Analyse Numérique/*Numerical Analysis*

Eléments finis non conformes pour un problème de contact unilatéral avec frottement.

Patrick Hild

Résumé — Dans une précédente étude, nous avons considéré une méthode d'éléments finis non conformes appliquée à un problème de contact sans frottement. Le but de cette note est d'établir la convergence de la méthode pour un problème de contact avec frottement entre deux solides déformables. La nonconformité provient du fait que les deux solides sont discrétisés indépendamment et qu'il en résulte deux maillages incompatibles sur la zone en contact.

Nonconforming finite elements for unilateral contact with friction.

Abstract — In a previous study, we considered a nonconforming finite element method for a frictionless contact problem. The aim of this note is to establish the convergence of the method for a frictional contact problem between two deformable bodies.

1. Introduction

Les problèmes de contact avec frottement entre solides déformables interviennent dans de nombreuses applications industrielles. Dans ces études par éléments finis, la gestion du contact sur des maillages le plus souvent incompatibles occupe une part importante du temps de calcul. Aussi, la définition des conditions de contact discrètes est d'un intérêt certain. La méthode des joints, introduite en [4], a été appliquée à de nombreux problèmes variationnels dont les problèmes de contact sans frottement (cf. [2],[3]). Le but de la présente note est de l'étendre à un problème de contact unilatéral avec frottement à seuil fixé (cf. [6],[7],[8],[9]). Bien que la prise en compte du frottement amène une non–linéarité supplémentaire, on retrouve un taux de convergence similaire à celui obtenu dans le cas sans frottement (cf. [3]).

2. Présentation du problème continu

On considère deux solides déformables qui occupent, dans la configuration initiale, deux ensembles $\overline{\Omega}^\ell$ dans $\mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$. La frontière Γ^ℓ du domaine Ω^ℓ est régulière et composée de trois parties $\Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}$, $\Gamma^\ell_{\boldsymbol{F}}$ et Γ^ℓ_c. Le solide est soumis à des forces $\boldsymbol{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$ et des forces $\boldsymbol{F}^\ell \in (L^2(\Gamma^\ell_{\boldsymbol{F}}))^2$ agissent sur $\Gamma^\ell_{\boldsymbol{F}}$. La partie $\Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}$ est encastrée et on supposera que $mes(\Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}) > 0$. Initialement, les deux solides sont en contact sur la partie commune de leur frontière $\Gamma_c = \Gamma^1_c = \Gamma^2_c$. Le vecteur normal unitaire sortant de Ω^ℓ est noté $\boldsymbol{n}^\ell$.

Le problème étudié consiste à trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ et un champ de contraintes σ définis sur $\Omega^1 \cup \Omega^2$ (on notera $\boldsymbol{u}^\ell = \boldsymbol{u}|_{\Omega^\ell}$, $\sigma^\ell = \sigma|_{\Omega^\ell}$) qui satisfont les conditions (1)–(7) suivantes pour $\ell = 1, 2$:

$$(1) \qquad \mathbf{div}\, \sigma^\ell(\boldsymbol{u}^\ell) + \boldsymbol{f}^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell, \qquad \sigma^\ell(\boldsymbol{u}^\ell)\boldsymbol{n}^\ell = \boldsymbol{F}^\ell \quad \text{sur } \Gamma^\ell_{\boldsymbol{F}}, \qquad \boldsymbol{u}^\ell = 0 \quad \text{on } \Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}.$$

Le tenseur des contraintes est relié aux déplacements par la loi de comportement élastique

$$(2) \qquad \sigma^\ell(\boldsymbol{u}^\ell) = A^\ell\, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\ell), \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T),$$

où $A^\ell = (a^\ell_{ij,kh})_{1 \le i,j,k,h \le 2} \in (L^\infty(\Omega^\ell))^{16}$ est un tenseur d'ordre quatre symétrique et vérifiant la propriété d'ellipticité classique. Sur Γ_c, on écrira $\sigma^\ell(\boldsymbol{u}^\ell)\boldsymbol{n}^\ell = ((\sigma^\ell(\boldsymbol{u}^\ell)\boldsymbol{n}^\ell).\boldsymbol{n}^\ell)\boldsymbol{n}^\ell + \sigma^\ell_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^\ell)$ et $\boldsymbol{u}^\ell = (\boldsymbol{u}^\ell.\boldsymbol{n}^\ell)\boldsymbol{n}^\ell + \boldsymbol{u}^\ell_{\boldsymbol{T}}$.

Note présentée aux CRAS.

Les conditions sur Γ_c sont les suivantes:

$$(\sigma^1(\boldsymbol{u}^1)\boldsymbol{n}^1).\boldsymbol{n}^1 = (\sigma^2(\boldsymbol{u}^2)\boldsymbol{n}^2).\boldsymbol{n}^2 = \sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}), \qquad \sigma^1_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^1) = -\sigma^2_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^2), \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}] \le 0, \qquad \sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}) \le 0, \qquad \sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}] = 0, \tag{4}$$

$$|\sigma^1_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^1)| \le s, \tag{5}$$

$$|\sigma^1_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^1)| < s \Rightarrow \boldsymbol{u}^1_{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{u}^2_{\boldsymbol{T}} = 0, \tag{6}$$

$$|\sigma^1_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^1)| = s \Rightarrow \exists \lambda \ge 0 \; t.q. \; \boldsymbol{u}^1_{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{u}^2_{\boldsymbol{T}} = -\lambda \sigma^1_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^1). \tag{7}$$

On désigne par s le seuil de glissement connu sur Γ_c, $s \in L^2(\Gamma_c)$, $s \ge 0$. La notation $[\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}]$ represente le saut $(\boldsymbol{u}^1.\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^2.\boldsymbol{n}^2)$ du déplacement normal à travers la zone de contact Γ_c. Les égalités (3) rendent compte du principe de l'action et de la réaction. Les conditions (4) décrivent un contact unilatéral entre les deux solides. Finalement, (5)–(7) traduit la loi de frottement. Le modèle de contact unilatéral avec frottement considéré intervient dans l'étude du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb dont l'existence se démontre par des techniques de point fixe sur la contrainte normale (cf. [7],[9]).

On introduit les espaces $\boldsymbol{V}(\Omega^\ell) = \{\boldsymbol{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \quad \boldsymbol{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}\}$, $\ell = 1, 2$. On notera $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2)$ les vecteurs de l'espace produit $\boldsymbol{V}(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}(\Omega^2)$. Ce dernier est muni de la norme Hilbertienne $\|\boldsymbol{v}\|_* = \Big(\|\boldsymbol{v}^1\|^2_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\boldsymbol{v}^2\|^2_{(H^1(\Omega^2))^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$. Le convexe des déplacements admissibles est

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) \in \boldsymbol{V}(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}(\Omega^2), \;\; [\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}] \le 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}.$$

On pose:

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} A^\ell \, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\ell).\, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\ell) \, d\Omega^\ell, \qquad j(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_c} s|\boldsymbol{v}^1_{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{v}^2_{\boldsymbol{T}}| \, d\Gamma,$$

$$L(\boldsymbol{v}) = \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{f}^\ell.\boldsymbol{v}^\ell \, d\Omega^\ell + \int_{\Gamma^\ell_{\boldsymbol{F}}} \boldsymbol{F}^\ell.\boldsymbol{v}^\ell \, d\Gamma^\ell \Big), \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}(\Omega^2).$$

La formulation variationnelle du problème (1)–(7) est: *trouver* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ *tel que:*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}) \ge L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}. \tag{8}$$

L'existence et l'unicité de $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ vérifiant (8) découlent de résultats connus (cf. [6],[9]).

3. Approximation par la méthode des éléments finis avec joints

On supposera, pour simplifier, que Ω^1 et Ω^2 sont des polygones. On munit chaque solide Ω^ℓ d'une famille de discrétisations régulières $\mathscr{T}^\ell_h$ formée d'eléments triangulaires κ, dont le diamètre ne dépasse pas h_ℓ et l'on notera $h = (h_1, h_2)$. Il s'ensuit deux familles $\mathcal{T}^\ell_h$ de traces de triangulations différentes sur Γ_c. On supposera ces familles uniformément régulières afin de pouvoir appliquer les inégalités inverses (cf. [5]). Nous supposerons également, et ceci pour des raisons techniques, que $\frac{h_1}{h_2}$ est borné. On notera $\mathbb{P}_q(\kappa)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q sur κ . On pose

$$\boldsymbol{V}_h(\Omega^\ell) = \{\boldsymbol{v}^\ell_h \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}^\ell)^2, \quad \forall \kappa \in \mathscr{T}^\ell_h, \quad \boldsymbol{v}^\ell_h|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2, \quad \boldsymbol{v}^\ell_h|_{\Gamma^\ell_{\boldsymbol{u}}} = 0 \}.$$

On supposera, pour simplifier, que Γ_c est le segment $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ et que $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ sont communs aux maillages des deux solides. On définit les espaces $\boldsymbol{W}^\ell_h(\Gamma_c) = \{\boldsymbol{v}^\ell_h|_{\Gamma_c}, \; \boldsymbol{v}^\ell_h \in \boldsymbol{V}_h(\Omega^\ell)\}$, constitués de fonctions affines par morceaux sur $\mathcal{T}^\ell_h$ et continues sur Γ_c. On introduit également l'espace des multiplicateurs de Lagrange

$$\boldsymbol{M}^\ell_h(\Gamma_c) = \{\boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{W}^\ell_h(\Gamma_c), \quad \boldsymbol{q}^\ell_h|_T \in \mathbb{P}_0(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}^\ell_h \text{ t.q. } \boldsymbol{a}_1 \text{ ou } \boldsymbol{a}_2 \in T\}.$$

On notera, π_h^ℓ l'opérateur de projection sur $\boldsymbol{W}_h^\ell(\Gamma_c)$ défini pour toute fonction $\boldsymbol{v} \in \mathscr{C}(\overline{\Gamma}_c)$ par

$$(\pi_h^\ell \boldsymbol{v})(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}_i) \qquad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2,$$
$$\int_{\Gamma_c} (\boldsymbol{v} - \pi_h^\ell \boldsymbol{v})\boldsymbol{q}_h \, d\Gamma = 0 \qquad \forall \boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{M}_h^\ell(\Gamma_c).$$

Les propriétés de π_h^ℓ sont décrites dans [1]. Le convexe d'approximation considéré ici est:

$$\boldsymbol{K}_h = \big\{ \boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{v}_h^1, \boldsymbol{v}_h^2) \in \boldsymbol{V}_h(\Omega^1) \times \boldsymbol{V}_h(\Omega^2), \qquad \boldsymbol{v}_h^1.\boldsymbol{n}^1 + \pi_h^1(\boldsymbol{v}_h^2).\boldsymbol{n}^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \big\}.$$

Dans le cas général de maillages incompatibles, l'approximation est nonconforme au sens de Hodge, (i.e. $\boldsymbol{K}_h \not\subset \boldsymbol{K}$) et dans le cas de maillages compatibles $\boldsymbol{K}_h \subset \boldsymbol{K}$. Le problème discret issu de (8) devient : *trouver* $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ *tel que:*

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h) + j(\boldsymbol{v}_h) - j(\boldsymbol{u}_h) \geq L(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h), \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h. \tag{9}$$

L'existence et l'unicité de $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ vérifiant (9) sont connues (cf. [7]).

Ensuite, il s'agit de donner une majoration de l'erreur $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h$ pour la norme de l'énergie. On adapte le résultat de Falk (cf. [5],[10]) à notre cas dans le lemme suivant où l'on fait un abus de notation en notant par des intégrales sur Γ_c des crochets de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

LEMME – *Soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ *la solution du problème exact* (8) *et* $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ *la solution du problème discrétisé* (9). *Alors, il existe une constante C independante de h telle que*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_* \leq C \Big\{ \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h} \Big(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_* + \Big| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\boldsymbol{u}^1)\boldsymbol{n}^1).((\boldsymbol{v}_h^1 - \boldsymbol{v}_h^2) - (\boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2)) d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \Big| \int_{\Gamma_c} s(|\boldsymbol{v}_{h\boldsymbol{T}}^1 - \boldsymbol{v}_{h\boldsymbol{T}}^2| - |\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{T}}^1 - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{T}}^2|) d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big)$$
$$+ \inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}} \Big| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\boldsymbol{u}^1)\boldsymbol{n}^1).((\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2) - (\boldsymbol{u}_h^1 - \boldsymbol{u}_h^2)) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{T}}^1 - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{T}}^2| - |\boldsymbol{u}_{h\boldsymbol{T}}^1 - \boldsymbol{u}_{h\boldsymbol{T}}^2|) \, d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big\}.$$

Le premier infimum, pris sur $\boldsymbol{K}_h$, est l'erreur d'approximation. Il comprend deux termes intégraux dus à la nature du problème et qui ne disparaissent pas, même dans le cas de maillages compatibles. Le second infimum (sur $\boldsymbol{K}$) désigne l'erreur de consistance due à la nonconformité. Ces deux infimums sont estimés séparément, et l'on en déduit un premier taux de convergence:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_* \leq C(\boldsymbol{u})(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^{\frac{3}{4}}),$$

lorsque $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega^1))^2 \times (H^2(\Omega^2))^2$. Un argument de bootstrap sur l'erreur de consistance permet d'obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME – *Supposons que la solution* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ *du problème* (8) *appartient* $(H^2(\Omega^1))^2 \times (H^2(\Omega^2))^2$ *et soit* $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ *la solution du problème discrétisé* (9). *On a*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_* \leq C(\boldsymbol{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2^{\frac{3}{4}}).$$

Le traitement numérique par cette méthode des problèmes de contact (avec ou sans frottement) est en cours.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. Ben Belgacem: The Mortar Finite Element Method with Lagrange Multipliers. Rapport interne, MIP, **RI 94.1**, soumis à *Numerische Mathematik*.

[2] F. Ben Belgacem, P. Hild, P. Laborde: The Mortar Finite Element Method for Contact Problems. Rapport interne, MIP, **RI 95.23**, à paraître dans *Mathematical and Computer Modelling*.

[3] F. Ben Belgacem, P. Hild, P. Laborde: Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris.

[4] C. Bernardi, Y. Maday, A. T. Patera: A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: the Mortar Element Method, Collège de France Seminar. Pitman (1990), p. 13–51.

[5] P.–G. Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam, (1978).

[6] G. Duvaut, J.–L. Lions: Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).

[7] J. Haslinger: Approximation of the Signorini problem with friction, obeying the Coulomb law, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 5, 1983, p. 422–437.

[8] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas: Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics, in Handbook of Numerical Analysis, Volume IV, Part 2, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions. North Holland (1996).

[9] J. Jarušek: Contact problems with bounded friction. Coercive case, *Czech. Math. J.*, 33, 1983, p. 237–261.

[10] N. Kikuchi, J.T. Oden: Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia, (1988).

Mathématiques pour l'Industrie et la Physique,
Unité Mixte de Recherche CNRS–TOULOUSE 3–INSAT (UMR 5640),
U.F.R., M.I.G., Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex, France.