

## ДИАГРАММЫ РУДОЛЬФА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НАКРЫТИЯ ВИТУШКИНА

С. Ю. Оревков

### Введение

В статье [1] (см. также [2]) А.Г. Витушкин построил пример вещественного четырехмерного многообразия  $X$  с двумерным подмногообразием  $M$  такого, что существует разветвленное накрытие  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^4$ , имеющее ветвление только вдоль  $M$ , и при этом  $X - M$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^4$ ,  $M$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^2$ , и  $f|_M$  – вложение. Этот пример имеет большое значение для понимания топологической природы известной гипотезы о якобиане (см. [2], [3]), и А.Г. Витушкин поставил вопрос, существует ли аналитическое отображение с похожими топологическими свойствами.

В настоящей статье дается в некотором смысле положительный ответ на этот вопрос. А именно, показано, что накрытие Витушкина можно реализовать в виде аналитического отображения некоторого пространства Штейна на шар в  $\mathbb{C}^2$ . Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** *Существует двумерное комплексно-аналитическое многообразие  $X$  с краем  $\partial X$ , гладкий аналитический диск  $M \subset X$ , трансверсальный  $\partial X$ , с  $\partial M \subset \partial X$ , и голоморфное трехлистное разветвленное накрытие  $f: X \rightarrow B^4$ , где  $B^4$  – единичный шар в  $\mathbb{C}^2$ , такие, что  $\text{Int } X - M$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^4$ , ограничение  $f$  на  $M$  является вложением, и  $f$  имеет ветвление второго порядка вдоль  $M$ , являясь погружением (т.е. локальным гомеоморфизмом) всюду на  $X - M$ .*

Из этого непосредственно вытекает, что  $\partial X$  строго псевдовыпукло вне  $\partial M$ , а также несложно вывести, что как  $\text{Int } X$ , так и  $\text{Int } X - M$  являются пространствами Штейна, в частности, существует исчерпывание  $\text{Int } X - M$  строго псевдовыпуклыми областями, гомеоморфными четырехмерному

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-225.

шару, с гладкими границами. Согласно результату Элиашберга [4, теорема 5.1], на  $\text{Int } X - M$  существует собственная плюрисубгармоническая функция с одним изолированным минимумом и без других критических точек.

По существу, доказательство теоремы 1 есть ни что иное, как интерпретация конструкции А. Г. Витушкина в терминах диаграмм Рудольфа многозначных комплексных функций (определение см. ниже) и непосредственное применение конструкции Рудольфа из [5]. Как мне сообщил А. Г. Витушкин, в процессе построения этого примера он пользовался рисунками, сходными (а возможно, даже идентичными!) с диаграммами Рудольфа. Однако, при написании статьи [1] он все сформулировал в терминах явных разрезов и склеиваний, что, на мой взгляд, сделало статью менее понятной. Одна из целей настоящей работы – дать изложение примера Витушкина, которое мне представляется более наглядным, чем первоначальное изложение, приведенное в [1]. (Заметим, что топологически пример не изменен.)

Несложно выписать необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная диаграмма Рудольфа общего положения являлась диаграммой некоторой многозначной кусочно гладкой функции (например, таковы все гладкие диаграммы). Более того, график функции однозначно определяется диаграммой с точностью до объемлющей изотопии. Конечно же, построение поверхности  $f(M)$ , приведенное в [1], эквивалентно применению этой общей конструкции к конкретному случаю, в равной мере, как и переклеивание листов накрытия в [1] есть то же самое, что задание накрытия гомоморфизмом фундаментальной группы в симметрическую группу  $S_m$ .

Мне не удалось найти более простого, чем в [1] доказательства того, что  $\text{Int } X - M$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^4$  (в [1] это доказано явным выписыванием последовательных деформационных ретракций, являющихся простыми по Уайтхэду). Тем не менее, стягиваемость многообразия  $\text{Int } X - M$  и его односвязность на бесконечности можно легко получить стандартными топологическими рассуждениями, используя приведенное в [6] копредставление фундаментальной группы дополнения к графику многозначной функции в терминах диаграммы Рудольфа. Это копредставление есть всего лишь интерпретация классического копредставления Зариского–ван Кампена, и оно является дословным обобщением для большей размерности копредставления Виртингера группы узла. (Однако, в [6] показано, что это копредставление сразу дает доказательство теоремы Фултона–Делиня (гипотеза Зариского) о том, что группа дополнения нодальной кривой в  $\mathbb{P}^2$  абелева.) Таким образом, мы доказываем гомеоморфность  $\text{Int } X - M \simeq \mathbb{R}^4$  только по модулю гипотезы Пуанкаре. Однако, с этим единственным (но существенным!) исключением, в статье дается альтернативное полное изложение всех результатов (с доказательствами) из [1].

Тот факт, что  $\text{Int } X - M$  диффеоморфно открытому шару, может быть сведен, тоже стандартными топологическими методами, к теореме Элиашберга [4, теорема 5.1], утверждающей, что если граница комплексного многообразия строго псевдовыпукла и диффеоморфна сфере  $S^3$ , то само многообразие диффеоморфно либо  $B^4$ , либо  $B^4$ , раздутому в нескольких точках. (Ясно, что последнее в нашем случае невозможно, так как накрытие над шаром не может содержать компактных кривых.) Чтобы доказать эту редукцию, достаточно вычислить разложение Хегора для  $\partial(X - (\text{трубчатая окрестность } M))$ , и показать, что оно эквивалентно сфере  $S^3$  (см. замечание 4.3 ниже). Поскольку данное многообразие получено как разветвленное накрытие над  $S^3$  вдоль явно заданного узла, с последующей перестройкой вдоль ручки, разложение Хегора может быть вычислено при помощи стандартной техники (см., например, [7]). Однако, эти вычисления не представляются более простыми, чем в [1], поэтому мы их не приводим.

В § 1 дано определение диаграммы Рудольфа многозначной комплексной функции. § 2 посвящен теореме о реализуемости гладкой диаграммы Рудольфа алгебраической функцией. Фактически, эта теорема была доказана в [5], хотя и не была там явно сформулирована. В § 3 строится накрытие  $f: X \rightarrow B^4$  как реализация некоторой диаграммы Рудольфа. В § 4 доказана односвязность многообразия  $\text{Int } X - M$  и его односвязность на бесконечности. В § 5 доказано, что  $X - M$  стягиваемо. В § 6 показана эквивалентность диаграммы Рудольфа накрытия из [1] диаграмме, приведенной в § 3. §§ 1–5 не зависят от [1] и содержат доказательство теоремы 1 по модулю гипотезы Пуанкаре; § 6 не зависит от §§ 3–4 и содержит сведение теоремы 1 к [1] и [5].

В приложении систематизированы результаты из [6], [8] о существовании невырожденных диаграмм Рудольфа для алгебраических функций. Эти результаты в статье не используются.

Я благодарен А. Г. Витушкину за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения. Я благодарен Ли Рудольфу за полезное обсуждение, приведшее к появлению этой работы, а также И. А. Тайманову за указание на работу [7]. Настоящая статья была написана, когда я был приглашен в Университет Бордо I в рамках программы “PAST”, и я признателен этим организациям за гостеприимство.

## § 1. Диаграммы Рудольфа

Под словами *многозначная комплексная функция* мы будем подразумевать многозначную функцию со значениями в  $\mathbb{C}$ , не обязательно аналитическую, но похожую на алгебраическую в том смысле, что она имеет изолированные точки ветвления, вне которых может быть однозначно и

неограниченно продолжена вдоль любого пути в области определения. Теперь дадим формальное определение.

Пусть  $\mathcal{C}$  – некоторая категория многообразий (гладкая, кусочно-гладкая, вещественно- или комплексно-аналитическая и т.д.). Пусть  $D \in \mathcal{C}$  и  $\text{pr}_D: D \times \mathbb{C} \rightarrow D$  – проекция на первый сомножитель (как правило, в дальнейшем  $D$  будет областью в  $\mathbb{C}$ ).  $n$ -значной комплексной  $\mathcal{C}$ -функцией на  $D$  называется класс эквивалентности  $F = [K, j]$  пар  $(K, j)$ , где  $K \in \mathcal{C}$  – многообразие той же размерности, что и  $D$ , а  $j: K \rightarrow D \times \mathbb{C}$  есть  $\mathcal{C}$ -отображение такое, что  $\text{pr}_D \circ j: K \rightarrow D$  есть разветвленное накрытие степени  $n$ . Пары  $(K, j)$  и  $(K_1, j_1)$  эквивалентны, если существует  $\mathcal{C}$ -изоморфизм  $\varphi: K \rightarrow K_1$  такой, что  $j = j_1 \circ \varphi$ . Образ  $j(K)$  называется графиком функции  $F$ , и множество значений функции  $F$  в точке  $z_0 \in D$  определяется как  $F(z_0) = \text{graph}(F) \cap (z_0 \times \mathbb{C})$ . В любом односвязном подмножестве многообразия  $D$ , не содержащем точек ветвления,  $F$  распадается на  $n$  однозначных ветвей.

Ясно, что если  $D$  – окружность с выделенной точкой, то понятие  $n$ -значной функции совпадает с понятием косы. Поэтому, возможно, разумно было бы называть многозначную функцию на  $D$  (*многомерной*) *косой над  $D$* .

Обозначим через  $B(F)$  множество всех  $z \in D$ , для которых  $F(z)$  содержит менее, чем  $n$  элементов. Оно состоит из точек ветвления функции  $F$  и из точек, в которых совпадают какие-нибудь две однозначные ветви. Обозначим

$$\begin{aligned} B_+ &= B_+(F) := B(\text{Re } F) \\ &= B(F) \cup \{z \in D \mid \exists w_1 \neq w_2 \in F(z), \text{Re } w_1 = \text{Re } w_2\}. \end{aligned}$$

Это множество задано одним вещественным уравнением, значит, в общем положении, – это вещественная гиперповерхность в  $D$ , возможно, с границей.

Предположим теперь, что  $D$  ориентируемо, а функция  $F$  кусочно-гладкая. Тогда определим *диаграмму Рудольфа функции  $F$*  как множество  $B_+$ , наделенное следующей дополнительной структурой (см. [5]). Точка  $z \in B_+ - B$  называется *регулярной*, если  $\text{Re } F(z)$  содержит в точности  $n - 1$  элемент, и пересечение графиков  $\text{Re } f_1$  и  $\text{Re } f_2$  трансверсально, где через  $f_1$  и  $f_2$  обозначены те однозначные ветви функции  $F$  в окрестности точки  $z$ , для которых  $\text{Re } f_1(z) = \text{Re } f_2(z)$ . В противном случае точка  $z$  – *особая*. Обозначим множество особых точек  $B_+$  через  $\text{Sing}(B_+)$ . Каждую компоненту связности  $L$  множества  $B_+ - \text{Sing}(B_+)$  пометим целым числом  $k$  таким, что  $\text{Re } w_1 < \dots < \text{Re } w_k = \text{Re } w_{k+1} < \dots < \text{Re } w_n$  для  $\{w_1, \dots, w_n\} = F(z), z \in L$ . Другими словами, мы определили локально постоянную функцию  $N: B_+ - \text{Sing}(B_+) \rightarrow \mathbb{Z}_+, N(z) = k$ . Зададим на  $B_+ - \text{Sing}(B_+)$  ориентацию  $O$  следующим образом. Если пересечь

участок  $L$  неособой части  $B_+$ , помеченный числом  $k$ , некоторым трансверсальным путем  $\alpha(t)$ , то получится коса, эквивалентная либо  $\sigma_k$ , либо  $\sigma_k^{-1}$ . Пересечение  $\alpha$  с  $L$  считается положительным в первом случае и отрицательным – во втором.

Стратификация  $B \subset \text{Sing}(B_+) \subset B_+ \subset D$  области  $D$  вместе с данными  $(O, N, n)$  называется *диаграммой Рудольфа* на  $D$ , при этом число  $n$  называется ее *степенью*. Если она была получена вышеописанным способом по многозначной функции  $F$ , то она называется диаграммой Рудольфа функции  $F$ . Мы будем обозначать диаграмму Рудольфа тоже через  $B_+(F)$ .

Изображая на рисунках ориентацию диаграмм Рудольфа на двумерных областях, мы будем пользоваться соглашением, по которому на  $B_+(\sqrt{z})$  стрелка направлена от  $\infty$  к  $0$ , а на  $B_+(\sqrt{\bar{z}})$  – от  $0$  к  $\infty$  (в обоих случаях  $B_+$  есть полупрямая неположительных вещественных чисел).

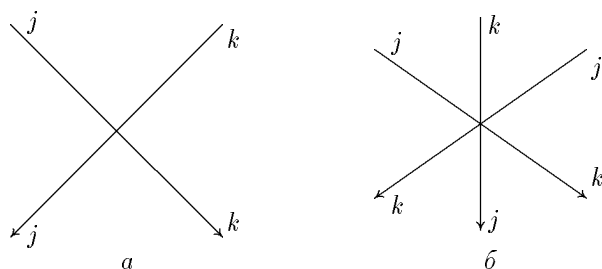


Рис. 1

Далее ограничимся случаем  $\dim_{\mathbb{R}} D = 2$ . Будем говорить, что  $B(F)$  *невырождено*, если оно дискретно и любая точка  $z \in B$  обладает окрестностью  $U$ , в которой все компоненты связности графика  $F|_U$ , кроме одной, являются графиками однозначных функций. Скажем, что  $B_+(F)$  *невырождено*, если множество  $\text{Sing}(B_+)$  дискретно,  $B(F)$  невырождено, и для любого  $z \in B$  вещественные части всех значений функции  $F$  в точке  $z$  различны. Назовем  $B_+$  *строго невырожденной*, если она невырождена, и возле каждой точки из  $\text{Sing}(B_+) - B$  является либо трансверсальным пересечением двух линий, помеченных числами  $k, j$  при  $|k - j| \geq 2$ , (см. рис. 1а), либо трансверсальным пересечением трех линий, ориентированных и помеченных, как на рис. 1б, при  $|k - j| = 1$ . (Такие точки соответствуют стандартным соотношениям группы кос  $\sigma_k \sigma_j = \sigma_j \sigma_k$ ,  $|k - j| \geq 2$ , и  $\sigma_j \sigma_k \sigma_j = \sigma_k \sigma_j \sigma_k$ ,  $|j - k| = 1$ , соответственно.)

Диаграмма Рудольфа называется *гладкой*, если  $B_+$  – гладкое многообразие с краем, причем  $\partial B_+ = B \cup (\partial D \cap B_+)$  и  $\text{Sing}(B_+) = B$ . Гладкие диаграммы, очевидно, строго невырождены. Диаграмма Рудольфа называется *квазиположительной*, если возле каждой  $z_0 \in B$  все ее линии ориентированы в сторону  $z_0$  (как для  $\sqrt{z - z_0}$ ); диаграмма *положительная*, если возле  $\partial D$  все ее линии ориентированы внутрь  $D$ .

Мы приводим без доказательства следующее очевидное утверждение (в оставшейся части статьи ни оно, ни понятие строгой невырожденности не используются).

**Предложение 1.1.** Пусть  $D$  – (вещественно) двумерное кусочно гладкое многообразие, и  $F$  – кусочно гладкая комплексная многозначная функция на  $D$ . Тогда сколь угодно малым возмущением графика функции  $F$  можно добиться того, чтобы  $B_+(F)$  стала строго невырожденной. Любую строго невырожденную диаграмму Рудольфа на  $D$  можно реализовать в виде  $B_+(F)$  для некоторой кусочно гладкой функции  $F$ , которая в этом случае определена однозначно с точностью до изотопии пространства  $D \times \mathbb{C}$ , сохраняющей проекцию на  $D$ .

**Замечание 1.** Диаграммы Рудольфа были введены в [5] для изучения кос, получающихся из многозначных функций вида  $F \circ \gamma$ , где  $F$  – алгебраическая функция на  $D \subset \mathbb{C}$ , и  $\gamma: S^1 \rightarrow D$  – некоторый путь. Если  $D = S^1$ , то невырожденная диаграмма  $B_+$  есть то же самое, что разложение косы в произведение стандартных образующих группы кос.

**Замечание 2.** Невырожденные диаграммы Рудольфа комплексно-аналитических функций всегда квазиположительны (см. [5]), и вдоль регулярной части  $B_+(F)$  расстояние между теми двумя значениями  $F$ , вещественные части которых совпадают, убывают в положительном направлении (см. [6]), в частности,  $B_+$  не может содержать замкнутых компонент (циклов). Ли Рудольф сообщил мне, что Б. Мойшезон доказал некоторые менее очевидные ограничения для случая, когда график  $F$  – каспидальная кривая.

**Замечание 3.** В приложении обсуждается существование невырожденных диаграмм Рудольфа для алгебраических функций.

## §2. Реализуемость гладких диаграмм Рудольфа алгебраическими функциями

Пусть  $D$  – диск и  $B_+$  – гладкая диаграмма Рудольфа на  $D$ . Назовем  $B_+$  *приведенной*, если она не содержит циклов, и точки множества  $B_+ \cap \partial D$  можно разбить на последовательные (относительно обхода вдоль  $\partial D$ ) группы с нечетным количеством точек в каждой группе так, чтобы центральная точка каждой группы была концом линии из  $B_+$ , другой конец которой внутри  $D$ , и  $k$ -я точка справа была соединена линией из  $B_+$  с  $k$ -й точкой слева. (Пример: диаграмма на рис. 2 – приведенная.)

Фактически, в [5] было доказано (хотя и не было сформулировано, поскольку этого не требовалось), что любая квазиположительная приведенная диаграмма Рудольфа диффеоморфна диаграмме некоторой алгебраической функции без полюсов в единичном круге. Надо всего лишь заме-

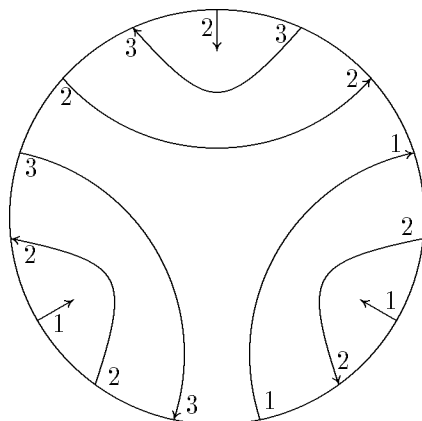


Рис. 2

нить “универсальную функцию”, заданную уравнением  $(w - z)P(w) + \varepsilon$  (см. [5, пример 3.3]), функцией, заданной уравнением

$$(w - z)(1 - w)(2 - w) \cdots (n - w) + \varepsilon p(z) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, и  $p(z)$  — многочлен степени  $n$ , значения которого в нечетных точках отрезка  $[1, n]$  положительны, а значения в четных точках этого отрезка отрицательны.

Единственное, что требуется для дальнейших целей настоящей статьи, — это реализуемость диаграммы на рис. 2, которая является приведенной. Тем не менее, мы дадим немного более общее утверждение, доказательство которого почти дословно повторяет доказательство основной теоремы из [5].

**Предложение 2.1.** *Любая гладкая диаграмма Рудольфа  $B_+$  в единичном круге  $D \subset \mathbb{C}$  без циклов (компонент, диффеоморфных  $S^1$ ) диффеоморфна  $B_+(F)$  для некоторой алгебраической функции  $F$  на  $D$  без полюсов, график которой есть гладкое аналитическое подмногообразие многообразия  $D \times \mathbb{C}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $U_1, \dots, U_k$  — компоненты связности  $D - B_+$ . Выберем по точке  $a_i$  в каждой  $U_i$  и пусть  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Соединим каждую  $a_i$  со всеми точками множества  $B \cap U_i$  непересекающимися путями  $p_{i1}, \dots, p_{ik}$  внутри  $U_i$ , а затем соединим между собой каждую пару точек  $a_i, a_j$ , для которых  $L_{ij} = \partial U_i \cap \partial U_j \neq \emptyset$ , путем  $q_{ij}$ , трансверсально пересекающим  $L_{ij}$  в единственной точке, таким образом, чтобы пути  $q_{ij}$  не пересекались ни между собой, ни с путями  $p_{ij}$ . Выберем вокруг всех  $a_i$  и  $b_j$  достаточно малые диски  $A_i$  и  $B_j$  соответственно, а вдоль путей  $p_{ij}, q_{ij}$  — узкие полоски  $P_{ij}, Q_{ij}$  (ширина полосок мала по сравнению с радиусами

дисков). Обозначим через  $D_0$  объединение всех  $A_i, B_i, P_{ij}$  и  $Q_{ij}$ . Ясно, что пары  $(D, B_+)$  и  $(D_0, B_+ \cap D_0)$  диффеоморфны.

Обозначим через  $n$  степень данной диаграммы  $B_+$ . Пусть  $w = F_\varepsilon(z)$  – многозначная алгебраическая функция, неявно заданная уравнением (2.1), и  $D_u$  – круг, содержащий точки  $\{0, \dots, n\}$ . Тогда для невозмущенной функции  $F_0$  (которая есть просто  $F_0(z) = \{z, 1, 2, \dots, n\}$ ) мы имеем  $B(F_0) = \{1, \dots, n\}$  и  $B_+(F_0)$  есть объединение вертикальных прямых  $L_k = \{z \mid \operatorname{Re} z = k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , причем  $L_k$  помечена числом  $k$ . Следовательно, для возмущенной функции, благодаря выбору знаков возмущения возле  $B$ , для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ , диаграмму  $B_+(F_\varepsilon|_{D_u})$  с точностью до объемлющего диффеоморфизма можно получить из  $B_+(F_0)$  удалением сегментов длины  $O(\varepsilon^{1/2})$  вокруг точек пересечения с вещественной осью. Обозначим концы верхних лучей диаграммы  $B_+(F_\varepsilon)$  через  $z_1, \dots, z_n$  соответственно.

Теперь построим погружение  $D_0$  в  $D_u$ , погружая, я цитирую [5], “ручку за ручкой” (ручки – это, естественно, вышевыбранные диски и полоски). Сначала отобразим каждый диск  $B_i$  на маленький диск вокруг  $z_k$ , где  $k$  – пометка на  $B_+$  возле  $b_i$ , так, чтобы  $B_+ \cap B_i$  отобразилось в  $B_+(F_\varepsilon)$ . Затем отобразим все диски  $A_i$  на некоторый диск вне  $B_+(F_\varepsilon)$  и погрузим все полоски  $P_{ij}$ , также избегая пересечений с  $B_+(F_\varepsilon)$ . Наконец, погрузим каждую полоску  $Q_{ij}$  следующим образом. Пусть  $k$  – число, которым помечена линия  $L_{ij}$ . Погрузим  $q_{ij}$ , сделав один оборот вокруг  $z_k$  (по или против часовой стрелки в зависимости от ориентации  $L_{ij}$ ), и больше нигде не пересекая  $B_+(F_\varepsilon)$ . Обозначим через  $q$  полученное погружение диска  $D_0$ . Оно “транспортирует” аналитическую структуру на  $D_0$ . В этой структуре  $F_\varepsilon \circ q$  – многозначная аналитическая функция на  $D_0$  с данной диаграммой Рудольфа. По теореме Римана  $D_0$  изоморфна единичному кругу. Чтобы получить алгебраическую функцию с данной диаграммой  $B_+$ , приблизим  $q \circ \varphi$ , где  $\varphi$  – изоморфизм единичного диска на  $D_0$ , многочленом. График построенной функции гладкий, так как кривая (2.1) гладкая.

### §3. Построение накрытия

Пусть  $w = F(z)$  – комплексная непрерывная  $n$ -значная функция на односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  с невырожденной диаграммой Рудольфа  $B_+$ , и пусть  $K$  – график функции  $F$ . Тогда можно явно написать копредставление группы  $\pi_1(D \times \mathbb{C} - K)$  с положительной бесконечно удаленной точкой оси  $\operatorname{Im} w$  в качестве базисной точки (см. [6]).

А именно, каждой компоненте связности  $U$  множества  $D - B_+$  соответствуют образующие  $a_1(U), \dots, a_n(U)$ , заданные следующим образом. Выберем произвольную точку  $z_0 \in U$ , и пусть  $\{w_1, \dots, w_n\} = F(z_0)$ , причем  $\operatorname{Re} w_1 < \dots < \operatorname{Re} w_n$ . Тогда  $a_j(U)$  представлена путем в слое



$z = z_0$ , который приходит из бесконечности вдоль вещественного луча  $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_j$ ,  $\operatorname{Im} w > \operatorname{Im} w_j$ , обходит вокруг  $w_i$  в положительном направлении и возвращается на бесконечность.

Каждой компоненте связности  $L$  множества  $B_+ - \operatorname{Sing}(B_+)$  соответствуют следующие  $n$  соотношений. Пусть  $U$  и  $V$  – компоненты связности множества  $D - B_+$ , расположенные слева и справа от  $L$  соответственно (напомним, что  $B_+$  ориентированно). Пусть  $i$  – число, которым помечен участок  $L$  диаграммы  $B_+$ , т.е.  $w_i$  и  $w_{i+1}$  – те значения  $F$ , вещественные части которых совпадают на  $L$ . Тогда соотношения имеют вид

$$a_j(U) = a_j(V), \quad j \neq i, i+1, \quad (3.1)$$

$$a_{i+1}(U) = a_i(V), \quad (\text{обозначим этот элемент через } b) \quad (3.2)$$

$$a_i(U) = ba_{i+1}(V)b^{-1}. \quad (3.3)$$

**Предложение 3.1.** Если  $K$  – график кусочно гладкой многозначной функции с невырожденной (необязательно строго) диаграммой Рудольфа  $B_+$ , то образующие  $a_i(U)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $U \in \pi_0(D - B_+)$ , и соотношения (3.1)–(3.3), написанные для всех  $L \in \pi_0(B_+ - \operatorname{Sing}(B_+))$ , задают копредставление группы  $\pi_1(D \times \mathbb{C} - K)$ .

Доказательство опускается, так как оно слово в слово повторяет доказательство для копредставления Виртингера группы узла (см., например, [9]). Построенное копредставление также, очевидно, эквивалентно классическому копредставлению Зариского–ван Кампена для фундаментальной группы дополнения к плоской алгебраической кривой.

Пусть теперь  $w = F(z)$  – четырехзначная аналитическая функция в единичном круге  $D$  с диаграммой Рудольфа, изображенной на рис. 2 (существование такой функции было доказано в § 2), и пусть  $K$  – ее график.

**Предложение 3.2.** Многообразие  $K$ , полученное по диаграмме на рис. 2, гомеоморфно кругу.

**Доказательство.** Ограничение на  $K$  проекции  $D \times \mathbb{C} \rightarrow D$  является разветвленным четырехлистным накрытием над  $D$  с тремя точками ветвления второго порядка. Граница  $K$  – это заплетение, заданное косой

$$(\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1})(\sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2)(\sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}). \quad (3.4)$$

Легко видеть, что оно является узлом, четырехкратно накрывающим  $\partial D$ . Стягивая в точку  $\partial K$  и  $\partial D$ , получаем еще одну точку ветвления 4-го порядка. Требуемое утверждение следует из формулы Римана–Гурвица.

Обозначим через  $U_0$  центральную компоненту множества  $D - B_+$  и пусть

$$a = a_1(U_0), \quad b = a_2(U_0), \quad c = a_3(U_0), \quad d = a_4(U_0).$$

Припомощи соотношений (3.1)–(3.3), соответствующих шести дугам с обоими концами на  $\partial D$ , можно выразить все  $a_i(U)$  через  $a, b, c, d$ . Подставляя эти выражения в соотношения, соответствующие оставшимся трем дугам, получаем  $b = b^{-1}abc b^{-1}a^{-1}b, a = bdb^{-1}, d = bcb^{-1}$ . Таким образом,

$$\pi_1(D \times \mathbb{C} - K) = \langle a, b, c, d : abc = bab, ab = bd, bc = db \rangle. \quad (3.5)$$

Как известно, классы эквивалентности  $m$ -листных неразветвленных накрытий  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$  данного пространства  $Y$  взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам группы  $\pi_1(Y, y_0)$  в симметрическую группу  $S_m$  следующим образом: если элемент  $g$  представлен путем  $\alpha$  и  $p^{-1}(y_0) = \{y_1, \dots, y_m\}$ , то  $\varphi(g)$  отображает  $i$  в  $j$ , где  $y_j$  – конец поднятия пути  $\alpha$ , начинающегося в  $y_i$ . Мы здесь пользуемся соглашением, по которому  $S_m$  действует на  $\{1, \dots, m\}$  справа, т.е. применяя произведение перестановок  $s_1 s_2$ , надо сначала применить  $s_1$ , а затем  $s_2$ .

Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi: \pi_1(D \times \mathbb{C} - K) \rightarrow S_m$  (для  $K$ , построенного выше), заданный на образующих следующим образом:

$$\varphi(a) = (12), \quad \varphi(b) = (23), \quad \varphi(c) = (12), \quad \varphi(d) = (13). \quad (3.6)$$

Это определение согласовано с соотношениями (3.5), значит,  $\varphi$  определен корректно. Мы получили неразветвленное накрытие над  $D \times \mathbb{C} - K$ , которое единственным способом продолжается до разветвленного накрытия над цилиндром  $D \times \mathbb{C}$ . Чтобы получить эквивалентное накрытие над единичным шаром  $B^4 = \{(z, w) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ , достаточно заметить, что для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  пара  $(B^4, \text{график}(\varepsilon F))$  диффеоморфна паре  $(D \times \mathbb{C}, K)$ .

Обозначим построенное накрытие  $f: X \rightarrow B^4$ .

Поскольку перестановка, соответствующая малой петле вокруг  $K$ , состоит из двух циклов длиной один и два, прообраз  $K$  распадается в несвязное объединение двух компонент  $f^{-1}(K) = M \cup M_1$ , таких, что вдоль  $M_1$  отображение  $f$  является локальным гомеоморфизмом, а вдоль  $M$  имеет ветвление второго порядка.

**Предложение 3.3.** *Ограничения  $f$  на  $M$  и на  $M_1$  являются диффеоморфизмами.*

*Доказательство.* Иначе  $K$  имело бы особенность.

#### § 4. Односвязность $X - M$ и его односвязность на бесконечности

Содержание данного параграфа – это непосредственное применение теоремы Рейдемейстера–Шрейера о фундаментальной группе конечного накрытия (см. [10, теорема 2.9], [9]).

Если  $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$  – некоторое неразветвленное  $m$ -листное накрытие, заданное гомоморфизмом  $\varphi: G \rightarrow S_m$ ,  $G = \pi_1(Y, y_0)$  (см. §3), то  $p_*$  изоморфно отображает  $\pi_1(\tilde{Y}, y_1)$  на подгруппу  $H \subset G$ , состоящую из всех  $h \in G$ , таких, что перестановка  $\varphi(h)$  оставляет на месте 1. Гомоморфизм  $\varphi$  можно интерпретировать как действие  $G$  сдвигами на правых смежных классах группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Правые смежные классы  $G/H$  – это  $H_1 = H, H_2, \dots, H_m$ , где  $H_j = \{g \in G \mid \varphi(g) \text{ отображает } 1 \text{ в } j\}$ .

Пусть  $\langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = 1, \dots, R_r = 1 \rangle$  – некоторое конечное копредставление группы  $G$ , и пусть  $1 = K_1, \dots, K_m$  – система слов от образующих  $a_\nu$ , которые задают по одному представителю в каждом правом смежном классе. Предположим, что любой начальный отрезок любого слова  $K_\mu$  тоже является некоторым словом  $K_{\mu'}$  (такая система представителей называется *шрейеровской*). Тогда теорема Рейдемейстера–Шрейера дает конечное копредставление группы  $H$  с образующими  $s_{\nu\mu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ,  $\mu = 1, \dots, m$  и соотношениями

$$s_{\nu\mu} = 1, \quad \text{если } K_\mu a_\nu = K_{\mu'} \text{ для некоторого } \mu', \quad (4.1)$$

$$\tau(K_\mu R_\rho K_\mu^{-1}) = 1, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \rho = 1, \dots, r, \quad (4.2)$$

где  $\tau$  – *переписывающий процесс Рейдемейстера*, который каждое слово  $W$  от образующих  $a_\nu$  переписывает в слово от образующих  $s_{\nu\mu}$  следующим образом. Если  $W = \prod_i a_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ , то  $\tau(W) = \prod_i s_{\nu_i \mu_i}^{\varepsilon_i}$ , где  $K_{\mu_i}$  – шрейеровский представитель правого смежного класса, соответствующего начальному отрезку слова  $W$  вплоть до  $a_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ , не включая  $a_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$  если  $\varepsilon_i = 1$ , и включая, если  $\varepsilon_i = -1$ . При этом вложение  $H \rightarrow G$  задано посредством  $s_{\nu\mu} \mapsto K_\mu a_\nu K_\mu^{-1}$ , где  $K_{\mu'}$  – шрейеровский представитель правого смежного класса  $H K_\mu a_\nu$ .

Пусть теперь  $f: X \rightarrow B^4 \subset \mathbb{C}^2$  – накрытие, построенное в §3. Обозначим  $G = \pi_1(B^4 - K)$ ,  $G_\partial = \pi_1(S^3 - \partial K)$ , где  $S^3 = \partial B^4$ ,  $\partial K = K \cap S^3$ . Тогда  $G$  задана посредством (3.5) и  $f$  – посредством (3.6), при помощи гомоморфизма  $\varphi: G \rightarrow S_3$ . Выберем в качестве шрейеровской системы представителей  $1, a, d$ . Тогда теорема Рейдемейстера–Шрейера дает копредставление группы  $\pi_1(X - f^{-1}(K))$  с образующими

$$a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

и соотношениями

$$a_1 = d_1 = 1, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} a_1 b_2 c_3 b_2^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1}, & \quad a_1 b_2 d_1^{-1} b_1^{-1}, & \quad b_1 c_1 b_3^{-1} d_1^{-1}, \\ a_2 b_1 c_1 b_3^{-1} a_3^{-1} b_2^{-1}, & \quad a_2 b_1 d_3^{-1} b_2^{-1}, & \quad b_2 c_3 b_2^{-1} d_2^{-1}, \\ a_3 b_3 c_2 b_1^{-1} a_2^{-1} b_3^{-1}, & \quad a_3 b_3 d_2^{-1} b_3^{-1}, & \quad b_3 c_2 b_1^{-1} d_3^{-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где (4.4) соответствует (4.1), а (4.5) соответствует (4.2), причем строки в (4.5) соответствуют шрейеровским представителям  $1, a, d$ , а столбцы – трем соотношениям из (3.5).

Чтобы получить копредставление для  $\pi_1(X - M)$ , надо приравнять единице слово, представляющее малую петлю вокруг  $M_1$ . Таким словом является просто  $b_1$ . Действительно, по определению  $b_1$  есть поднятие  $b$  на накрытие, начинающееся из базисной точки  $y_1$ , умноженное справа на накрытие шрейеровского представителя  $K_{\varphi(b)(1)}^{-1} = K_1^{-1} = 1$ . Значит,  $b_1$  сопряжено малой дуге вокруг  $f^{-1}(K)$ , образ которой – простая (не двойная) петля вокруг  $K$ . Это значит, что  $b_1$  – обход вокруг той компоненты  $f^{-1}(K)$ , вдоль которой  $f$  неразветвлено.

Таким образом,  $\pi_1(X - M)$  порождено образующими (4.3) с соотношениями (4.4), (4.5) и  $b_1 = 1$ . Подставляя (4.4) и  $b_1 = 1$  в (4.5), получаем  $\pi_1(X - M) = \langle c_1, a_2, \dots, d_2, a_3, \dots, d_3 \mid c_3 = 1, b_2 = 1, c_1 = b_3, a_2c_1 = b_2a_3b_3, a_2 = b_2d_3, b_2c_3 = d_2b_2, a_3b_3c_2 = b_3a_2, a_3b_3 = b_3d_2, b_3c_2 = d_3 \rangle = \dots$  (исключаем  $c_3, b_2, c_1$  из соотн. 1, 2, 3)  $\dots = \langle a_2, c_2, d_2, a_3, b_3, d_3 \mid a_2 = a_3, a_2 = d_3, 1 = d_2, a_3b_3c_2 = b_3a_2, a_3b_3 = b_3d_2, b_3c_2 = d_3 \rangle = \dots$  (исключаем  $a_3, d_3, d_2$  из соотн. 1, 2, 3)  $\dots = \langle a_2, c_2, b_3 \mid a_2b_3c_2 = b_3a_2, a_2 = 1, b_3c_2 = a_2 \rangle = \langle 1 \rangle$ .

Таким образом, мы доказали

**Предложение 4.1.**  $\pi_1(X - M) = 1$ .

Чтобы доказать односвязность  $X - M$  на бесконечности, мы проделаем аналогичные вычисления для группы узла  $\partial K \subset S^3$ , который задан “граничной косой диаграммы Рудольфа” (3.4).

**Предложение 4.2.**  $\pi_1(\partial(X - N)) = 1$ , где  $N$  – (открытая) трубчатая окрестность подмногообразия  $M$  в  $X$ .

*Доказательство.* Ясно, что копредставление Виртингера группы  $\partial K$  эквивалентно копредставлению (3.1)–(3.3), написанному для тонкого кольца  $A$  вдоль  $\partial D$ . Обозначим компоненты связности множества  $A - B_+$  через  $U_1, \dots, U_{15}$ , двигаясь против часовой стрелки (в соответствии с рис. 2), и начиная с нижней компоненты множества  $A \cap U_0$ , где  $U_0$  – центральная компонента множества  $D - B_+$  (тот же порядок, который использован при записи косы (3.4)). Обозначим через  $a, b, c, d$  стандартные образующие  $a_i(U_1)$  и сохраним все остальные обозначения.

До конца этого параграфа для групповых элементов  $a, b$  мы будем обозначать  $a^{-1}$  через  $\bar{a}$ , и  $b^{-1}ab$  через  $a^b$ . Выразим все остальные  $a_i(U_j)$  через  $a, b, c, d$ , используя семь пересечений с  $B_+$  по часовой стрелке и семь –

против:

$$\begin{array}{l}
 j : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \\
 a_1(U_j) : a \ b \ b \ c^{\bar{b}\bar{a}b} \ c^{\bar{b}\bar{a}b} \ a^{W_1} \ a^{W_1} \ a^{W_1} \ d^{\bar{b}\bar{a}} \ d^{\bar{b}\bar{a}} \ d^{\bar{b}\bar{a}} \ d^{\bar{b}\bar{a}} \ d^{\bar{b}\bar{a}} \ a \ a \\
 a_2(U_j) : b \ a^b \ c^{\bar{b}\bar{a}b} \ b^{abc\bar{a}^b} \ a^b \ c^{\bar{b}\bar{a}b} \ b^{W_2} \ b^{W_2} \ c^{d\bar{b}\bar{a}} \ c^{d\bar{b}\bar{a}} \ b \ b \ a \ d^{\bar{b}} \ b \\
 a_3(U_j) : c \ c \ a^b \ a^b \ b^{abc} \ b^{abc} \ c^{\bar{b}\bar{a}b} \ d \ a^b \ b \ c^{d\bar{b}\bar{a}b} \ a^b \ b \ b \ d \\
 a_4(U_j) : d \ d \ d \ d \ d \ d \ d \ d \ c^{\bar{b}\bar{a}bd} \ b^{ab} \ a^b \ a^b \ c^d \ c^d \ c^d \ c^d,
 \end{array}$$

где  $W_1 = b\bar{c}\bar{b}\bar{a}b$ ,  $W_2 = abc\bar{b}ab\bar{c}\bar{b}\bar{a}b$ . Последнее пересечение (между  $U_8$  и  $U_9$ ) дает соотношения:  $d^{\bar{b}\bar{a}}\bar{a}^{W_1} = c^{d\bar{b}\bar{a}}\bar{d} = a^b\bar{b}^{W_2} = b^{ab}\bar{c}^{\bar{b}\bar{a}bd} = 1$ .

Поскольку старые  $a, b, c, d$  являются образами новых, гомоморфизм  $\varphi: G_\partial \rightarrow S_3$  по-прежнему задан посредством (3.6). Добавляя, как и выше, соотношение  $b_1 = 1$  к копредставлению Рейдемейстера–Шрейера группы  $\pi_1(f^{-1}(S^3 - \partial K))$  (с той же самой шрейеровской системой  $1, a, d$ ), мы получим некоторое копредставление группы  $G_1 = \pi_1(\partial X - (\partial X \cap N))$  с образующими  $a_1, a_2, a_3, b_1, \dots, d_3$ . Исключая последовательно  $a_1 = 1, b_1 = 1, d_1 = 1$ , затем  $a_3 = 1, c_3 = 1$ , и затем  $d_2 = 1$ , получаем  $G_1 = \langle c_1, a_2, b_2, c_2, b_3, d_3 \mid d_3\bar{a}_2c_2\bar{a}_2b_2, a_2\bar{b}_2\bar{c}_2, b_2c_1\bar{b}_3, b_3c_2\bar{b}_2\bar{d}_3, \bar{b}_2a_2\bar{d}_3\bar{b}_2c_2, \bar{a}_2b_2b_3\bar{c}_1\bar{a}_2b_2d_3, a_2 \cdot \bar{d}_3\bar{b}_2a_2\bar{c}_2 \rangle$  (обозначим эти соотношения соответственно через  $R_1, \dots, R_7$ ). Далее, последовательно исключая  $c_1 = \bar{b}_2b_3$  из  $R_3$ ,  $c_2 = a_2\bar{b}_2$  из  $R_2$ ,  $d_3 = \bar{b}_2a_2b_2$  из  $R_1$ ,  $a_2 = b_2^3$  из  $R_5$  и  $b_3 = b_2^2$  из  $R_4$ , получаем, что  $G_1$  – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом  $b_2$ , и остальные образующие выражаются через  $b_2$  так:

$$a_1 = b_1 = d_1 = d_2 = a_3 = c_3 = 1, \quad c_1 = b_2, \quad c_2 = b_3 = b_2^2, \quad a_2 = d_3 = b_2^3. \quad (4.6)$$

По определению трубчатой окрестности существует диффеоморфизм  $t: M \times D^2 \rightarrow N$ . Требуемое многообразие  $\partial(X - N)$  получается из  $\partial X - (\partial X \cap N)$  приклеиванием ручки  $M \times S^1$  вдоль тора  $\partial M \times S^1$ , который отождествляется при помощи  $t$  с  $\partial(\partial X \cap N)$ . В силу предложений 3.2 и 3.3  $M$  изоморфно диску, поэтому, для того, чтобы доказать, что  $\pi_1(X - N) = 1$ , надо показать, что образ в  $G_1$  гомотопического класса петли  $\partial M \times p$  для  $p \in S^1$  совпадает с  $b_2$ .

Обозначим через  $K_\varepsilon$  график функции  $F + \varepsilon i$  (т.е.  $K$ , сдвинутое слегка вверх). Тогда для достаточно малого  $\varepsilon$  индекс пересечения  $K \cdot K_\varepsilon$  равен трем, потому что имеются ровно три точки пересечения, – по одной возле каждой точки ветвления функции  $F$  (очевидно, что эти точки лежат над  $B_+$ ). Известно, что индекс пересечения двух поверхностей в четырехмерном шаре равен индексу зацепления их границ. Значит,  $\text{link}(\partial K, \partial K_\varepsilon) = 3$ .

Обозначим через  $\alpha$  замкнутый путь, параметризующий  $\partial K_\varepsilon$ , и через  $\beta$  – малую положительную петлю вокруг  $K$ . Предположим, что они начинаются в одной и той же точке. Тогда

$$\text{link}(\alpha\beta^{-3}, \partial K) = 0 = \text{link}(f(\partial M \times p), \partial K),$$

и, значит, эти два пути гомотопны. Положим  $\beta = a$  и соединим начальную точку пути  $\alpha$  с базисной точкой фундаментальной группы тем же путем, который соединяет базисную точку с началом петли  $a$  (вертикальная мнимая полупрямая).

Выразим  $\alpha$  через образующие  $a_i(U_j)$ . Для этого надо начать с пустого слова, выбрать однозначную ветвь функции  $F$  и продолжить ее вдоль  $\partial D$  вплоть до возвращения к исходному значению. При этом каждый раз, когда какое-нибудь другое значение функции  $F$  проходит над тем значением, которое мы продолжаем (каждое такое событие отвечает пересечению с  $B_+$ , но не наоборот), мы приписываем в конец слова образующую  $a_i(U_j)$ , соответствующую верхнему значению  $F$ , если пересечение с  $B_+$  положительно, и  $a_i(U_j)^{-1}$ , если отрицательно. Ясно, что безразлично, брать ли  $U_j$  до или после пересечения с  $B_+$  (это и было причиной соотношения (3.2)).

Благодаря выбору пути  $\beta$ , начинать надо с точки над  $U_1$  возле первой (т.е. с минимальной вещественной частью) однозначной ветви функции  $F$ . Выполним описанную процедуру. Получим

$$\alpha = (a_2(U_1)a_1(U_5)^{-1}a_1(U_{14})a_2(U_{15})) \cdot (a_2(U_{11})a_3(U_{12})a_4(U_1)) \\ \times (a_2(U_2)^{-1}a_4(U_7)a_4(U_{10})^{-1})(a_2(U_3)a_3(U_4)a_2(U_6)^{-1}a_3(U_8)a_3(U_{13})^{-1}),$$

и в терминах  $a, b, c, d$ , это равно  $\alpha = ab\bar{c}\bar{b}\bar{a}babab\bar{d}\bar{b}\bar{a}bd\bar{c}\bar{b}ab\bar{c}\bar{b}\bar{a}bd\bar{b}$  (мы здесь воспользовались вышеприведенной таблицей для  $a_i(U_j)$ ). Поскольку путь  $\alpha\beta^{-3}$  тривиален в  $\pi_1(D \times \mathbb{C} - K)$ , все его поднятия замкнуты, причем одно из них идет вдоль  $M_1$ , а два других – вдоль  $M$ . Как объяснялось выше,  $\partial M \times p$  гомотопно любому из тех двух, которые идут вдоль  $M$ . Поскольку  $\alpha\beta^{-3}$  соединен с базисной точкой тем же путем, что и  $a$ , и поскольку  $\varphi(a) = (12)$  – цикл, содержащий символ “1”, то те два поднятия, которые идут вдоль  $M$ , задаются словами  $\tau(\alpha\beta^{-3})$  и  $\tau(a\alpha\beta^{-3}a^{-1})$ , где  $\tau$  – вышеупомянутый переписывающий процесс Рейдемейстера. Вычисляя  $\tau(\alpha\beta^{-3})$ , и применяя (4.6), убеждаемся, что этот элемент равен  $b_2$ . Предложение 4.2 доказано.

**Замечание 4.3.** Как упоминалось во введении, применяя стандартную технику, описанную, например, в [7], можно явно выписать разложение Хегора для  $\partial(X - N)$  и показать, что оно диффеоморфно сфере  $S^3$ . В нашем случае это сделать еще проще, так как ветвление имеет второй порядок. Действительно, если задать узел  $\partial K$  диаграммой с проходами и переходами, можно разрезать  $\mathbb{R}^3$  плоскостью  $H$  так, чтобы все проходы были под  $H$ , а все переходы – над  $H$ . Это дает разложение Хегора накрывающего многообразия, в котором диски, разрезающие верхнее (соответственно, нижнее) тело с ручками, суть это накрытия полудисков, расположенных между переходами (соответственно, проходами) и  $H$ .

§5. Стягиваемость  $X - M$ 

Теперь стягиваемость многообразия  $X - M$  непосредственно следует из того, что эйлерова характеристика  $\chi(X - M)$  равна 1 (лемма 5.3 ниже), и из следующей простой леммы.

**Лемма 5.1.** Пусть  $Y$  — односвязное ориентируемое четырехмерное многообразие со связным краем  $\partial Y \neq \emptyset$  такое, что  $\chi(Y) = 1$ . Тогда  $Y$  стягиваемо.

**Доказательство.** По теореме Гуревича достаточно доказать, что  $H_q(Y; \mathbb{Z}) = 0$  при  $q > 0$ . По формуле универсальных коэффициентов это следует из того, что  $H_q(Y; k) = 0$ ,  $q > 0$ , для любого поля коэффициентов  $k$  произвольной характеристики. По условию это так при  $q = 1$  и при  $q \geq 4$ . По двойственности Лефшеца–Пуанкаре имеем  $H_3(Y; k) = H^1(Y, \partial Y; k)$ , и из точной последовательности пары

$$\cdots \rightarrow H^0(Y; k) \xrightarrow{\cong} H^0(\partial Y; k) \rightarrow H^1(Y, \partial Y; k) \rightarrow H^1(Y; k) = 0 \rightarrow \cdots$$

мы видим, что  $H^1(Y, \partial Y; k) = 0$ . Остается доказать, что  $H_2(Y, k) = 0$ . Это следует из  $1 = \chi(Y) = \sum_q (-1)^q \dim_k H_q(Y; k)$ . Лемма доказана.

Стандартный способ подсчета эйлеровой характеристики разветвленного накрытия удобно сформулировать в виде следующей леммы, которую мы воспроизводим (в немного измененном виде), вместе с доказательством из [11]. Для римановых поверхностей эта лемма превращается в формулу Римана–Гурвица.

Для непрерывного отображения топологических пространств  $g: A \rightarrow B$  назовем *локальной кратностью отображения  $g$  в точке  $a \in A$*  (обозначение:  $\mu_a g$ ) максимальное число  $k$  такое, что в каждой окрестности точки  $a$  существуют различные точки  $a_1, \dots, a_k$ , для которых  $g(a_1) = \dots = g(a_k)$ . Скажем, что отображение  $g$  имеет *постоянную степень*, если существует число (обозначаемое через  $\deg g$ ) такое, что для любой  $b \in B$  имеет место

$$\sum_{a \in g^{-1}(b)} \mu_a g = \deg g. \quad (5.1)$$

Ясно, что разветвленные накрытия имеют постоянную степень.

**Лемма 5.2** (см. [11, лемма 4.1]). Пусть  $g: A \rightarrow B$  — симплициальное отображение постоянной степени конечных симплициальных комплексов. Пусть  $A_k = \{a \in A \mid \mu_a g \geq k\}$ . (Ясно, что каждое  $A_k$  есть замкнутый подкомплекс комплекса  $A$ .) Тогда

$$\chi(A) = \chi(B) \deg g - \sum_{k > 1} \chi(A_k).$$

**Доказательство.** Слово “симплекс” будет означать “открытый симплекс”. Для симплекса  $\tau$  из  $B$  обозначим через  $N(\tau)$  число симплексов в  $g^{-1}(\tau)$ . Если  $C$  – объединение (открытых) симплексов  $\sigma$ , обозначим  $\chi_0(C) = \sum_{\sigma \subset C} (-1)^{\dim \sigma}$ . Ясно, что если  $C$  – замкнутый подкомплекс, то  $\chi_0(C) = \chi(C)$ . Пусть  $A'_k = \{a \in A \mid \mu_a g = k\}$ . Из (5.1) имеем

$$N(\tau) = \deg g - \sum_{\sigma \subset g^{-1}(\tau)} (\mu_{\sigma} g - 1).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \chi(A) &= \sum_{\tau \subset B} (-1)^{\dim \tau} N(\tau) = \sum_{\tau \subset B} (-1)^{\dim \tau} \left[ \deg g - \sum_{\sigma \subset g^{-1}(\tau)} (\mu_{\sigma} g - 1) \right] \\ &= \sum_{\tau \subset B} (-1)^{\dim \tau} \deg g - \sum_{\sigma \subset A} (-1)^{\dim \sigma} (\mu_{\sigma} g - 1) \\ &= \chi(B) \deg g - \sum_k (k - 1) \chi_0(A'_k) \\ &= \chi(B) \deg g - \sum_k (k - 1) (\chi(A_k) - \chi(A_{k+1})) \\ &= \chi(B) \deg g - \sum_{k > 1} \chi(A_k). \end{aligned}$$

Лемма доказана

**Лемма 5.3.**  $\chi(X) = 2$ ;  $\chi(X - M) = 1$ .

**Доказательство.** По предложениям 3.2 и 3.3  $M$  есть круг. Значит, применяя лемму 5.2 к накрытию  $f: X \rightarrow B^4$ , имеем  $\chi(X) = \chi(B^4) \deg f - \chi(M) = 3 - 1 = 2$ . Пусть  $N$  – открытая трубчатая окрестность  $M$ . Поскольку  $M \simeq D^2$ ,  $N$  гомеоморфно четырехмерной клетке, значит, можно выбрать клеточное разбиение  $X$ , содержащее  $N$  в качестве открытой клетки. Поэтому,  $\chi(X - N) = \chi(X) - 1 = 1$ . Но  $X - N$  гомеоморфно  $X - M$ . Лемма доказана.

### §6. Диаграмма Рудольфа накрытия Витушкина

В этом параграфе мы используем обозначения из [1, § 1] и ссылаемся на рисунки [1, рис. 1–4].

Для начала заметим, что если  $F$  – многозначная комплексная функция в диске  $D$ ,  $D_0 \subset D$  – область, ограниченная жордановой (т.е. простой замкнутой) кривой  $\partial D_0 \subset D$ , и  $F$  не имеет ни ветвлений, ни точек пересечения однозначных ветвей в  $D - D_0$ , (т.е.  $B(F) \cap (D - D_0) = \emptyset$ ), то пары  $(D \times \mathbb{C}, \text{график}(F))$  и  $(D_0 \times \mathbb{C}, \text{график}(F|_{D_0}))$  гомеоморфны.



Поэтому достаточно вычислить диаграмму Рудольфа для  $f|_{D_0}$ , где  $f$  – четырехзначная функция, построенная в [1, §1], и  $D_0$  –  $\varepsilon_1$ -раздутие множества  $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3$  (см. [1, рис. 1] и рис. 3 ниже). К сожалению, диаграмма Рудольфа для  $f$  вырождена. Однако, если возмутить  $f$ , заменив ее на  $e^{i\varepsilon_2} f$  и все вхождения выражений “ $2i$ ” и “ $-2i$ ” в определении функции  $f$ , приведенном в [1, §1], соответственно на выражения “ $2i + \varepsilon_3$ ” и “ $-2i + \varepsilon_3$ ”, то при  $0 < \varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_3 \ll 1$  мы получим диаграмму, изображенную на рис. 3. Очевидно, что диаграммы на рис. 2 и рис. 3 диффеоморфны.

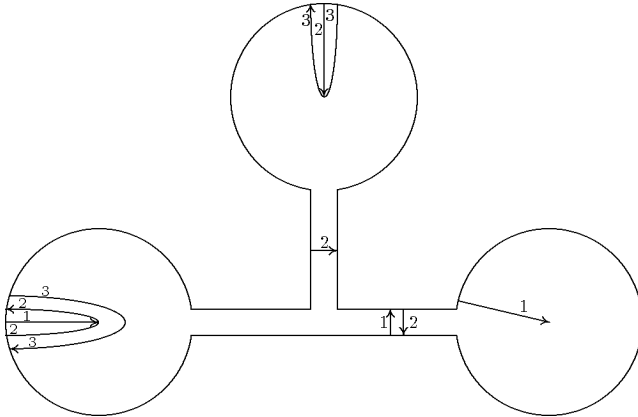


Рис. 3

Чтобы убедиться в том, что диаграмма Рудольфа (обозначим ее  $B_+$ ) действительно выглядит, как на рис. 3, можно выписать явные формулы для вещественных многочленов, параметризующих все сегменты  $B_+$ . Мы покажем это только для  $B_+ \cap K_3$  (остальные вычисления либо аналогичны, либо проще).

Обозначим:  $\alpha = e^{i\varepsilon_2}$ ,  $a_1 = 2i + \varepsilon_3$ ,  $a_2 = -2i + \varepsilon_3$ . По определению имеем  $B_+ \cap K_3 = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , где  $L_0 = \{x \mid \operatorname{Re}(\alpha\sqrt{x+2}) = -\operatorname{Re}(\alpha\sqrt{x+2})\}$ ,  $L_j = \{x \mid \operatorname{Re}(\alpha\sqrt{x+2}) = \operatorname{Re}(\alpha a_j)\}$ ,  $j = 1, 2$ , и  $L_3 = \{x \mid \operatorname{Re}(\alpha a_1) = \operatorname{Re}(\alpha a_2)\} = \emptyset$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} L_0 &= \left\{ x \in K_3 \mid \operatorname{Arg}(\alpha\sqrt{x+2}) = \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \{x \in K_3 \mid \operatorname{Arg}(x+2) = \pi - 2 \operatorname{Arg} \alpha\} \\ &= \{-2 + te^{i(\pi - 2\varepsilon_2)} \mid t \in \mathbb{R}_+\} \cap K_3, \\ L_j &= \{x \in K_3 \mid \exists t \in \mathbb{R}; \alpha(\sqrt{x+2} - a_j) = it\} \\ &= \left\{ -2 + \left( \frac{it}{\alpha} + a_j \right)^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cap K_3. \end{aligned}$$

Чтобы найти целые числа, помечающие сегменты диаграммы  $B_+$ , достаточно проследить, в каком направлении значения  $f$  проходят одно под другим (см. [1, рис. 4] для разобранного случая  $K_3$  и [1, рис. 2, 3] для  $K_1$  и  $K_2$ ).

**Приложение.**

**Существование невырожденных диаграмм Рудольфа для алгебраических кривых**

В данном приложении суммированы результаты из [6], [8] о возможности представить плоскую алгебраическую кривую многозначной функцией с невырожденной диаграммой Рудольфа. Объединяя вместе леммы 2.3, 2.4 из [6] и леммы 1, 2 из [8], получаем

**Предложение.** Пусть  $K$  – приведенная (т.е. без кратных компонент) алгебраическая кривая в  $\mathbb{C}^2$ , которая не содержит ни одной пары компонент вида

$$(Q(z, w) - a)(Q(z, w) - b) = 0, \quad Q \in \mathbb{C}[z, w], \quad \deg Q = 2, \quad a \neq b \in \mathbb{C}, \tag{A.1}$$

отличной от объединения четырех параллельных прямых. Тогда существуют координаты  $(z, w)$ , полученные из исходных сколь угодно малым линейным преобразованием  $\mathbb{C}^2$ , такие, что многозначная функция  $F(z) = \{w \mid (z, w) \in K\}$  имеет невырожденную диаграмму Рудольфа  $B_+(F)$ , удовлетворяющую следующему дополнительному условию.  $B_+(F) - B(F)$  есть объединение погруженных вещественных прямых с только трансверсальными пересечениями, и если  $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  – одно из этих погружений, то для любого  $t \in \mathbb{R}$  существует единственная пара  $f_1, f_2$  ростков однозначных ветвей  $F$  в точке  $j(t)$  такая, что  $\operatorname{Re} f_1 - \operatorname{Re} f_2$  локально задает  $j([t - \varepsilon, t + \varepsilon])$  как гладкую вещественно-аналитическую кривую. Все такие пары ростков, соответствующие одному и тому же погружению  $j$ , получаются одна из другой одновременным аналитическим продолжением вдоль  $j$ .

Ясно, что кривая, содержащая компоненты вида (A.1), отличные от набора из четырех прямых, при любом выборе координат имеет вырожденную диаграмму Рудольфа, так как соответствующая многозначная функция всегда имеет две пары однозначных ветвей  $f_1, f_2$  и  $f_3, f_4$ , разности которых  $f_2 - f_1$  и  $f_4 - f_3$  тождественно совпадают, а, значит, обращение в нуль  $\operatorname{Re} f_2 - \operatorname{Re} f_1$  влечет обращение в нуль  $\operatorname{Re} f_4 - \operatorname{Re} f_3$ . Имеется два пути, чтобы обойти эту проблему. С одной стороны, такие пары исчезают при замене бесконечно удаленной прямой (если мы интересуемся проективным случаем) или при аффинной нелинейной замене координат (если

мы интересуемся аффинным случаем). С другой стороны, можно рассматривать диаграммы Рудольфа с более, чем одним целым числом на некоторых сегментах. Если модуль разности любых двух пометок одного и того же сегмента всегда больше 2, иными словами, вещественные части никаких трех значений  $F$  не совпадают (а леммы из [6], [8] обеспечивают существование такой проекции для любой кривой), то такие диаграммы ничем не хуже, и они обладают всеми существенными свойствами диаграмм Рудольфа, включая единственность графика функции и наличие копредставления фундаментальной группы дополнения, даваемого предложением 3.1.

НИИ системных исследований РАН

Поступило

20.05.95

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Витушкин А. Г. Некоторые примеры в связи с задачей полиномиальных преобразований  $\mathbb{C}^n$  // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 269–279.
- [2] Vitushkin A. G. On polynomial transformation of  $\mathbb{C}^n$  // Manifolds. Tokyo: Tokyo Univ. Press, 1975. P. 415–417.
- [3] Bass H., Connell E. H., Wright D. The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 287–330.
- [4] Eliashberg Ya. Filling by holomorphic discs and its applications // Geometry of low dimensional manifolds. London Math. Soc. Lect. Notes. V. 151. London, 1991. P. 45–67.
- [5] Rudolph L. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. V. 22. P. 191–202.
- [6] Оревков С. Ю. Фундаментальная группа дополнения плоской алгебраической кривой // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 2. С. 260–270.
- [7] Birman J. S., Hilden H. M. Heegaard splittings of branched covering of  $S^3$  // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 213. P. 315–352.
- [8] Оревков С. Ю. Коммутант фундаментальной группы дополнения плоской алгебраической кривой // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 183–184.
- [9] Фокс Р. Краткий экскурс в теорию узлов // Введение в теорию узлов / ред. Р. Кроуэлл, Р. Фокс. М.: Мир, 1967.
- [10] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [11] Оревков С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях  $\mathbb{C}^2$  // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1240.