УДК 517.5

КОГДА ЦЕПОЧКА РАЗДУТИЙ ЗАДАЕТ АВТОМОРФИЗМ $\mathbf{C}^2$.

С.Ю. Оревков

1. Введение. В этой заметке мы приводим новое доказательство одной теоремы А.Г.Витушкина [1]. Оно основано на формуле для канонического класса алгебраической компактификации $\mathbf{C}^2$ (формула (5) ниже). Эта формула ранее использовалась в работах автора (см., например, формулу (3) в [2]), однако ее подробное доказательство публикуется впервые. Похожие формулы, записанные в других терминах, встречались в работах различных авторов.

Пусть L — прямая на $\mathbf{C}P^2$, которую мы будем считать бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости $\mathbf{C}^2$, т.е. $L = \mathbf{C}P^2 \setminus \mathbf{C}^2$. Пусть $\sigma_1 : V \to \mathbf{C}P^2$ — бирациональный морфизм, ограничение которого на $\sigma_1^{-1}(\mathbf{C}^2)$ — изоморфизм, т.е. σ_1 является композицией (цепочкой) раздутий "на бесконечности". Пусть $E_1, \dots, E_n$ — неприводимые компоненты кривой $E = \sigma_1^{-1}(L)$, причем E_1 — собственный прообраз прямой L. Будем говорить, что цепочка раздутий σ_1 *определяет автоморфизм* $\mathbf{C}^2$ если для последней вклеенной кривой (пусть это будет E_2) существует бирациональный морфизм $\sigma_2 : V \to \mathbf{C}P^2$ такой, что $\sigma_2|_{\sigma_2^{-1}(\mathbf{C}^2)}$ — изоморфизм, $\sigma_2^{-1}(L) = E$ и E_2 — собственный прообраз прямой L (в этом случае $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ является автоморфизмом $\mathbf{C}^2$).

Следуя [1], *пробной поверхностью* для цепочки раздутий σ_1 назовем гомологический класс $S \in H_2(V;\mathbf{Z})$, такой, что

$$S \cdot E_2 = 1, \qquad S \cdot E_i = 0 \text{ при } i \neq 2 \tag{1}$$

(как и выше, E_2 — последняя вклеенная кривая). Поскольку $E_1, \dots, E_n$ — базис в $H_2(V;\mathbf{Z})$, условия (1) однозначно определяют класс S. Если цепочка раздутий σ_1 определяет автоморфизм $\mathbf{C}^2$, то $S = \sigma_2^{-1}(l)$, где l — прямая на $\mathbf{C}P^2$ в общем положении. Следовательно, по формуле присоединения имеем

$$S^2 = 1, \qquad S \cdot K_V = -3, \tag{2}$$

где $K_V = -c_1(V)$ — канонический класс поверхности V. А.Г.Витушкин доказал, что (2) является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы цепочка раздутий σ_1 определяла автоморфизм $\mathbf{C}^2$:

Теорема. (см. [1]) *Цепочка раздутий σ_1 определяет автоморфизм $\mathbf{C}^2$ тогда и только тогда, когда для пробной поверхности S имеет место (2).*

2. Дискриминант формы пересечения. Пусть $D = D_1 + \dots + D_n$ — кривая на гладкой проективной поверхности V, ($D_1, \dots, D_n$ — ее неприводимые компоненты). Пусть $A_D = (D_i \cdot D_j)_{ij}$ — матрица пересечений. Определим *дискриминант* $d(D)$ кривой D как $\det(-A_D)$. Знак минус выбран для того, чтобы при раздутии $\sigma : \tilde{V} \to V$ имело место равенство $d(\sigma^{-1}(D)) = d(D)$. Если $D_i \cdot D_j \le 1$ при $i \neq j$, то *графом кривой D* назовем граф Γ_D с вершинами $D_1, \dots, D_n$ и ребрами, отвечающими парам (D_i, D_j) с $D_i \cdot D_j = 1$.

Лемма 1. (Мамфорд [3]) *Предположим, что* Γ_D *имеет вид линейной цепочки* $-\!\circ\!- \cdots -\!\circ\!-$. *Тогда*

а). Если $D_i^2 \le -2$ *при всех* i, *то* $d(D) \ge 2$.

б). Если A_D *отрицательно определена,* $D_i^2 \le -1$ *при всех* i, *и* $d(D) = 1$, *то* D *можно стянуть в гладкую точку.*

3. Доказательство теоремы Витушкина. Пусть $\sigma_1 : V \to \mathbf{C}P^2$ — бирациональный морфизм и $E = E_1 + \cdots + E_n = \sigma_1^{-1}(L)$. Тогда $E_1, \dots, E_n$ — базис пространства $H_2(V, \mathbf{Q})$. Пусть $A = (E_i \cdot E_j)$ — матрица пересечений, и $B = A^{-1}$. Граф кривой E — дерево. Поскольку $d(E) = -1$, из правила Крамера легко следует

Лемма 2. $b_{ij} = d(E - [ij])$, *где* $[ij]$ — *минимальное связное множество вида* $E_{i_1} \cup \cdots \cup E_{i_k}$, *содержащее* $E_i \cup E_j$. $\square$

Лемма 3. *Для* $C_1, C_2 \in H_2(V, \mathbf{Q})$ *имеем* $C_1 \cdot C_2 = \sum_{i,j} b_{ij}(C_1 \cdot E_i)(C_2 \cdot E_j)$.

Доказательство. Для $k = 1, 2$ положим $X_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, $Y_k = (y_k^1, \dots, y_k^n)$, где $C_k = \sum x_k^i E_i$ и $y_k^i = C_k \cdot E_i$. Тогда $Y_k = AX_k$, следовательно, $X_k = BY_k$, и $C_1 \cdot C_2 = \langle X_1, AX_2 \rangle = \langle BY_1, Y_2 \rangle$. $\square$

Пусть, как и в п.1, E_2 — последняя вклеенная кривая, и S — пробная поверхность. Из лемм 2,3 и (1) вытекает

$$S^2 = b_{22} = d(E - E_2). \tag{3}$$

Обозначим $\nu_i = E_i \cdot (E - E_i)$. Формула присоединения для E_i дает $(K_V + E) \cdot E_i = \nu_i - 2$, поэтому из (1) и леммы 3 следует

$$(K_V + E) \cdot S = \sum_{i=1}^{n} b_{i2}(\nu_i - 2). \tag{4}$$

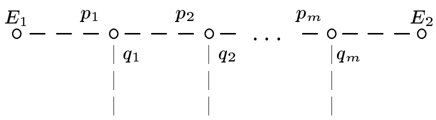

Рис. 1

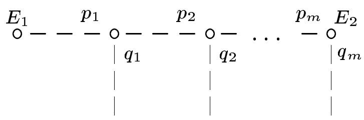

Рис. 2

Предположим, что (2) выполнено. Без ограничения общности можно считать, что кривая E *минимальна* в том смысле, что не существует $j \ge 3$ такого, что $E_j^2 = -1$ и $\nu_j \le 2$. Это значит, что каждый раз раздувается точка исключительной кривой предыдущего раздутия. Поэтому индукцией по числу раздутий легко доказать, что Γ_E либо как на рис. 1, либо как на рис. 2, где пунктиром изображены линейные цепочки вершин. Для кривых E_j, таких, что $\nu_j = 3$ обозначим дискриминанты компонент связности кривой $E - E_j$ в соответствии с рис. 1,2. Из леммы 1а и минимальности E следует, что $q_j \ge 2$ при всех j. Поэтому, из (2) и (3) следует, что рис. 2 невозможен. Применяя (4) и лемму 2 к рис.1, и учитывая что $ES = 1$, получаем

$$K_V \cdot S + 1 = \sum_{\nu_i=3} b_{i2} - \sum_{\nu_i=1} b_{i2} = \sum_{j=1}^{m} p_j q_j r_j - r_0 - \sum_{j=1}^{m} p_j r_j - b_{22} = -b_{22} - 1 + s, \quad (5)$$

где $r_j = q_{j+1} \dots q_m$ и $s = \sum (p_j - 1)(q_j - 1) r_j$. Подставляя (2) и (3) в (5), получаем $s = 0$.

Лемма 4. *Пусть q — ограничение невырожденной квадратичной формы сигнатуры $(-, +, \dots, +)$ на подпространство. Если дискриминант q положителен, то q положительно определена.* $\square$

По (2) и (3) имеем $d(E - E_2) = S^2 = 1 > 0$, значит, по лемме 4, минус форма пересечения на $E - E_2$ положительно определена. В частности, все q_j и p_j положительны, а значит, все слагаемые в сумме s (см. (5)) неотрицательны. Учитывая, что все $q_j > 1$, $s = 0$ влечет $p_1 = \dots = p_m = 1$. Значит, по лемме 1б крайнюю левую линейную ветвь графа Γ_E можно стянуть. При этом получится граф того же вида с $m - 1$ тройными вершинами, и его крайняя левая линейная ветвь будет иметь дискриминант p_2. Продолжая этот процесс, мы стянем все компоненты кривой E кроме E_2. Теорема доказана.

4. Замечание. В [1] доказано, что условия (2) необходимы и достаточны для разложения цепочки раздутий композицию так называемых треугольных цепочек (см. определение в [1]). Явно расписывая раздутия в координатах, несложно убедиться, что треугольные цепочки и только они задают с точностью до аффинной замены координат треугольные (т.е. имеющие вид $(x, y) \mapsto (x + f(y), y)$) преобразованя $\mathbf{C}^2$. Поэтому, рассуждения из [1] не только доказывают сформулированную выше теорему, но дают попутно доказательство теоремы Юнга о разложимости автоморфизма $\mathbf{C}^2$ в композицию аффинных и треугольных преобразований. Автор признателен А.Г. Витушкину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. А.Г. Витушкин, *Критерий представимости цепочки σ-процессов композицией треугольных цепочек*, Мат. Заметки (в печати).
2. А.В. Домрина, С.Ю. Оревков, *О четырехлистных полиномиальных отображениях* $\mathbf{C}^2$. *I. Случай неприводимой кривой ветвления*, Мат. Заметки **64:6** (1998), 847–862.
3. D. Mumford, *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publ. Math. I.H.E.S. **9** (1961), 229–246.

МИРАН им. В.А. Стеклова