexions, 87
 - des fibrés vectoriels, 64
 - des représentations, 93
 - des systèmes locaux, 96
 - dimension d'un, 41
 - dimension pure d'un, 41
 - espace tangent d'un, 74
 - groupe fondamental d'un, 40
 - lisse, 73
 - point d'un, 40
 - produit fibré, 36
 - revêtement d'un, 38
 - revêtement universel d'un, 39
 - simplement connexe, 38, 39
 - sous-champ d'un, 38
 - présentation d'un, 40
- Cohomologie
 - faisceaux de, 12

foncteurs d'un complexe, 10

- Complexes homotopes, 11
- Conducteur d'un anneau, 122
- Connexion, 7
 - à singularités régulières, 134
 - avec structure de niveau, 143
 - champs des, 87
 - sur une courbe singulière, 130
- Constructible, 12
 - faiblement, 12
- Courbe singulière
 - associé à des diviseurs effectifs, 150
 - faisceau des différentielles d'une, 119
 - spéciale, 124

D

- Diagramme cartésien, 21
- Différentielle régulière, 151
- Dimension
 - d'un champ, 41
 - pure, 41
 - relative d'un morphisme, 40
- Donnée de descente, 32
 - effective, 32

E

- Espace tangent d'un champ, 74
- Étale
 - morphisme, 14
 - recouvrement, 15

F

- Faible
 - singularité, 121
- Faiblement constructible, 12

Faisceau

- avec structure de niveau, 147
- des différentielles régulières, 151
- des différentielles sur une courbe singulière, 119

Faisceaux

- de cohomologie, 12

Faisceaux pervers, 12

Famille couvrante, 15

Fibré

- en groupoïdes, 21

Fibré vectoriel

- champ des, 64
- rigidifié, 157
- stable, 83
- semi-stable, 83

Fibration de Serre, 181

Fidèlement plat, 14

Forme automorphe parabolique, 170

Frobenius

- morphisme de, 168
- valeurs propres de, 168

G

Géométriquement irréductible, 167

Groupe

- d'inertie, 168
- de décomposition, 168
- réductif, 86

Groupe fondamental d'un champ, 40

Groupoïde, 21

H

Hecke

- algèbre de, 171
- valeurs propres de, 173

Homotope, 11

I

Image directe à support compact, 178

Irréductible

- représentation, 169

L

Lisse

- champ, 73
- morphisme, 38
- schéma, 72

Localement compact, 25

M

Matrice fondamentale, 130

Module

- fidèlement plat, 14
- plat, 14

Module différentiel, 133

- régulier singulier, 133

Morphisme

- de Frobenius, 168
- de présentation finie, 14
- étale, 14
- fidèlement plat, 14
- lisse, 38
- plat, 14
- représentable, 37
- dimension relative d'un, 40

N

Non-ramifié

- homomorphisme, 168
- représentation, 168

P

Plat, 14

Point d'un champ, 40

Préchamp, 31

Présentation d'un champ, 40

Produit fibré

- dans une catégorie, 21
- de champs, 36

Puissance extérieure

- d'un faisceau, 8
- d'un module, 8

Pushforward à support compact, 99

Q

Quasi-isomorphisme, 11

R

Réductif, 86

Recouvrement

étale, 15

galoisien, 16

Relation d'équivalence définie par un ensemble de diviseurs, 152

Représentable

morphisme, 37

Représentation

l -adique, 168, 174

admissible, 169

champ des, 93

irréductible, 169

non-ramifiée, 168

Revêtement

d'un champ, 38

trivial d'un champ, 38

universel d'un champ, 39

Rigidifié

fibré vectoriel, 157

S

Schéma lisse, 72

Semi-stable

fibré vectoriel, 83

Simplement connexe

champ, 38

Singularité faible, 121

Site, 17

étale, 15

Sous-champ, 38

fermé, 38

ouvert, 38

Stable

fibré vectoriel, 83

Stratification, 11

admissible, 11

Structure de niveau

connexion avec, 143

fibré en droite avec, 147

système local avec, 142

Système local, 7

l -adique, 174

à singularités régulières, 134

avec structure de niveau, 142

champs des, 96

T

Tannakienne

catégorie, 140

Torseur, 23

V

Valeurs propres de

Frobenius, 168

Hecke, 173

Summary

R.Langlands conjectured the existence of a bridge between two parts of number theory. This correspondence, called 'Langlands conjecture' was proved by L. Lafforgue who obtained a Fields medal for his work. G. Laumon gave a geometric translation of a part of the theorem, called 'geometric Langlands correspondence'. The latter was proved by E. Frenkel, D. Gaitsgory and K. Vilonen for the case of finite fields and the group GL_n of invertible matrices. A statement and a proof of the complex case should be obtained by mimicking the proof for finite fields. However, it does not appear anywhere in the literature.

In this thesis, we chose a different approach. Our first aim was to make a correct statement and proof for simple cases. More precisely, we deal with cases where the two difficult objects "stacks" and "perverse sheaves", which appear in the original statement, are not involved. We also state and prove the correspondence in a new context, namely the case of singular curves.

A large part of the thesis is devoted to making the objects appearing in the geometric statement, such as stacks, more explicit. These objects are categories with glueing properties. They are now widely used but references are rare and often difficult to read. We thus give numerous examples of stacks and treat in detail explicit ones. We chose for instance to work on the case of triangles in order to get a better understanding of the interest of stacks. Another important example is the stack $Bun_{n,X}$ of vector bundles of rank n over a curve X . This is an interesting stack which plays an important role in the geometric Langlands correspondence.

Résumé

R. Langlands a conjecturé l'existence d'un pont entre deux parties de la théorie des nombres. Cette correspondance, appelée "conjecture de Langlands", a été prouvée par L. Lafforgue qui a obtenu la médaille Fields pour ses travaux. G. Laumon a donné une traduction géométrique d'une partie du théorème, appelée "correspondance de Langlands géométrique". Cette dernière a été prouvée par E. Frenkel, D. Gaitsgory et K. Vilonen pour le cas des corps finis et du groupe GL_n des matrices inversibles. Un énoncé et une preuve du cas complexe devraient pouvoir être obtenus en imitant le résultat pour les corps finis. Cependant, ceci n'apparaît nulle part dans la littérature.

Dans cette thèse, on choisit un angle d'approche différent. Notre premier objectif est de donner un énoncé et une preuve de la correspondance de Langlands géométrique pour des cas simples. Plus précisément, nous avons traité des cas où les "champs" et les "faisceaux pervers" ne sont pas utilisés. Ces deux objets, qui apparaissent dans l'énoncé original, sont difficiles à définir et à comprendre et en les remplaçant par des objets plus simples, il est possible de donner une preuve 'simple' de la correspondance. On montre également que la correspondance est satisfaite dans un contexte différent, celui des courbes singulières.

Une grande partie de la thèse est consacrée à rendre plus explicites les objets, tels que les champs, impliqués dans l'énoncé géométrique. Les champs sont des catégories possédant des propriétés de recollement. Ils sont maintenant largement utilisés mais les références sont rares et souvent difficiles à lire. Nous donnons donc de nombreux exemples et traitons en détail des champs explicites. Nous avons choisi par exemple de travailler sur le champ des triangles qui nous permet de comprendre l'intérêt de ces objets. Un autre exemple est le champ $\text{Bun}_{n,X}$ des fibrés vectoriels de rang n sur une courbe X . Ce champ, qui possède de nombreuses propriétés, joue un rôle très important dans la correspondance géométrique.

Bibliographie

- [BCEFFGK] **K. Behrend, B. Conrad, D. Edidin, W. Fulton, B. Fantechi, L. Gottsche, A. Kresch** *Introduction to stacks*
www.math.unizh.ch/index.php?pr_vo_det&key1=1287&key2=580&no_cache=1
- [BD] **A. Beilinson & V. Drinfeld** *Quantization of Hitchin's Integrable System and Hecke Eigensheaves* prépublication, <http://www.math.uchicago.edu/benzvi/BD/hitchin.ps.gz>.
- [BG] **Bernstein & S. Gelbart**(editors) *An introduction to the Langlands program* Birkhäuser, 2004
- [BLR] **S. Bosch, W. Lutkebohmert & M. Raynaud** *Neron models*, Springer Verlag, 1990.
- [Bor] **A. Borel, et al.** *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. 2, Academic Press, Boston, 1987.
- [CE] **Cartan & Eilenberg** *Homological Algebra* Princeton University Press, Princeton, 1966.
- [Del1] **P. Deligne** *Equations différentielles à points singuliers réguliers* Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Del2] **P. Deligne** *The Grothendieck Festschrift III* Birkhäuser Boston 1990, pp. 111-195.
- [Dim] **A. Dimca** *Sheaves in topology*, Springer, 2004.
- [DB] **A. Dimca, T. Brélivet** *Une introduction aux faisceaux pervers*
<http://www.math.u-bordeaux.fr/brelivet/pervers.ps.gz>
- [Dri1] **V.G. Drinfeld** *Langlands conjecture for GL_2 over function field* Proc. of Int. Congress of Math. Helsinki, 1978, pp. 565-574
- [Dri2] **V.G. Drinfeld** *Two-dimensional l -adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL_2* Amer. J. Math. **105**, 1983, p. 85-114.
- [DT] **D. Djokovic, T-Y. Tam** *Some questions about semisimple Lie groups originating in matrix theory* Can. Math. Bull. 46, No. 3, 2003, pp. 332-343 .

- [Fal] **G. Faltings** *Vector bundles on curves*
http://www.uni-bonn.de/fsmathe/script/vectorbuendel_faltings.pdf
- [Fan] **B. Fantechi** *Stacks for everybody*
<http://www.cgtp.duke.edu/drm/PCMI2001/fantechi-stacks.pdf>
- [Fre] **E. Frenkel** *Recent advances in the Langlands program*
 ArXiv : math.AG/0303074 v2 30 Sep 2003
- [FGV] **E. Frenkel, D. Gaitsgory & K. Vilonen** *On the geometric Langlands conjecture* Amer. J. Math Soc. 15, 2002, p367- 417
- [Fres1] **J. Fresnel** *Algèbre des matrices*
 Hermann, 1997, p160.
- [Fres2] **J. Fresnel** *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens*
 Hermann, 1999, p259.
- [GD] **A. Grothendieck & J. Dieudonné** *Éléments de géométrie algébrique I*, Springer-Verlag, 1971
- [Gel] **S. Gelbart** *Automorphic forms on adèle groups* annals of mathematics studies, nb 83 princeton university press, 1975
- [God] **R. Godement** *Notes on the 'Jacquet-Langlands' theory*, (mimeographed notes), The Institute for Advanced Study, 1970.
- [Gra1] **H. Grauert** *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*
 Publ. Math. IHES 5 (1960), p233–318.
- [Gra2] **H. Grauert** *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*
 Math. Ann. 146 (1962), 331–368.
- [Gre] **M. Greenberg** *Algebraic topology* Benjamin, New York, 1967.
- [Gro1] **A. Grothendieck** *Séminaire de géométrie algébrique 1*, exposé VIII, 1960-61, pp. 195-227
- [Gro2] **A. Grothendieck** *Fondements de la géométrie algébrique*
 séminaire Bourbaki, 1962.
- [Gro3] **A. Grothendieck** *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki, exposé 279, Astérisque 9, (1995), pp. 41-55
- [Har] **R. Hartshorne** *Algebraic Geometry* Springer-Verlag, 1997
- [Hat] **A. Hatcher** *Algebraic topology* Cambridge University Press, 2002.
<http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>
- [Laf] **L. Lafforgue** *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands* Invent. Math. 147, 2002, pp. 1-241.

- [Lau] **G. Laumon** *Travaux de Frenkel, Gaitsogory et Vilonen sur la correspondance de Drinfeld-Langlands*, Séminaire Bourbaki, 54ème année, n. 906, 2001-2002.
- [LMB] **Laumon, Moret-Bailly** *Champs algébriques* Springer-Verlag, 2000.
- [Mil] **J.S Milne** *chp VII 'jacobian varieties'* Arithmetic geometry edited by Cornell-Silverman Springer-Verlag, 1985
- [Mil2] **J.S. Milne** *Lecture on étale cohomology*
<http://www.jmilne.org/math/>
- [Nit] **N. Nitsure** *Construction of Hilbert and Quot Schemes*
 ArXiv : math.AG/0504590
- [Noo1] **B. Noohi** *Foundations of topological stacks I*
 arXiv :math/0503247 v1
- [Noo2] **B. Noohi** *Fundamental groups of algebraic stacks*
 arXiv : math.AG/0201021 v1
- [vdPR] **M. van der Put & M. Reversat** *Galois theory of q-difference equations*
 Annales de Toulouse, Sér. 6 Vol. 16 no. 3 (2007), pp. 665-718.
- [vdPS] **M. van der Put & M. Singer** *Galois theory of linear differential equations*
 Springer-Verlag 2003.
- [Pia] **I.I Piatetski-Shapiro** *Multiplicity one theorem*, In automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. **33**, AMS 1979, pp. 209-212.
- [Ros] **M. Rosenlicht**, *Generalized jacobian varieties* Ann. of Maths. **59**, 1954, pp.505-530.
- [Sab] **C. Sabbah** *Deformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*
 EDP Sciences, 2002.
- [SGA4] **M. Artin, A. Grothendieck & J-L. Verdier** *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1963-64 - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas - (SGA 4)* , Lecture notes in mathematics **269**, Berlin ; New York, Springer-Verlag, 1972.
- [Sha1] **I. Shafarevich** *Basic algebraic geometry I* Springer-Verlag 1994.
- [Sha2] **I. Shafarevich** *Basic algebraic geometry II* Springer-Verlag 1994.
- [Ser1] **J.P. Serre**, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Tome 6 1956, pp 1- 42.
- [Ser2] **J.P. Serre**, *Groupes algébriques et corps de classe* Hermann, Paris 1959.
- [Wei1] **A. Weil**, *Courbes algébriques et variétés abéliennes* Hermann, Paris 1971.
- [Wei2] **A. Weil**, *On algebraic groups of transformations* Amer. J. of Maths. **77**, 1955, pp.355-391.

- [Wei3] **A. Weil**, *The field of definition of a variety* Amer. J. of Maths. **78**, 1956, pp.509-524.
- [Wei4] **A. Weil**, *Foundations of algebraic geometry* Am. Math. Soc. Colloq., **vol. 29**, 1946.