C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I, t. 330, 1233–1236, 1998
Analyse Numérique/*Numerical Analysis*

A propos d'approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral

PATRICK HILD

Résumé. On considère deux opérateurs, l'un de type interpolation, l'autre de type projection, appliqués à des fonctions continues, à valeurs dans un ensemble de fonctions de type éléments finis et conservant la positivité. On montre sur un contre-exemple que les deux opérateurs ne vérifient pas des propriétés d'approximation optimales relativement à une norme duale. Ce contre-exemple établit plusieurs résultats pressentis concernant l'optimalité de la méthode de joints et des analyses par éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral.

On optimal finite element approximation for unilateral contact problems.

Abstract. We consider a interpolation type operator and a projection type operator with values in a finite element function set, defined for continuous functions and keeping positiveness. We prove with an counter-example that the two operators do not verify optimal approximation results with respect to a dual norm. This counter-example yields some predicted results concerning optimality of the mortar element method and finite element analysis for unilateral contact problems.

1. Introduction et motivation

L'analyse par éléments finis des problèmes de contact unilatéral entre solides, avec maillages compatibles sur la zone de contact, fait apparaitre un défaut d'optimalité sous les hypothèses classiques (*voir* [8]). Dans un premier temps, nous montrons sur un contre-exemple que ce défaut est bien dû au choix de l'opérateur intervenant dans l'approximation de la condition unilatérale. Sur ce même contre-exemple, nous montrons que l'utilisation d'un autre opérateur, de type projection sur cône convexe, ne permettrait pas d'atteindre non plus l'optimalité. Dans un deuxième temps, nous considérons le cas de maillages incompatibles sur la zone de contact et comparons deux manières différentes de poser le problème discret. Dans ce nouveau contexte, le contre-exemple précédent permet d'établir la supériorité d'une approche sur l'autre.

2. Le contre-exemple

Considérons l'intervalle $I =]0,1[$ divisé en $1/h = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$) intervalles de longueur h et notons $\mathcal{I}_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un correspondant à cette subdivision. Soit π_h^+ l'opérateur de projection pour la norme de $L^2(I)$ sur le cône convexe des fonctions positives, continues et affines par morceaux sur la subdivision. Il est clair que l'opérateur $\mathcal{I}_h$, comme π_h^+, conserve la positivité, à l'inverse de l'opérateur de projection π_h au sens de L^2 sur l'espace des fonctions continues affines par morceaux sur la subdivision.

Soit φ une fonction continue sur $[0,1]$. Dans ce cas, la norme duale $\|.\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'}$ de φ est

$$\|\varphi\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}(I), \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(I)} \leq 1} \int_0^1 \varphi\psi \, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}([0,1]). \tag{2.1}$$

Nous nous intéressons aux propriétés d'approximation (en norme $\|.\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'}$) des opérateurs $\mathcal{I}_h$ et π_h^+ pour les fonctions positives de $H^{\frac{3}{2}}(I)$ (*voir* [1], Théorème 7.48, pour la définition des normes dans les espaces de Sobolev $H^s(I), s > 0$).
PROPOSITION – *Soit $\varepsilon > 0$. Il n'existe pas de constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $u \in H^{\frac{3}{2}}(I)$, $u \geq 0$, on ait* (2.2) *ou* (2.3).

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'} \leq C h^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(I)}, \tag{2.2}$$

$$\|u - \pi_h^+ u\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'} \leq C h^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(I)}. \tag{2.3}$$

Preuve. On construit une famille de fonctions $u(h)$ que l'on définit comme suit:

$$u(h)(x) = \left\{ \; 0 \text{ sur } \Big[0, \frac{h}{2}\Big]; \quad (x - \frac{h}{2})^2 \text{ sur } \Big[\frac{h}{2}, \frac{3h}{4}\Big]; \quad -(x-h)^2 + \frac{h^2}{8} \text{ sur } \Big[\frac{3h}{4}, h\Big]. \right.$$

Pour $x \in [h, 2h]$, on pose $u(h)(x) = u(h)(2h - x)$, puis on choisit $u(h)$ de période $2h$ sur I. Le calcul de $\pi_h^+ u(h)$ est effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel. On montre que $\pi_h^+ u(h)$ est périodique de période $2h$, $(\pi_h^+ u(h))(x) = 41hx/512$ sur $[0,h]$ et $(\pi_h^+ u(h))(x) = (\pi_h^+ u(h))(2h - x)$ pour $x \in [h, 2h]$. D'autre part, on démontre que $\|u(h)\|_{(H^{\frac{3}{2}}(I))} \leq C\sqrt{h}$ où C est indépendant de h. En choisissant $\psi = -1$ sur I dans (2.1), on assure l'existence de C_0 indépendant de h tel que

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'} \geq \int_0^1 \mathcal{I}_h u(h) - u(h) \, dx = \frac{h^2}{32} \geq C_0 h^{\frac{3}{2}} \|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}(I)},$$

$$\|u(h) - \pi_h^+ u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}(I))'} \geq \int_0^1 \pi_h^+ u(h) - u(h) \, dx = \frac{9h^2}{1024} \geq C_0 h^{\frac{3}{2}} \|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}(I)}.$$

Les deux minorations précédentes permettent d'établir la proposition par l'absurde.□
Remarque. Par "approximation optimale", on sous-entend l'existence d'une constante C indépendante de h telle que l'on ait une majoration par $Ch^2 \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(I)}$ dans (2.2) ou (2.3).

3. Le problème de contact unilatéral entre solides élastiques

On considère le problème de contact unilatéral entre les ouverts bornés polygonaux du plan Ω^1 et Ω^2, initialement en contact sur le segment de droite Γ_c. Les solides élastiques Ω^ℓ, $\ell = 1, 2$, sont soumis à des chargements $\boldsymbol{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$, $\boldsymbol{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_{\boldsymbol{g}}^\ell))^2$ et encastrés sur $\Gamma_{\boldsymbol{u}}^\ell$, où $\Gamma_{\boldsymbol{u}}^\ell, \Gamma_{\boldsymbol{g}}^\ell, \Gamma_c$ forment une partition de la frontière $\partial\Omega^\ell$ (les lettres en gras correspondent à des quantités vectorielles). Le problème consiste à trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ défini sur $\Omega^1 \cup \Omega^2$ vérifiant:

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}, \qquad F(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}} \quad F(\boldsymbol{v}), \tag{3.1}$$

avec

$$F(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} C^\ell \, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell). \, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell) \, d\Omega^\ell - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{f}^\ell . \boldsymbol{v}^\ell \, d\Omega^\ell - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_{\boldsymbol{g}}^\ell} \boldsymbol{g}^\ell . \boldsymbol{v}^\ell \, d\Gamma^\ell.$$

On a noté $\boldsymbol{v}^\ell = \boldsymbol{v}|_{\Omega^\ell}$ et désigné par $\boldsymbol{K}$ le convexe des déplacements admissibles défini par

$$\boldsymbol{K} = \big\{\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \in \boldsymbol{V}(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}(\Omega^2), \qquad \boldsymbol{v}^1.\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{v}^2.\boldsymbol{n}^2 \le 0 \text{ sur } \Gamma_c\big\},$$

où $\boldsymbol{V}(\Omega^\ell) = \{\boldsymbol{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \quad \boldsymbol{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}\}$, $\boldsymbol{n}^\ell$ est le vecteur normal unitaire sortant de Ω^ℓ, $\varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell) = (\nabla \boldsymbol{v}^\ell + (\nabla \boldsymbol{v}^\ell)^T)/2$ et $C^\ell = (c^\ell_{ij,kh})$ désigne l'opérateur d'élasticité symétrique et coercif. Pour $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \in \boldsymbol{V}(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}(\Omega^2)$, on notera $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\boldsymbol{v}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2}$. Le problème de minimisation (3.1) admet une solution $\boldsymbol{u}$ unique (*voir* [8],[11]). On notera $\sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}) = (C^1\,\varepsilon(\boldsymbol{u}^1))\boldsymbol{n}^1.\boldsymbol{n}^1 = (C^2\,\varepsilon(\boldsymbol{u}^2))\boldsymbol{n}^2.\boldsymbol{n}^2$ la contrainte normale sur la zone de contact.

On munit chaque solide Ω^ℓ d'une famille régulière de discrétisations T^ℓ_h formées de triangles κ, dont le diamètre ne dépasse pas h_ℓ et l'on note $h = (h_1, h_2)$. Il s'ensuit deux familles $\mathcal{T}^\ell_{c,h}$ (supposées uniformément régulières) de traces de triangulations différentes sur Γ_c. Pour des raisons d'ordre technique, on suppose que les nœuds extrêmes a_1 et a_2 de Γ_c appartiennent aux deux maillages et que h_1/h_2 est borné. Soit $\mathbb{P}_1(\kappa)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur κ . On pose (*voir* [7]):

$$\boldsymbol{V}_h(\Omega^\ell) = \big\{\boldsymbol{v}^\ell_h \in (\mathscr{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \forall \kappa \in T^\ell_h, \quad \boldsymbol{v}^\ell_h|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2, \quad \boldsymbol{v}^\ell_h|_{\Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}} = 0 \ \big\}.$$

On définit les espaces $W^\ell_h(\Gamma_c) = \big\{\boldsymbol{v}^\ell_h|_{\Gamma_c}.\boldsymbol{n}^\ell,\ \boldsymbol{v}^\ell_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega^\ell)\big\}$ et les espaces $M^\ell_h(\Gamma_c)$ constitués des fonctions de $W^\ell_h(\Gamma_c)$ constantes sur les deux mailles extrêmes de $\mathcal{T}^\ell_{c,h}$. On note π^ℓ_h l'opérateur de projection sur $W^\ell_h(\Gamma_c)$ s'appliquant à $\varphi \in \mathscr{C}(\Gamma_c)$. L'opérateur π^ℓ_h vérifie

$$\pi^\ell_h \varphi(a_i) = \varphi(a_i), \quad i = 1, 2, \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma_c} (\varphi - \pi^\ell_h \varphi) q_h \, d\Gamma = 0, \quad \forall q_h \in M^\ell_h(\Gamma_c).$$

On désigne par $\mathcal{I}^\ell_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un correspondant au maillage de Ω^ℓ sur Γ_c. Nous définissons alors deux convexes d'approximation de $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{K}'_h = \big\{\boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{v}^1_h, \boldsymbol{v}^2_h) \in \boldsymbol{V}_h(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}_h(\Omega^2), \qquad \boldsymbol{v}^1_h.\boldsymbol{n}^1 + \pi^1_h(\boldsymbol{v}^2_h.\boldsymbol{n}^2) \le 0 \text{ sur } \Gamma_c\big\}, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{K}''_h = \big\{\boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{v}^1_h, \boldsymbol{v}^2_h) \in \boldsymbol{V}_h(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}_h(\Omega^2), \qquad \boldsymbol{v}^1_h.\boldsymbol{n}^1 + \mathcal{I}^1_h(\boldsymbol{v}^2_h.\boldsymbol{n}^2) \le 0 \text{ sur } \Gamma_c\big\}. \tag{3.3}$$

Dans le cas de maillages incompatibles, le convexe $\boldsymbol{K}'_h$ introduit en [3], traduit une condition de contact globale et correspond à l'application de la méthode des éléments finis avec joints (*voir* [5]) à l'inéquation variationnelle du contact unilatéral (*voir* [4] pour l'étude détaillée). Notons que cette définition s'applique avec succés à l'étude de problèmes de contact avec frottement (*voir* [2],[10]). Le convexe $\boldsymbol{K}''_h$ décrit dans le cas incompatible une condition de contact locale de type nœud–segment. Dans le cas de maillages compatibles, $\boldsymbol{K}'_h = \boldsymbol{K}''_h$ traduit la condition de non-interpénétration point par point (*voir* [8]). Le problème discrétisé consiste à trouver $\boldsymbol{u}_h$ vérifiant

$$\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h, \qquad F(\boldsymbol{u}_h) = \min_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h} \quad F(\boldsymbol{v}_h), \tag{3.4}$$

avec $\boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}'_h$ ou $\boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}''_h$. Le problème (3.4) admet une solution unique (*voir* [8],[11]).

Pour des hypothèses du type $\boldsymbol{u}^\ell \in (H^2(\Omega^\ell))^2$, $\ell = 1, 2$, l'approximation (en norme duale) de la fonction positive $-(\boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2.\boldsymbol{n}^2) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)$ par une fonction positive continue affine par morceaux intervient dans l'estimation de $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|$ dans le cas de maillages compatibles et incompatibles (*voir* [3],[8]). Dans ces références, le défaut d'optimalité (la convergence est de l'ordre

de $h^{\frac{3}{4}}$) provient du manque de propriétés d'approximation établi dans le cadre de la proposition précédente. Le recours à des hypothèses supplémentaires (*voir* [6]) permet d'obtenir la convergence optimale pour des maillages compatibles (*voir* [8]) et incompatibles lorsque $\boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}'_h$:
THEOREME – *Supposons que la solution* $\boldsymbol{u}$ *de* (3.1) *vérifie* $\boldsymbol{u}^\ell \in (H^2(\Omega^\ell))^2$, $\boldsymbol{u}^\ell.\boldsymbol{n}^\ell \in W^{1,\infty}(\Gamma_c)$, $\ell = 1, 2$ *et* $\sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}) \in L^\infty(\Gamma_c)$. *Supposons que l'ensemble des points de* Γ_c *pour lesquels on passe de* $\boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2.\boldsymbol{n}^2 < 0$ *à* $\boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2.\boldsymbol{n}^2 = 0$ *soit fini. Soit* $\boldsymbol{u}_h$ *la solution de* (3.4). *Alors,*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\| \leq C(\boldsymbol{u})(h_1 + h_2), \qquad \textit{lorsque } \boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}'_h, \tag{3.5}$$

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\| \leq C(\boldsymbol{u})(\sqrt{h_1} + h_2), \qquad \textit{lorsque } \boldsymbol{K}_h = \boldsymbol{K}''_h. \tag{3.6}$$

Le défaut d'optimalité en (3.6) provient du choix de l'opérateur d'interpolation de Lagrange en (3.3) et de ses propriétés d'approximation non optimales mises en évidence dans la proposition. Par ailleurs, les tests numériques (*voir* [9]) confirment la nette supériorité de la condition figurant dans (3.2) sur l'approche locale (3.3).

Références bibliographiques

1. **Adams R. A., 1975.** Sobolev Spaces, Academic Press.
2. **Bayada G., Chambat M., Lhalouani K. et Sassi T., 1997.** Eléments finis avec joints pour des problèmes de contact avec frottement de Coulomb non local, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 325, Série I, p. 1323-1328.
3. **Ben Belgacem F., Hild P. et Laborde P., 1997.** Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 324, p. 123-127.
4. **Ben Belgacem F., Hild P. et Laborde P., 1996.** Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact, rapport interne MIP 96.18, à paraître dans M^3AS.
5. **Bernardi C., Maday Y. et Patera A. T., 1994.** A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method, Collège de France seminar, eds. H. Brezis, J.-L. Lions, Pitman, p. 13-51.
6. **Brezzi F., Hager W. W. et Raviart P. A., 1977.** Error estimates for the finite element solution of variational inequalities, *Numer. Math.*, 28, p. 431-443.
7. **Ciarlet P.-G., 1978.** *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam.
8. **Haslinger J., Hlaváček I. et Nečas J., 1996.** *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, in Handbook of Numerical Analysis, Volume IV, Part 2*, Eds. P.-G. Ciarlet and J.-L. Lions, North Holland.
9. **Hild P., 1998.** *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles. Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse 3.*
10. **Hild P., 1997.** Nonconforming finite elements for unilateral contact with friction, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324, Série I, p. 707-710.
11. **Kikuchi N. et Oden J. T., 1988.** *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, Philadelphia.

Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, UMR CNRS 5640
Université Paul Sabatier, 31062 TOULOUSE Cedex 4, France.