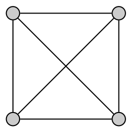
Planarité

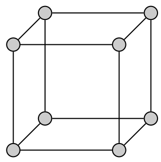
1 Définition et formule d'Euler

Définition 1. Un graphe est **planaire** s'il existe une représentation sur le plan tel qu'aucune arête ne se croise.

Exercice 1 - Exemple de graphe planaire.

1. Montrer que les graphes suivants sont planaires :





2. Montrer qu'un arbre est toujours un graphe planaire

Soit G un graphe planaire connexe. On fixe une représentation planaire de ce graphe. Une **face** de cette représentation planaire est une des régions du plan délimitées par le dessin du graphe. Etant donné une face F, son **bord** est le plus court chemin fermé passant par toutes les arêtes qui touchent la face (le bord peut avoir à parcourir certaines arêtes plusieurs fois). Le **degré** d'une face est la longueur de son bord.

Théorème 1 ***Formule d'Euler (1758)***

Soit G un graphe planaire connexe dont une représentation planaire possède s sommets, a arêtes et f faces. On a

$$s - a + f = 2.$$

Si G possède k composantes connexes, on a alors

$$s - a + f = 1 + k$$

Exercice 2 - Faces d'une représentation planaire. Soit $G = (S, A)$ un graphe planaire. Montrer que la somme des degrés de toutes les faces est égal au double du nombre d'arêtes (en particulier ce nombre ne dépend pas de la représentation planaire choisie !) :

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a.$$

Exercice 3 - Formule d'Euler. Soit G un graphe planaire connexe, dont on fixe une représentation planaire. On note f le nombre de faces de G, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes. Montrer la formule d'Euler :

$$s - a + f = 2.$$

Proposition 2

$K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaire.

Exercice 4 - $K_{3,3}$ n'est pas planaire. Trois maisons doivent être reliées à 3 usines qui leur fournissent l'eau, le gaz et l'électricité ; on demande de tracer le plan du réseau de telle manière que les tuyaux ne se croisent pas.

Exercice 5 - K_5 n'est pas planaire. Est-il possible que dans un pays, il existe cinq villes toutes reliées aux quatre autres par des routes différentes qui ne se croisent pas ?

Exercice 6 - Conditions nécessaires pour être planaire. Soit G un graphe simple connexe planaire à $s \geq 3$ sommets. Montrer en utilisant la formule d'Euler que :

1. $a \leq 3s - 6$ et $f \leq 2s - 4$.
2. Montrer qu'il existe au moins un sommet de degré inférieur à 5.
3. Montrer qu'on ne peut pas remplacer 5 par 4 autrement dit : Existe t'il un graphe planaire dont tous les sommets sont de degré 5 ?
4. S'il n'y a pas de cycles de longueur 3,alors $a \leq 2s - 4$.
5. Plus généralement, s'il n'y a pas de cycle de longueur inférieur à r,alors :
$$a \leq \frac{r}{r-2}(n-2)$$
6. Montrer que cela donne des conditions nécessaires de planarité, mais ne permet pas de montrer la planarité.

2 Coloriage

Le nombre de couleur maximal pour colorier les sommets d'un graphe planaire est 4. Ce théorème est connu comme l'un des premiers ou la preuve nécessite un ordinateur pour explorer l'explosion combinatoire des différents cas de base.

Théorème 3

Tout graphe planaire est coloriable avec 4 *couleurs, son nombre chromatique est donc inférieur ou égal à 4.*

Nous allons montrer qu'un graphe planaire est 5 coloriable.

Exercice 7 - Graphe planaire coloriable avec 5 couleurs.

1. Prouver que si G est un graphe simple et planaire, ayant un nombre fini de sommets, alors G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5.
2. Montrer par récurrence sur le nombre de sommets que pour un graphe simple planaire G on a $\chi(G) \leq 6$.
3. En analysant plus finement le passage de la récurrence, montrer que l'on peut avoir $\chi(G) \leq 5$.

3 Application à la géométrie

Exercice 8 - Ballon de football. Un ballon de football est fabriqué en cousant ensemble des pièces de cuir. Traditionnellement, il s'agit de pentagones et d'hexagones. Montrer que c'est impossible en n'utilisant que des hexagones (si l'on exclut l'assemblage de deux hexagones identiques l'un sur l'autre).

Exercice 9 - Polyèdres combinatoirement réguliers. Un polyèdre est la donnée d'un ensemble de polygones, les faces, et d'une façon de recoller dans l'espace les faces le long de leurs bords. Un polyèdre est combinatoirement régulier si le graphe formé par les sommets et les arêtes est un graphe connexe planaire, dont tous les sommets sont de même degré, et dont toutes les faces sont également de même degré. (Les degrés des sommets peuvent être différents des degrés des faces.) Par exemple, un parallélépipède rectangle, bien que non régulier, est combinatoirement régulier (son graphe est le même que celui d'un cube).
Montrer qu'un polyèdre convexe combinatoirement régulier dont les sommets sont de degré supérieur à 3 a obligatoirement des faces de degré inférieur à 5, et qu'il est combinatoirement équivalent à un des solides de Platon.

4 Croisements

Soit G un graphe simple. Le **nombre de croisement**, noté $\mathrm{Cr}(G)$ est le nombre minium de croisement nécessaire pour dessiner G dans le plan. Par exemple $\mathrm{Cr}(K_5) = 1$ et $\mathrm{Cr}(K_{3,3}) = 1$. Cela permet de mesurer le défaut de planarité.

Proposition 4

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, on a :

$$Cr(G) \geq |E| - 3|V| \qquad \textit{et} \qquad Cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2}$$

Exercice 10. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple, le *nombre de croisement*, noté $\mathrm{Cr}(G)$, est le nombre minimal de croisement nécessaire pour dessiner G dans le plan.

1. Montrer que $\mathrm{Cr}(K_5) = 1$ et $\mathrm{Cr}(K_{3,3}) = 1$.
2. Montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes que $\mathrm{Cr}(G) \geq |A| - 3|S|$.
3. Soit $G = (S, A)$ un graphe, on note $|S| = s$ et $|A| = a$. Soit $p \in [0, 1]$. On choisit de manière indépendante des sommet avec une probabilité p pour constitué un ensemble $S' \subset S$. On note X la variable aléatoire du nombre de croisement du graphe induit par S'. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de sommet et Z la variable aléatoire correspondant au nombre d'arêtes.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(Y) = ps$, $\mathbb{E}(Z) = p^2 a$ et $\mathbb{E}(X) \leq p^4 \mathrm{Cr}(G)$
   (b) Montrer que pour tout p non a :
   $$\mathrm{Cr}(G) \geq \frac{a}{p^2} - \frac{3s}{p^3}.$$
   (c) En déduire l'inégalité suivante :
   $$\mathrm{Cr}(G) \geq \frac{a^3}{64s^2}.$$

Exercice 11. Dans un pays, 11 villes sont reliées deux à deux directement soit par une autoroute soit par une ligne de chemin de fer (qui fonctionnent dans les deux sens). Prouver qu'il existe forcément un pont sur lequel soit une autoroute passe au-dessus d'une autre, soit une voie de chemin de fer passe au-dessus d'une autre.

Planarité (Solutions)

Correction 4

Correction 5 D'après la formule d'Euler, on a $s + f \geq a + 2$. Puisque G est simple, chacune de ses faces utilise au moins 3 arêtes. Réciproquement, chaque arête intervient sur deux faces. Ainsi, on a $3f \leq 2a$. En, reportant dans la relation d'Euler, il vient $2 + a \leq s + f \leq s + \frac{2}{3}a$. Et ainsi : $a \leq 3s - 6$. Le graphe K_5 est un graphe connexe à $s = 5$ sommets et $a = 10$ arêtes. Comme $10 > 3 \times 5 - 6$, il ne vérifie pas l'inégalité précédente et ne peut donc pas être planaire.

Correction 7

1. Il suffit de travailler sur une composante connexe. On note $s_1, \ldots, s_n$ les sommets de G. Soit a le nombre d'arêtes de G. Par l'absurde : Supposons que, pour tout i, on ait $d(s_i) \geq 6$. Alors $2a = \sum_i d(s_i) \geq 6n$ et donc $3n \leq a$. Puisque G est planaire, on sait que $a \leq 3n - 6$. Cela conduit à $a \leq a - 6$, ce qui est clairement absurde. La conclusion en découle.
2. On prouve le résultat par récurrence sur le nombre n de sommets. Pour $n = 1$, la conclusion est évidente (comme pour $n = 6$ d'ailleurs).

   Soit $n \geq 1$ fixé. On suppose que la conclusion est établie pour tout graphe simple planaire n'ayant pas plus de n sommets. Soit alors un graphe simple planaire G de $n + 1$ sommets. G possède un sommet de degré au plus égal à 5. Soit s un tel sommet, et G' le graphe induit en supprimant s et les arêtes correspondantes. D'après l'hypothèse de récurrence, chaque composante connexe de G' est 6-colorable (bien sûr, on utilise les mêmes couleurs pour chaque composante). Comme s n'est pas adjacent à plus de 5 sommets, quelles que soient les colorations choisies sur chaque composante, il restera toujours au moins une couleur disponible pour être attribuée à s, et construire ainsi une 6-coloration de G.
3. Soit G un graphe planaire simple à n sommets. On va montrer par récurrence sur le nombre de sommets que $\chi(G) \leq 5$

   On a clairement $\chi(G) \leq 5$ pour $n \leq 5$.

   On suppose le propriété vrai pour tout graphe avec au plus n sommet et montrons que la propriété est vrai pour un graphe planaire simple G à $n + 1$ sommets. On sait que G admet un sommet s de degré au plus 5. Si on supprime ce sommet, on obtient un graphe G' planaire simple à n sommets qui est donc 5-coloriable par hypothèse de récurrence. On note s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 les sommets reliés à s.

   Si ces sommets sont coloriés seulement avec 4 couleur, il suffit de colorier s avec la couleur restante pour obtenir un 5-coloriage $c : S \setminus \{s\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Supposons que s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 sont répartis circulairement autour de s avec des couleurs c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 distinctes. Considérons le sous graphe induit G_2 de G' dont les sommets sont coloriés par les couleurs c_1 et c_3. Deux cas sont possibles :

   — s_1 et s_3 font partis de deux composantes connexe dans G_2. Dans la composante connexe de s_3, on peut inverser les couleurs c_1 et c_3, on obtient encore un coloriage de G' dans lequel s_1 et s_3 sont coloriés avec la couleur c_1. Il suffit donc de colorier s en c_3 pour obtenir un 5-coloriage de G.

   — s_1 et s_3 font partis de de la même composante connexe dans G_2. Dans G', on a donc un chemin allant de s_1 à s_3 dont les sommets sont coloriés alternativement avec les couleurs c_1 et c_3. Si on supprime ce chemin dans G', par planarité s_2 et s_4 sont dans deux composantes connexes distinctes. Dans la composante correspondant au sommet s_4, on peut inverser les couleurs c_2 et c_4, on obtient un coloriage valide de G' où s_2 et s_4 sont coloriés en c_4. On eut donc colorier s en c_2 pour obtenir un 5-coloriage de G.

Correction 8

Correction 9 Considérons le graphe formé par un polyèdre régulier. On note s le nombre de sommet et a le nombre d'arrêtes. On note d le nombre d'arête à chaque sommet et k le nombre d'arête autour d'une face. Par la projection stéréographique, le graphe peut être projeté sur le plan et la représentation est planaire. Soit f le nombre de face de représentation planaire. En appliquant la formule d'Euler, on a $f - a + s = 2$. Or $ds = 2a$ et $kf = 2a$. On en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{2a}{k} - a + \frac{2a}{d} = 2 \text{ d'où } a = \frac{2kd}{4-(d-2)(k-2)}$$

Ainsi

$$s = \frac{4k}{4-(d-2)(k-2)} \text{ et } f = \frac{4d}{4-(d-2)(k-2)}$$

Comme $4-(d-2)(k-2) \geq 0$, le couple (k, d) peut prendre les valeurs suivantes :
- $(3,3)$ cela correspond au tétraèdre,
- $(4,3)$ cela correspond au cube,
- $(3,4)$ cela correspond à l'octaèdre,
- $(5,3)$ cela correspond au dodécaèdre,
- $(3,5)$ cela correspond à l'icosaèdre.

Correction 10
1. K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaire donc $\mathrm{Cr}(K_5) \geq 1$ et $\mathrm{Cr}(K_{3,3}) \geq 1$. On remarque qu'on peut enlever une arête à K_5 et $K_{3,3}$ et le dessiner dans le plan. Ainsi $\mathrm{Cr}(K_5) = 1$ et $\mathrm{Cr}(K_{3,3}) = 1$.
2. On prouve le résultat par récurrence sur le nombre d'arêtes. Pour $|E| \leq 4$ on a $\mathrm{Cr}(G) = 0$. Pour prouver l'hérédité, pour $e \in E$, on fait $\mathrm{Cr}(G) \geq \mathrm{Cr}(G-e) + 1 \geq (|E|-1) - 3|V| + 1 = |E| - 3|V|$.
3. On choisit aléatoirement de manière indépendante avec une probabilité $p < 1$ un ensemble $V' \subset V$. On considère H le sous-graphe induit par S et X la variable aléatoire qui compte le nombre de croisement de H_p, S la variable aléatoire qui compte le nombre de sommets de H_p et A la variable aléatoire qui compte le nombre d'arêtes. On a $X \geq A - 3S$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}(X - A + 3S) \\ &\leq \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(A) + 3\mathbb{E}(S)) \end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}(S) = ps$, $\mathbb{E}(A) = p^2 a$ et $\mathbb{E}(X) \leq p^4 \mathrm{Cr}(G)$ car un croisement reste présent dans la représentation planaire si les quatre sommets impliqué sont présent dans H_p. On a donc

$$0 \leq p^4 \mathrm{Cr}(G) - p^2 a - 3ps$$

et ainsi

$$\mathrm{Cr}(G) \geq \frac{a}{p^2} - \frac{3s}{p^3}$$

En prenant $p = \frac{4s}{a}$ on obtient $\mathrm{Cr}(G) \geq \frac{a^3}{64s^2}$.

Correction 11 Par l'absurde : Supposons qu'il n'existe pas une qui autoroute passe au-dessus d'une autre, ni une voie de chemin de fer qui passe au-dessus d'une autre. Il y a 11 villes reliées deux à deux, d'où 55 liaisons de deux natures (train ou route). D'après le principe des tiroirs, il existe donc au moins 28 liaisons d'une même nature. Par symétrie des rôles, on peut supposer qu'il y a au moins 28 autoroutes. Considérons alors le graphe simple G dont les sommets sont les villes et les arêtes sont les routes. De notre hypothèse on déduit que G est planaire. On a vu qu'il alors devait vérifier la relation $a \leq 3s - 6$. Or, ici $3s - 6 = 27 < 28 \leq a$. Contradiction.