

Exercice 11. Soit $x(t_1, t_2)$ un signal bi-dimensionnel tel que $\hat{x}(f_1, f_2) = 0$ pour tout $|f_1|^2 + |f_2|^2 > 1$. Trouver un schéma d'échantillonnage $\Lambda_W = \{Wk : k \in \mathbb{Z}^2\}$ optimal pour x .

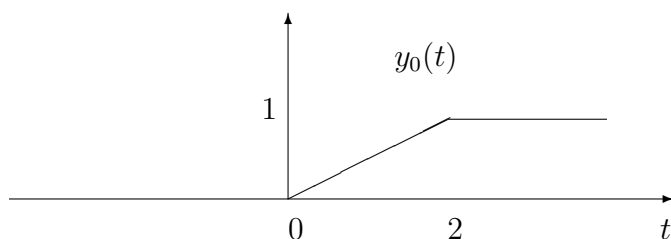
Exercice 12. Quelle est la réponse impulsionnelle du système LTI suivant ?

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau.$$

Exercice 13. Supposons un système LTI donné par sa réponse impulsionnelle $h_0(t)$. On nous donne l'information suivante : La réponse du système au signal d'entrée $x_0(t)$ est le signal de sortie $y_0(t)$, où $y_0(t)$ est donné par le dessin ci-dessous. On nous présente ensuite des signaux d'entrée $x(t)$ modifiés, et des systèmes de réponse impulsionnelle $h(t)$ modifiés selon le tableau suivant

cas	entrée	réponse impulsionnelle
a)	$x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
b)	$x(t) = x_0(t) - x_0(t - 2)$	$h(t) = h_0(t)$
c)	$x(t) = x_0(t - 2)$	$h(t) = h_0(t + 1)$
d)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
e)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
f)	$x(t) = x'_0(t)$	$h(t) = h'_0(t)$

Décider dans chaque cas si nous avons suffisamment d'information pour déterminer la réponse $y(t)$ du système $h(t)$ à l'entrée $x(t)$. Là où c'est le cas, esquisser $y(t)$.



Exercice 14. On considère le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ suivant :

$$(S) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

où les matrices A, B, C, D sont données et $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. On suppose que A est $n \times n$, B est $n \times p$, C est $m \times n$ et D est de taille $m \times p$. L'entrée u est alors p dimensionnelle, la sortie y est m dimensionnelle. La matrice A est appelée *Hurwitz* si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative. Donc $\text{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \text{spec}(A)$.

Montrer que si A est Hurwitz, alors (S) définit un opérateur LTI borné de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^p) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$.

Exercice 15. Un système LTI donné par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est appelé *causal* si $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$. Un système LTI avec réponse impulsionnelle $h(t)$ admet un système LTI invers avec réponse impulsionnelle $k(t)$ si $h * k = \delta$, où δ est la distribution de Dirac. Question : Si h est causal et son inverse k existe, celui-ci est-il aussi causal ?

Exercice 16. On considère le circuit électrique RLC, où on applique une source de tension alternative

$$u(t) = 2 \sin 2\pi t.$$

Sachant que le lien entre la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ est donné par

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau,$$

déterminer la fonction de transfert $\hat{u} \rightarrow \hat{i}$ du circuit RLC, sa réponse impulsionnelle, et en déduire la forme du courant alternatif. Exemple, $R = 20\Omega$, $L = 5H$, $C = 250mF$.