Un invariant birationnel des variétés de dimension 3 sur un corps fini.

Gilles Lachaud, Marc Perret.

Résumé. *Nous prouvons que le nombre de points rationnels sur $\mathbf{F}_q$ modulo q est un invariant birationnel des variétés algébriques projectives irréductibles lisses de dimension 3 définies sur $\mathbf{F}_q$.*

Abstract. *We prove that the number of $\mathbf{F}_q$-rational points modulo q is a birational invariant of smooth irreducible projective algebraic 3-folds defined over $\mathbf{F}_q$.*

C'est un problème classique de géométrie algébrique que de demander si toute application birationnelle entre deux varietés algébriques projectives irréductibles lisses (de dimension quelconque), définies sur un corps k, peut être factorisée, après un nombre fini d'éclatements de centres des sous-variétés lisses définies sur k et de leurs inverses, en un isomorphisme sur k (voir [8], page 149). C'est évidemment vrai pour les courbes (puisque les classes d'équivalence birationnelle correspondent aux classes d'isomorphismes), et c'est bien connu pour les surfaces (voir par exemple [13], page 256). Cette question reste ouverte en dimension supérieure, excepté dans le cas des variétés toriques où elle a été résolue par l'affirmative (voir [12] et [14]). Une réponse affirmative en un sens local a été donnée par Cutkosky dans le cas de la caractéristique zéro et de la dimension 3 dans [4], et trois preuves ont été récemment annoncées en toute dimension et en caractéristique zéro dans [3], [9] et [15]. Supposons la réponse affirmative sur le corps fini $k = \mathbf{F}_q$ à q éléments, et soient X et Y deux telles variétés birationnellement équivalentes sur $\mathbf{F}_q$. Si X' est l'éclatement de X le long d'une sous-variété fermée lisse Z de codimension d, alors les fibres du morphisme $X' \longrightarrow X$ au dessus des points rationnels sur $\mathbf{F}_q$ de Z sont des espaces projectifs $\mathbf{P}^{d-1}_{\mathbf{F}_q}$. En particulier,

$$\sharp X'(\mathbf{F}_q) = (\sharp X(\mathbf{F}_q) - \sharp Z(\mathbf{F}_q)) + (q^{d-1} + \cdots + q + 1)\sharp Z(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp X(\mathbf{F}_q) \ mod\ q.$$

Ainsi, la question (lorsque $k = \mathbf{F}_q$) nous mène à la question plus faible suivante, posée par J. Kollár dans une conférence au congrès de Santa-Cruz en 1995 :

Question. *Si X et Y sont deux varietés algébriques projectives irréductibles lisses définies sur $\mathbf{F}_q$, birationnellement équivalentes sur $\mathbf{F}_q$, est-il vrai qu'alors*

$$\sharp Y(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp X(\mathbf{F}_q) \ mod\ q?$$

Notons que la situation est totalement différente en caractéristique nulle. Considérons par exemple une surface projective lisse X définie sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, ayant un unique point rationnel. Alors l'éclatement Y de X en ce point rationnel possède un $\mathbf{P}^1$

rationnel (la fibre exceptionnelle), donc une infinité de points rationnels. L'objet du présent article est de prouver le théorème suivant :

Théorème. *Soient X et Y deux varietés algébriques projectives irréductibles lisses de dimension 3 définies sur $\mathbf{F}_q$, birationnellement équivalentes sur $\mathbf{F}_q$. Alors*

$$\sharp Y(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp X(\mathbf{F}_q) \; mod \; q.$$

La preuve utilise trois ingrédients. D'abord, les théorèmes de Grothendieck et de Deligne, donnant le nombre de points rationnels sur $\mathbf{F}_{q^n}$ d'une variété projective lisse définie sur $\mathbf{F}_q$. Ensuite, le théorème d'Abhyankar de résolution des surfaces plongées sur $\mathbf{F}_q$. Enfin, un lemme diophantien sera d'un usage constant. On conjecture (c'est la conjecture (EMB) de [10]) que le théorème de résolution des variétés de dimension $n-1$ plongées en dimension $m \geq n$ est vrai en caractéristique positive. En suivant notre méthode, nous pouvons démontrer notre théorème pour les variétés de dimension quelconque (et par là même répondre par l'affirmative à la question de Kollàr) en supposant que cette conjecture (EMB) est vraie. La démonstration généralise les calculs combinatoires que nous allons effectuer ici. Cela conforte l'espoir que la réponse au problème de factorisation des applications birationnelles par des éclatements de centres lisses et de leurs inverses soit encore affirmative en caractéristique positive.

Lemme Diophantien. *Soient $a_1, \cdots, a_b$ et $a'_1, \cdots, a'_{b'}$ des nombres complexes de module commun q^α, où $\alpha \geq 0$. Pour tout entier n, on note*

$$\Delta(n) = \sum_{i=1}^{b} a_i^n - \sum_{i=1}^{b'} {a'}_i^n.$$

On suppose qu'il existe deux constantes $C \geq 0$ et $\epsilon > 0$, telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $\mid \Delta(n) \mid \leq C q^{(\alpha-\epsilon)n}$. Alors $\Delta(n) = 0$ pour tout n.

Démonstration du lemme. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n_0, et un $\delta > 0$, pour lesquels $\mid \Delta(n_0) \mid \geq \delta q^{\alpha n_0}$. Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels on ait simultanément pour tout $1 \leq i \leq b$ et tout $1 \leq j \leq b'$ les majorations

$$\mid \frac{a_i^n}{q^{\alpha n}} - 1 \mid \leq \frac{\delta}{4b},$$

$$\mid \frac{{a'}_j^n}{q^{\alpha n}} - 1 \mid \leq \frac{\delta}{4b'}.$$

C'est en effet trivial si tous les quotients $\frac{a_i}{q^\alpha}$ et $\frac{a'_j}{q^\alpha}$ sont des racines de l'unité dans $\mathbf{C}$, et c'est la version exponentielle d'un théorème de Dirichlet (théorème 200 de [6]) dans le cas où au moins l'un de ces quotients n'est pas une racine de l'unité. Ainsi,

$$\mid a_i^{n+n_0} - q^{\alpha n} a_i^{n_0} \mid \leq \frac{\delta q^{\alpha(n+n_0)}}{4b},$$

et de même pour les a'_j. On obtient, pour une infinité de n,

$$\frac{\delta}{2} q^{\alpha(n+n_0)} \leq q^{\alpha n} \mid \Delta(n_0) \mid - \mid \Delta(n_0+n) - q^{\alpha n}\Delta(n_0) \mid \leq \mid \Delta(n_0+n) \mid \leq C q^{(\alpha-\epsilon)(n+n_0)},$$

ce qui est une contradiction.

Notons que les formules de Newton prouvent alors que $b = b'$ et que les ensembles $a_1, \cdots, a_b$ et $a'_1, \cdots, a'_{b'}$ sont égaux avec multiplicité, mais ce ne sera pas utile dans la suite.

Démonstration du théorème. Soient X et Y deux varietés de dimension 3 algébriques projectives geométriquement irréductibles lisses définie sur $\mathbf{F}_q$, birationnellement équivalentes sur $\mathbf{F}_q$. On se propose de montrer qu'alors

$$\sharp X(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp Y(\mathbf{F}_q) \ mod\ q.$$

Si V désigne l'une de ces deux variétés X ou Y, on note $\overline{V} = V \times_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q$ l'extension de V à la clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_q$ de $\mathbf{F}_q$ et $b_i(V) = dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i_{et}(\overline{V}, \mathbf{Q}_\ell)$ le i-ième nombre de Betti de V (où ℓ désigne un nombre premier distinct de la caractéristique de $\mathbf{F}_q$). Le théorème de Grothendieck (voir [11]) affirme que le nombre de points rationnels sur $\mathbf{F}_{q^n}$ de V est donné par

$$\sharp V(\mathbf{F}_{q^n}) =$$

$$q^{3n} - \sum_{i=1}^{b_5(V)} \epsilon_i^n(V) + \sum_{j=1}^{b_4(V)} \delta_j^n(V) - \sum_{k=1}^{b_3(V)} \gamma_k^n(V) + \sum_{l=1}^{b_2(V)} \beta_l^n(V) - \sum_{m=1}^{b_1(V)} \alpha_m^n(V) + 1.$$

Dans cette formule, les $\alpha_m(V)$, $\beta_l(V)$, $\gamma_k(V)$, $\delta_j(V)$ et $\epsilon_i(V)$ désignent respectivement les valeurs propres inverses de l'endomorphisme de Frobénius agissant sur le groupe de cohomologie ℓ-adique $H^i_{et}(\overline{V}, \mathbf{Q}_\ell)$ pour $i = 1, \cdots, 5$. Elles ont (par le théorème de Deligne, voir [5]) pour modules $\mid \alpha_i(V) \mid = \sqrt{q}$, $\mid \beta_i(V) \mid = q$, $\mid \gamma_i(V) \mid = q\sqrt{q}$, $\mid \delta_i(V) \mid = q^2$ et $\mid \epsilon_i(V) \mid = q^2\sqrt{q}$. Le théorème de dualité de Poincaré (voir [11], page 276) implique que $b_1(V) = b_5(V)$, que $b_2(V) = b_4(V)$, et qu'à permutation près, $q^{-1}\beta_i(V) = q^{-2}\delta_i(V)$ et $q^{-\frac{1}{2}}\alpha_i(V) = q^{-\frac{5}{2}}\epsilon_i(V)$, c'est à dire $\delta_i(V) = q\beta_i(V)$ et $\epsilon_i(V) = q^2\alpha_i(V)$. Ainsi, si on pose

$$\Delta_1(n) = q^{-2n}\Delta_5(n) = \sum_{i=1}^{b_1(Y)} \alpha_i^n(Y) - \sum_{i=1}^{b_1(X)} \alpha_i^n(X),$$

$$\Delta_2(n) = q^{-n}\Delta_4(n) = \sum_{i=1}^{b_2(Y)} \beta_i^n(Y) - \sum_{i=1}^{b_2(X)} \beta_i^n(X),$$

et

$$\Delta_3(n) = \sum_{i=1}^{b_3(Y)} \gamma_i^n(Y) - \sum_{i=1}^{b_3(X)} \gamma_i^n(X),$$

on obtient

$$(1) \qquad \sharp Y(\mathbf{F}_{q^n}) - \sharp X(\mathbf{F}_{q^n}) = -q^{2n}\Delta_1(n) + q^n\Delta_2(n) - \Delta_3(n) + \Delta_2(n) - \Delta_1(n).$$

Notons que ces quantités étant, par le théorème de Deligne, des sommes d'entiers algébriques conjugués, on a $\Delta_\alpha(n) \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in \{1, \cdots, 5\}$. Il s'agit donc de prouver que $\Delta_1(n)$, $\Delta_2(n)$ et $\Delta_3(n)$ sont des multiples entiers de q^n. Soient U et V des ouverts denses de X et Y respectivement, où l'application birationnelle est birégulière. Notons F et F' leurs complémentaires respectifs :

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & X & \hookleftarrow & U \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ F' & \hookrightarrow & Y & \hookleftarrow & V \end{array}$$

de sorte que pour tout $n \geq 1$,

$$(2) \qquad \sharp Y(\mathbf{F}_{q^n}) - \sharp X(\mathbf{F}_{q^n}) = \sharp F'(\mathbf{F}_{q^n}) - \sharp F(\mathbf{F}_{q^n}).$$

Lemme 2. *Il existe un morphisme birationnel $\pi_X : X' \longrightarrow X$, composé d'un nombre fini d'éclatements de centres des sous-variétés lisses, et un morphisme birationnel $\pi_Y : Y' \longrightarrow Y$ du même type, tels que les transformées totales $\pi_X^{-1}(F)$ et $\pi_Y^{-1}(F')$ soient des diviseurs à croisements normaux dans X' et Y' respectivement.*

Démonstration du lemme 2. Il suffit bien sûr de prouver l'assertion pour X seulement. Notons $\{P_1, \cdots, P_n\}$ les composantes irréductibles sur $\mathbf{F}_q$ de F qui sont des points, $\{C_1, \cdots, C_m\}$ celles qui sont des courbes et $\{S_1, \cdots, S_\ell\}$ celles qui sont des surfaces. Considérons d'abord la composée de n éclatements

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X,$$

où $\pi_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ est l'éclatement de X_{i-1} de centre le point $\pi_{i-1}^{-1} o \cdots o \pi_2^{-1} o \pi_1^{-1}(P_i)$. La transformée de chaque P_i par la composée $\pi_n o \cdots o \pi_2 o \pi_1$ est un plan projectif. Ensuite, notons $C_{n,j}$ (pour $1 \leq j \leq n$) la courbe transformée de C_j dans X_n. Par résolution des singularités des courbes plongées, il y a une suite finie d'éclatements centrés en des points, dont la composée sera notée $\pi_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$, dans laquelle la transformée stricte $C_{n+1,1}$ de $C_{n,1}$ est une courbe lisse. La transformée totale de $C_{n,1}$ dans X_{n+1} n'a donc pour composantes irréductibles que des plans projectifs (les fibres exceptionnelles), et la courbe lisse $C_{n+1,1}$. La transformée $C_{n+2,1}$ de $C_{n+1,1}$ dans l'éclatement $\pi_{n+2} : X_{n+2} \longrightarrow X_{n+1}$

de X_{n+1} le long de la sous-variété lisse $C_{n+1,1}$ étant une surface, il en résulte que la transformée totale de C_1 dans X_{n+2} n'a pour composantes irréductibles que des surfaces. Continuant ce procédé pour les transformées strictes $C_{n+2,j}$ des $C_{n,j}$ dans X_{n+2} pour $2 \leq j \leq m$, on obtient, après un nombre fini d'éclatements centrés en des points ou en des courbes lisses, un morphisme composée d'éclatements (avec des notations évidentes)

$$\pi_{n+2m} o \cdots o \pi_1 : X_{n+2m} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 = X,$$

où la transformée totale de chaque composante irréductible de F n'a pour composantes irréductibles que des surfaces. Enfin, considérons le diviseur

$$D = \sum_{i=1}^{n} (\pi_{n+2m} o \cdots o \pi_1)^{-1}(P_i) + \sum_{j=1}^{m} (\pi_{n+2m} o \cdots o \pi_1)^{-1}(C_j) + \sum_{k=1}^{\ell} (\pi_{n+2m} o \cdots o \pi_1)^{-1}(S_k).$$

Le théorème de désingularisation des surfaces plongées d'Abhyankar (voir [1] ou [2], ou encore [10]) affirme qu'il existe une suite finie d'éclatements de centres des sous-variétés lisses dont la composée sera notée $\pi_{n+2m+1} : X_{n+2m+1} \to X_{n+2m}$, telle que la transformée totale de D dans X_{n+2m+1} soit un diviseur à croisements normaux, ce qui prouve le lemme 2 avec $\pi_X = \pi_{n+2m+1} o \pi_{n+2m} o \cdots o \pi_1$ et $X' = X_{n+2m+1}$.

D'après l'introduction, on a $\sharp X'(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp X(\mathbf{F}_q)$ *mod* q et $\sharp Y'(\mathbf{F}_q) \equiv \sharp Y(\mathbf{F}_q)$ *mod* q. Ainsi, le lemme 2 permet de se ramener au cas où F et F' sont des diviseurs à croisements normaux. Cela signifie (voir [7], page 391) que si $Z_1, \cdots, Z_r$ sont r composantes irréductibles de F se rencontrant en un point P de X d'idéal maximal $\mathcal{M}_P$, alors les équations locales $f_1, \cdots, f_r$ de $Z_1, \cdots, Z_r$ en P sont linéairement indépendantes dans le quotient $\mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2$. En particulier :

- chaque composante irréductible de F est une surface lisse ;
- au plus trois composantes se coupent en chaque point ;
- les intersections deux-à-deux des composantes irréductibles de F sont des courbes lisses ;
- les intersections trois-à-trois des composantes irréductibles de F sont des points,

et de même pour F'. Notons que les composantes de ces intersections ne sont pas nécéssairement irréductibles sur $\overline{\mathbf{F}}_q$. Nous aurons donc besoin du lemme suivant :

Lemme 3. *Soit V une variété projective irréductible lisse de dimension d définie sur $\mathbf{F}_q$, non nécessairement irréductible sur $\overline{\mathbf{F}}_q$. Alors*

1) On a

$$\sharp V(\mathbf{F}_{q^n}) = h_{2d}(n) - h_{2d-1}(n) + \cdots - h_1(n) + h_0(n),$$

où les $h_\alpha(n)$ sont des sommes de puissances n-ièmes d'entiers algébriques de modules $q^{\frac{\alpha}{2}}$, et où $h_{2d-\alpha}(n) = q^{n(d-\alpha)} h_\alpha(n)$.

2) L'entier $h_0(n) = \frac{h_{2d}(n)}{q^{dn}}$ est somme de puissances n-ièmes de racines de l'unité.

Démonstration du lemme 3. Notons $\mathbf{F}_{q^m}$ la plus petite extension de $\mathbf{F}_q$, où V soit une union de sous-variétés absolument irréductibles. Puisque V est définie sur $\mathbf{F}_q$, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^m}/\mathbf{F}_q)$ agit sur l'ensemble des composantes irréductibles de $V \times_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}_{q^m}$. Cette action est transitive (puisque l'union des termes d'une orbite est définie sur $\mathbf{F}_q$, où V est irreductible), et simple par minimalité de m : sinon, les composantes irréductibles seraient définies sur le sous-corps fixe de $\mathbf{F}_{q^m}$ par le stabilisateur (commun puisque le groupe agissant est abélien) de l'action. Il y a donc exactement $\sharp\,\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^m}/\mathbf{F}_q) = m$ telles composantes irréductibles, conjuguées sous $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^m}/\mathbf{F}_q)$.

Soit maintenant $\mathbf{F}_{q^n}$ une extension de $\mathbf{F}_q$, telle que $\sharp V(\mathbf{F}_{q^n}) \neq 0$. Si $P \in V(\mathbf{F}_{q^n})$, alors $\varphi_q^n(P) = P$, où φ_q est le morphisme de Frobénius sur $\mathbf{F}_q$. Mais P est sur une unique composante irréductible de V, puisque celles-ci sont disjointes par lissité de V. Le morphisme de Frobenius agissant transitivement sur les m composantes irréductibles de V par le paragraphe précédent, il s'ensuit que m divise n. Réciproquement, si $n \in m\mathbf{Z}$, alors chacune des m composantes irréductibles de $V \times_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}_{q^m}$ a le même nombre de points rationnel sur $\mathbf{F}_{q^n}$ (puisqu'elles sont conjuguées sous φ_q), et donc $\sharp V(\mathbf{F}_{q^n}) = m \sharp V_1(\mathbf{F}_{q^n})$, où V_1 est l'une d'elles. Les théorèmes de Deligne, de Grothendieck, et la dualité de Poincaré, appliqués à V_1 sur $\mathbf{F}_{q^m} \subset \mathbf{F}_{q^n}$, jointes à l'identité $m\mathbf{1}_{m\mathbf{Z}}(n) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_m^{in}$ (où $\zeta_m = exp(\frac{2\imath\pi}{m})$, et $\mathbf{1}_{m\mathbf{Z}}$ est la fonction indicatrice de $m\mathbf{Z}$), prouvent le lemme 3.

Achevons maintenant la démonstration du théorème. Nous allons montrer succéssivement que $\Delta_1(n) = 0$, puis que $\Delta_2(n)$ et $\Delta_3(n)$ sont des multiples entiers de q^n. Puisque F et F' sont deux surfaces, on a, avec une certaine constante $C \geq 0$:

$$\mid \sharp F(\mathbf{F}_{q^n}) - \sharp F'(\mathbf{F}_{q^n}) \mid \leq C q^{2n},$$

ce qui, joint aux égalités (1) et (2), montre que $\mid \Delta_5(n) \mid \leq C' q^{2n}$, donc $\Delta_5(n) = 0 = \Delta_1(n)$ par le lemme Diophantien pour $\alpha = \frac{5}{2}$ et $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Le lemme 3, appliqué à chaque composante irréductible de F et de F' (qui sont des surfaces lisses), ainsi qu'à chaque composante irréductible des intersections deux-à-deux (respectivement trois-à-trois) des composantes irréductibles de F et de F', qui sont des courbes lisses (respectivement des points), montre que

$$\text{(3)} \qquad \sharp F(\mathbf{F}_{q^n}) - \sharp F'(\mathbf{F}_{q^n}) =$$

$$\{\alpha(n) q^{2n} - \delta_3(n) + \delta_2(n) - \delta_1(n) + \alpha(n)\} - \{\beta(n) q^n - d_1(n) + \beta(n)\} + \{\gamma(n)\},$$

où $\alpha(n)$, $\beta(n)$ et $\gamma(n)$ sont des différences de sommes de puissances *n-ièmes* de racines de l'unité, et $\delta_\alpha(n)$ et $d_\alpha(n)$ sont des différences de sommes de puissances *n-ièmes* de nombres algébriques de modules $q^{\frac{\alpha}{2}}$. On déduit alors de (1), (2), (3) et de la première étape, que

$$\begin{gathered}\left(\Delta_4(n) - \alpha(n) q^{2n}\right) - (\Delta_3(n) - \delta_3(n)) + (\Delta_2(n) - \delta_2(n) + \beta(n) q^n) \\ - (-\delta_1(n) + d_1(n)) + (\alpha(n) - \beta(n) + \gamma(n)) = 0.\end{gathered}$$

Par applications successives du lemme Diophantien, on obtient $\Delta_4(n) = \alpha(n) q^{2n}$, puis $\Delta_3(n) = \delta_3(n)$. La première égalité donne $\Delta_4(n) \in q^{2n}\mathbf{Z}$. Par dualité de Poincaré pour

X et Y, on obtient $\Delta_2(n) = q^{-n}\Delta_4(n) \in q^n\mathbf{Z}$. Enfin, la seconde égalité, jointe à la dualité de Poincaré pour chaque composante irréductible des surfaces F et F', donne $\Delta_3(n) = \delta_3(n) = q^n\delta_1(n) \in q^n\mathbf{Z}$, ce qui achève la preuve du théorème.

Références.

[1] S. Abhyankar, *Resolution of singularities of algebraic surfaces*, in Algebraic geometry, Tata Inst. Fund. Res, Bombay (1968), Oxford Univ. Press.

[2] S. Abhyankar, *Resolution of singularities of embeded algebraic surfaces*, 2nd enlarged edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki et J. Wlodarczyk, *Torification and factorization of birational map*, preprint, math.AG/9904135.

[4] S.T. Cutkosky, *Local factorisation of birational maps*, Adv. Math. **132** (1997), no 2, 167-315.

[5] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Pub. Math. I.H.E.S. **43** (1974) 273-308.

[6] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 1979.

[7] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathemetics 52, Springer-verlag, Berlin, 1977.

[8] H. Hironaka, *Résolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. **79** (1964), 109-326.

[9] Y. Hu et S. Keel, *A GIT proof of Wlodarczyk's weighted factorization theorem*, preprint, math.AG/9904146.

[10] S. Lipman, *Introduction to Resolution of Singularities*, in Algebraic Geometry, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 187-230.

[11] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series 33, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[12] R. Morelli, *The birational geometry of toric varieties*, J. Algebraic Geom. **5** (1996), no 4, 751-782.

[13] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, vol. I, Springer-Verlag, New-York.

[14] J. Wlodarczyk, *Decomposition of birational toric maps in blow-ups and blow-downs*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no 1, 373-411.

[15] J. Wlodarczyk, *Combinatorial structures on toroidal varieties. A proof of the weak factorization theorem*, preprint, math.AG/9904076.

Gilles LACHAUD
Équipe "Arithmétique et théorie de l'information"

Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS
Luminy Case 930
13 288 Marseille Cedex 9
FRANCE
lachaud@iml.univ-mrs.fr

Marc PERRET
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
École Normale Supérieure de Lyon
46 Allée d'Italie
69 363 Lyon Cedex 7
FRANCE
perret@umpa.ens-lyon.fr