Master 1 : Ingénierie Mathématique. Théorie du signal.

Feuille 1

Exercice 1. Compléter le tableau suivant, qui lie des propriétés de f à des propriétés de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

f	$\widehat{f}$		f	$\widehat{f}$
pair	pair		imaginaire et pair	...
impair	impair		imaginaire et impair	
réel	...		réel et pair	
imaginaire			réel et impair	
$\Re f$ pair, $\Im f$ impair			gaussien	
support compact				

Exercice 2. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

a) $x(t) = \begin{cases} t+1, & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ b) $x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t), & t \in [-T_0/4, T_0/4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

c) $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, x(t)$, avec $x \in L^1$ et $\widehat{x}$ connu. d) $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\operatorname{sinc}(t)$, e) $x(t) = e^{-|t|}$

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{O}_n$ une transformation linéaire orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Trouver une formule pour $(f \circ T)\widehat{\ }$.

Exercice 4. Soit $x(t)$ un signal réel et pair. On suppose que $x(\cdot)$ est approximativement constant au temps $t = 0$, $x(0) \neq 0$, et décroît ensuite très vite vers 0. On définit alors sa durée comme

$$T = \frac{1}{x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt.$$

Sous des hypothèses analogues sur le spectre $\widehat{x}$ de x, on définite la bande B du signal $x(\cdot)$ comme étant la quantité

$$B = \frac{1}{\widehat{x}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)\, d\omega.$$

Que peut-on dire du produit $T \cdot B$? Expliquer le résultat grace à $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-L, L] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 5. On considère l'équation intégrale

$$(*) \qquad y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, r(x-u)\, du, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où $r(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données, $y(x)$ la fonction inconnue. En supposant que les transformées $\widehat{r}$, $\widehat{g}$ et $\widehat{y}$ existent, trouver une expression pour la solution y de (*).