Université Paul Sabatier

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

Présentée par : Bertrand Monthubert

Sujet : Contribution de la Géométrie Non-Commutative à la théorie de l'indice sur les variétés singulières

Date de soutenance : 2 décembre 2005

Jury :	Alain Connes	*Professeur au Collège de France*
	André Legrand	*Professeur à l'université P. Sabatier*
	Eric Leichtnam	*Directeur de Recherche au CNRS, Rapporteur*
	Ryszard Nest	*Professeur à l'Université de Copenhague, Rapporteur*
	Tien Zung N'Guyen	*Professeur à l'université P. Sabatier*
	Jean Renault	*Professeur à l'université d'Orléans, Rapporteur*
	Georges Skandalis	*Professeur à l'université Paris 7-Denis Diderot*

Table des matières

Tout dans la
nature se modèle
sur la sphère, le cône
et le cy- lindre, il
faut ap- prendre
à peindre
sur ces figures
simples, on pourra en-
suite faire tout ce
qu'on voudra.

Paul Cézanne,
Lettre à Emile Bernard, 1904

Curriculum Vitae

Bertrand Monthubert
Université Paul Sabatier
UFR MIG
118 route de Narbonne
F-31062 Toulouse cedex 4
Tél : [+33] 5 61 25 06 11

Email : `bertrand.monthubert@math.ups-tlse.fr`

Formation

1994-1997	Thèse de Mathematiques. Université Paris 7, directeur : G. Skandalis *Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins* ▷ *Jury : A. Connes, P. Gerardin, E. Leichtnam, R. Melrose (rapporteur), V. Nistor (rapporteur), M. Pimsner, J. Renault, G. Skandalis.*
1995-1996	PhD student. University of Pennsylvania, directeur : M. Pimsner
1991-1995	Elève de l'Ecole Normale Supérieure. Paris

Activités d'enseignement et de recherche

1998-	Maître de conférences. Université Paul Sabatier, Toulouse
1996-1998	Allocataire-Moniteur-Normalien. Université de Marne-la-Vallée
1995-1996	Teaching Assistant. University of Pennsylvania, USA
Domaines d'intérêt	Algèbres d'opérateurs, groupoïdes, calcul pseudo-différentiel, variétés singulières, théorie de l'indice, théorie de Kasparov.
Travaux de recherche	Voir le chapitre 2.
Enseignements dispensés	Cours et TD au niveau Licence.
Organisation	– Membre du comité d'organisation du Congrès Franco-Canadien de Mathématiques, Toulouse Juillet 2004 – Organisateur du séminaire Méditerranéen d'Algèbre et Topologie, Toulouse, Mars 2002 – Membre du comité d'organisation du colloque "Algebraic K-theory and Homotopy Theory of Schemes", Toulouse Juillet 2000
Contributions diverses	– Responsable de l'enseignement de Mathématiques 1er semestre L1 depuis 2005 – Membre du Conseil de l'UFR MIG depuis 2003 – Membre de la commission de spécialistes de la 25^{e} section depuis 2000 – Membre du Conseil d'Administration de l'Institut Henri Poincaré depuis 2002 – Membre du Conseil d'Administration de la Société Mathématique de France, 2000-2004 – Membre du Comité d'Initiative et de Propositions des Etats-Généraux de la Recherche, 2004 – Chargé de mission auprès du Directeur de la Recherche, Ministère de la Recherche, 1999-2002

CHAPITRE 1

Synthèse des travaux

A. Contexte scientifique

La physique quantique, en faisant de la notion d'opérateur le centre de son développement mathématique, a engendré de nombreux problèmes d'indices.
Dans sa forme la plus simple, l'indice d'un opérateur est un nombre. C'est la différence entre la dimension de l'espace des solutions de l'équation associée à cet opérateur, et les restrictions qu'elle impose à l'espace des images de cet opérateur :

$$ind(P) = \dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P$$

Ceci n'a de sens que si les dimensions en question sont finies, auquel cas l'opérateur est dit de Fredholm.
De nombreuses quantités des mathématiques, de la physique et de la chimie s'identifient à l'indice d'un opérateur. Ainsi le nombre d'électrons occupant un certain niveau d'énergie correspond à l'indice d'un certain opérateur ; le nombre de solutions de l'équation de Dirac est également fortement lié à l'indice de l'opérateur de Dirac.
La théorie de l'indice est un lieu de rencontre de plusieurs branches des mathématiques, en analyse, topologie et géométrie. Un des résultats les plus marquants est le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, qui donne une formule topologique pour l'indice de nombreux opérateurs, et a eu un impact remarquable sur de nombreux domaines mathématiques (topologie, géométrie, équations aux dérivées partielles), ainsi qu'en physique théorique. Ce théorème s'inscrit dans le cadre des variétés compactes, sans bord. Pour celles-ci, un opérateur est de Fredholm si et seulement si il est elliptique, c'est-à-dire que son symbole est inversible. Le problème de son extension aux variétés "singulières" a été étudié par de nombreux chercheurs depuis les années 70, à la suite du travail d'Atiyah, Patodi et Singer ([**2**]) pour le cas des variétés à bord. Ce problème est fondamental pour les applications car il apparaît dans de nombreux domaines par le biais d'équations aux dérivées partielles sur des variétés non-compactes. Une des difficultés techniques réside dans

le fait qu'un opérateur elliptique n'est plus nécessairement de Fredholm. Cela ouvre la voie à des développements importants en analyse fonctionnelle, K-théorie, géométrie non-commutative.
Parmi les variétés singulières que nous examinerons, on trouve tout particulièrement les variétés à coins, les domaines polyhédraux.
Les approches ont généralement été profondément analytiques, centrées sur l'étude du calcul pseudo-différentiel, avec des auteurs comme Richard Melrose pour le cas des variétés à coins, Boutet de Monvel, Schulze pour les variétés à singularités coniques. Toutefois elles n'ont pas permis d'établir pour le moment un théorème de l'indice aussi satisfaisant que celui d'Atiyah-Patodi-Singer.
L'introduction de la géométrie non-commutative par Alain Connes, dans les années 80, a fourni de nouveaux outils pour l'étude de ces problèmes à travers une approche géométrique ([**8**]). En étudiant des espaces "pathologiques" qui apparaissent comme des modèles dans certaines parties de la physique théorique, tel l'espace des feuilles d'un feuilletage, A. Connes a montré comment définir une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels adaptée au problème, comment généraliser l'indice analytique ainsi que la notion d'opérateur régularisant. Dans le cas lisse, un opérateur régularisant, *i.e.* un opérateur de symbole nul, est compact ; dans le cas d'un feuilletage si le symbole est nul l'opérateur vit dans une C^*-algèbre caractérisée par Connes comme la C^*-algèbre du "graphe du feuilletage", plus précisément le groupoïde d'holonomie du feuilletage (voir [**7**]). Avec Georges Skandalis, il a démontré une formule de l'indice pour les feuilletages où la structure de groupoïde est présente ([**9**]). Ce fut la première apparition dans le contexte de l'analyse globale des objets définis et étudiés par C. Ehresmann et J. Pradines, les groupoïdes et algébroïdes de Lie ([**34**]). Cette théorie a été insérée dans celle des algèbres d'opérateurs grâce à la forte contribution de Jean Renault, qui a explicité le cadre des C^*-algèbres de groupoïdes ([**36, 31**] par exemple).
Dans [**8**], A. Connes a également donné une preuve très élégante et profonde du théorème de l'indice (sur les variétés sans bord) à l'aide de déformations par quantification de groupoïdes, utilisant ainsi pleinement la géométrie non-commutative. Il a identifié le rôle central que jouent les groupoïdes dans la théorie de l'indice ; cette nouvelle approche a ouvert des perspectives d'étude des problèmes d'indice pour les variétés singulières, et également d'extension de leur domaine d'application.

B. Résumé des travaux

Nous avons étudié, dans nos travaux, jusqu'où cette nouvelle approche peut conduire, en quoi elle apporte une contribution intéressante, et comment l'appliquer sur des exemples précis.
Ainsi, un premier objectif a été d'étendre les constructions de Connes, réalisées essentiellement pour les feuilletages, à des cas plus généraux. Le problème était de parvenir à définir des outils indépendants des cas particuliers d'applications. Ainsi, alors qu'en analyse globale chaque calcul pseudo-différentiel est défini dans le contexte d'un type donné de variétés, nous souhaitions pouvoir définir une fois pour toutes le calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde afin de ne plus avoir qu'à définir le groupoïde adapté au type de variété considéré (voir la section C.1, et [**30, 26, 27, 25, 28**]). Notons que nos premiers travaux ont été faits parallèlement et indépendamment de ceux de V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu ([**32**]). Cela a ouvert la voie à une collaboration avec V. Nistor.
Nous avons essayé de trouver le cadre le plus général de groupoïdes adaptés aux variétés singulières ; les *continuous family groupoids* (qui sont des généralisations du groupoïde d'un feuilletage $\mathcal{C}^{\infty,0}$) semblent de bons candidats(voir la section C.2). Ce travail a été fait dans [**15, 14**]. Nous avons obtenu des résultats généraux comme la définition de l'indice analytique, la suite exacte d'Atiyah-Singer généralisée, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit de Fredholm (voir la section C.4) ou encore des résultats d'invariance spectrale (voir C.5). Parallèlement, nous avons construit dans [**30, 26, 28**] des groupoïdes adaptés au cas des variétés à coins. Celles-ci apparaissent tout naturellement dans des problèmes d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Elles peuvent être traitées sous l'angle d'Atiyah-Patodi-Singer (b-calcul, cusp-calcul...) ou de celui de Boutet de Monvel. Nous avons pu retrouver des calculs pseudo-différentiels connus, comme le b-calcul (voir la section D.2), et nous avons montré dans [**25, 28**] qu'il était dès lors possible de les étendre à des classes plus grandes de variétés (section D.3. Ce contexte plus général a des atouts car il conduit à considérer un indice analytique à valeurs dans un groupe de K-théorie qui ne dépend que de la codimension de la variété, groupe que nous avons identifié dans [**16**] (voir section D.4 Dans le cas du calcul de Boutet de Monvel, nous avons commencé à montrer qu'il peut s'intégrer dans notre cadre [**1**], voir la section D.7.
Un autre enjeu était de mieux comprendre l'indice topologique, et de l'étendre au cas des variétés à coins, ce que nous avons fait dans [**29**] (section D.5).

Dans ce résumé de nos travaux nous avons choisi de présenter d'abord les outils généraux que nous avons construits, comme le calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde ou l'indice analytique, puis les applications aux variétés à coins. Cette répartition ne suit donc pas la chronologie.

C. Outils non-commutatifs de l'analyse globale

C.1. Calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes

Afin de comprendre le rôle que jouent les groupoïdes dans le calcul pseudo-différentiel, considérons un exemple simple.
Soit X une variété lisse, compacte. Soit $G = X \times X$, et $\kappa \in C_c^\infty(G)$. Alors on peut définir un opérateur $P : L^2(X) \to L^2(X)$ par

$$Pf(x) = \int_X \kappa(x,y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Ici κ est le noyau de Schwartz de P.
Deux opérateurs ainsi définis peuvent être composés, en considérent la convolution de leurs noyaux de Schwartz. On peut étendre cela en supposant que κ n'est plus une fonction mais une distribution vérifiant certaines conditions, et L. Hörmander a montré comment définir les opérateurs pseudo-differentiels sur une variété lisse compacte de cette manière, en caractérisant leurs noyaux de Schwartz qui sont des distributions sur $X \times X$, lisses en dehors de la diagonale.
A. Connes a montré que dans ce cas le groupoïde pertinent est justement $X \times X$. Rappelons qu'un groupoïde est une petite catégorie dont tous les morphismes sont inversibles, c'est donc la donnée de deux ensembles, G et $G^{(0)}$ (l'espace des unités), et d'applications source et but, $s, r : G \to G^{(0)}$. Deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ sont composables si et seulement si $r(\gamma_2) = s(\gamma_1)$. Dans le cas qui nous intéresse, on a :

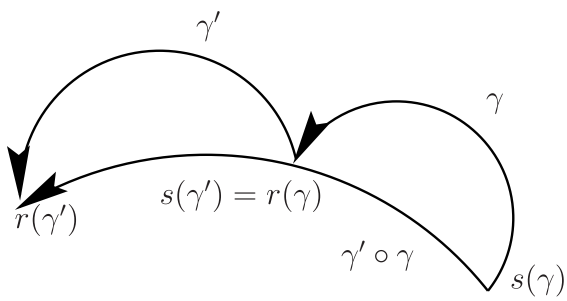

Fig. 1. Composition dans un groupoïde

$$G = X \times X, G^{(0)} = X, r(x,y) = x, s(x,y) = y,$$

$$(x,y) \circ (y,z) = (x,z), (x,y)^{-1} = (y,x).$$

C'est donc tout à fait adapté à la convolution des fonctions.
La notion de groupoïde de Lie, introduite par C. Ehresmann, ajoute à la définition précédente des conditions de différentiabilité des objets concernés : G et $G^{(0)}$ doivent être des variétés lisses, les applications source et but, ainsi que d'autres applications naturelles doivent être de classe C^∞.
On peut donc définir, un peu artificiellement, l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur X à travers les distributions sur le groupoïde $G = X \times X$, lisses en dehors de la "diagonale" de G, *i.e.* l'espace des unités $G^{(0)} = X$. En réalité, nous avons montré dans [**25**] que cette définition peut s'étendre à n'importe quel groupoïde de Lie.
Une autre définition de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde de Lie, et qui s'inspire fortement de celle de Connes dans le cadre des feuilletages, consiste à considérer des familles d'opérateurs sur les fibres du groupoïde. Si $x \in G^{(0)}$, notons $G_x = s^{-1}(x)$ la s-fibre de X. Comme G est un groupoïde de Lie, G_x est une variété lisse, on peut donc considérer un opérateur pseudo-différentiel P_x sur chaque fibre. Naturellement, le groupoïde G agit sur les fibres, ce qui induit un opérateur

$$\begin{array}{rl} U_g: & C^\infty(G_{s(g)}) \to C^\infty(G_{r(g)}) \\ & (U_g f)(g') = f(g'g) \end{array}$$

Définition 1.
Un opérateur pseudo-différentiel sur G est une famille lisse d'opérateurs pseudo-différentiels sur les s-fibres, équivariante par rapport à l'action de G.

Cette définition fut obtenue en collaboration avec F. Pierrot dans [**30**]. Parallèlement et indépendamment, V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu ont établi une définition analogue dans [**32**].
Les opérateurs pseudo-différentiels forment une algèbre (de convolution) en imposant des conditions de support, par exemple que leurs noyaux de Schwartz soient à support compact. L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 est une sous-algèbre de l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(G)$, il est donc possible d'en prendre la clôture normique, pour obtenir une C^*-algèbre notée $\overline{\Psi^0}(G)$[1].

[1] Les groupoïdes que nous considérerons seront toujours moyennables, nous ne ferons donc pas de distinction entre les C^*-algèbres max et min.

C.2. Des groupoïdes adaptés aux variétés singulières

Le problème des groupoïdes de Lie, c'est qu'ils ne conviennent pas pour des variétés singulières, par définition. Une première possiblité, est d'élargir cette notion pour l'adapter au cas de certaines variétés singulières particulières. C'est ce que nous avons fait dans [**25, 26, 28**], en considérant en lieu et place des groupoïdes de Lie des groupoïdes longitudinalement lisses, *i.e.* des groupoïdes dont les fibres sont lisses, et l'espace des unités est une variété à coins. Ce dont nous avons en effet besoin est que les fibres soient lisses, afin de pouvoir définir des opérateurs pseudo-différentiels sur les fibres.
Toutefois cette notion n'est pas suffisante, il fallait l'étendre pour qu'elle puisse convenir pour d'autres types de variétés singulières. Les variétés à coins ne forment pas une catégorie intéressante, puisqu'elles ne sont même pas stables par restriction au bord (le bord d'un carré n'est pas une variété à coins...). L'objet du travail avec R. Lauter et V. Nistor ([**15**]) a été en partie de construire les objets et les résultats dans un cadre qui nous semble le plus général pour le contexte singulier, les *continuous family groupoids*, introduits par A. Paterson ([**33**]).
Un continuous family groupoid est essentiellement un groupoïde dont l'espace des unités est un espace topologique, dont les s-fibres et les r-fibres sont des variétés lisses, et tel que le groupoïde est une famille continue de s-fibres ou de r-fibres. Cela généralise le cas du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage $\mathcal{C}^{\infty,0}$ introduit par A. Connes.
Plus précisément, un continuous family groupoid est un groupoïde topologique localement compact G possédant un recouvrement en ouverts Ω tel que :

– chaque carte Ω est homéomorphe à deux ouverts de $\mathbb{R}^k \times G^{(0)}$, $T \times U$ et $T' \times U'$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& T' \times U' \arrow[dl] & & \Omega \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dl, "r"] \arrow[dr, "d"] & & T \times U \arrow[dr] & \\
U' & & r(\Omega) \arrow[ll, "="'] & & d(\Omega) \arrow[rr, "="] & & U
\end{tikzcd}$$

– chaque changement de coordonnées est donné par $(t, u) \mapsto (\phi(t, u), u)$ où ϕ est de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}$, *i.e.* $u \mapsto \phi(., u)$ est une application continue de U vers $\mathcal{C}^\infty(T, T')$.

De plus, la composition et l'inversion doivent être $\mathcal{C}^{\infty,0}$.
Nous avons montré dans [**15**] que l'on peut définir une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels pour tout continuous family groupoid. Par la suite les groupoïdes considérés seront toujours des continuous family groupoids.

C.3. Suite exacte d'Atiyah-Singer, indice analytique et groupoïde tangent

Comme dans le cas classique, un opérateur pseudo-différentiel possède un symbole. Plus précisément, chaque opérateur P_x a un symbole principal dans $C(S^*G_x)$. Or la réunion des espaces tangents des fibres de G est l'algébroïde de Lie de G, $A(G)$, dont le fibré en sphères est noté $S(G)$. Le symbole principal est donc une application

$$\sigma : \overline{\Psi^0}(G) \to C(S^*(G)).$$

Quant au noyau du symbole, il se réduit à $C^*(G)$. On obtient donc une suite exacte que nous appellerons *suite exacte d'Atiyah-Singer* car elle généralise celle obtenue dans le cas d'une variété lisse :

$$0 \to C^*(G) \to \overline{\Psi^0}(G) \to C(S^*(G)) \to 0.$$

Notons que si X est une variété lisse, et $G = X \times X$, alors $C^*(G) = \mathcal{K}$ et $S^*(G) = S^*(X)$.
Cette suite exacte d'Atiyah-Singer permet de définir l'*indice analytique*, $ind_a : K_1(S^*(G)) \to K_0(C^*(G))$. Pour autant, il existe une définition alternative, obtenue sans recourir à l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels stricto sensu, grâce à une généralisation du groupoïde tangent de Connes.
Soit G un groupoïde de Lie, son algébroïde est en fait le normal de l'espace des unités $G^{(0)}$ dans G. Le *groupoïde tangent* de G, noté ${}^TG$, est obtenu en recollant $A(G) \times \{0\}$ à $G \times (0, 1]$, grâce à une exponentielle. Cette construction généralise celle de Connes, elle repose essentiellement sur les travaux de M. Hilsum et G. Skandalis dans [**12**].
L'intérêt de cette construction réside dans la décomposition de $C^*({}^TG)$:

$$0 \to C^*(G \times (0, 1]) \to C^*({}^TG) \xrightarrow{e_0} C_0(A^*(G)).$$

En effet, $K_*(C^*(G \times (0, 1])) = 0$ donc le morphisme de K-théorie $e_{0,*}$ est un isomorphisme, et si on compose son inverse avec $e_{1,*}$ on obtient un morphisme dont on prouve qu'il est égal à l'indice analytique :

$$ind_a = e_{1,*} \circ e_{0,*}^{-1} : K_0(A(G)) \to K_1(C^*(G)). \qquad (1)$$

Remarque. On peut également considérer la restriction de ${}^TG$ à $[0, 1)$,

$$^{ad}G = {}^TG_{G^{(0)} \times [0,1)}.$$

Ce groupoïde est appelé *groupoïde adiabatique*, et permet également de définir l'indice analytique à travers une flèche de bord.

C.4. Ellipticité totale

Comme on le voit, l'indice analytique ainsi défini n'est pas un indice de Fredholm, il ne prend pas ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. L'ellipticité d'un opérateur (le fait que son symbole soit inversible) n'étant pas suffisante pour rendre celui-ci de Fredholm, il faut trouver d'autres conditions.
Le fait que l'ellipticité soit suffisante dans le cas d'une variété sans bord vient du fait que quand $G = X \times X$, la C^*-algèbre de G est l'algèbre des opérateurs compacts. Si X n'est plus lisse, on ne peut plus prendre $X \times X$ car ses fibres ne seraient pas lisses, empêchant ainsi de définir des familles d'opérateurs pseudo-différentiels sur les fibres. Les groupoïdes adaptés seront donc plus complexes. Toutefois, il est légitime de considérer que si on a un groupoïde G sur une variété singulière X, alors la partie régulière U sera un ouvert *saturé* de G (c'est-à-dire stable par l'action de G), et la restriction de G à U, G_U sera simplement le groupoïde des couples $U \times U$. Autrement dit, on suppose qu'un calcul pseudo-différentiel sur une variété singulière se réduit au calcul classique sur la partie régulière de la variété.
Notons $F = X \backslash U$, il existe un morphisme de restriction $In_F : \overline{\Psi^0}(G) \to \overline{\Psi^0}(G_F)$; la restriction de P à F est définie par $In_F(P)$.
Cela conduit au résultat suivant :

Théorème 2 ([**25, 15**]).
Soit G un groupoïde de Lie, X son espace des unités, et U un ouvert saturé de $G^{(0)}$ tel que $G_U = U \times U$. Alors un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 sur G est de Fredholm si et seulement si son symbole est inversible ainsi que sa restriction au complémentaire de U.

Ce résultat, qui donne une condition générale d'"ellipticité totale", a comme corollaire des théorèmes prouvés dans des contextes particuliers, comme le b-calcul par exemple. Dans ce cas, il est prouvé qu'un opérateur est de Fredholm si et seulement si il est elliptique et ses familles indicielles sont inversibles, or ces dernières correspondent précisément à la restriction d'un opérateur au bord.

Remarque.

Ce théorème se démontre grâce à l'introduction des groupoïdes. C'est en fait une conséquence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & C^*(G_U) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & C^*(G) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi^0}(G) \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "In_F"] & C(S^*G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^*(G_F) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi^0}(G_F) \arrow[r] & C_0(S^*G_F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

qui induit la suite exacte :

$$0 \to C^*(G_U) \simeq \mathcal{K} \to \overline{\Psi^0}(G) \to C_0(S^*G) \times_{C_0(S^*G_F)} \overline{\Psi^0}(G_F).$$

Nous avons donc deux types de problèmes d'indice : les problèmes d'indice analytique, à valeurs dans $K_*(C^*(G))$ (qui pourront eux-mêmes être distingués en fonction du groupoïde G, plusieurs choix pouvant être offerts), et les problèmes d'indice de Fredholm, à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

C.5. Invariance spectrale

Toutefois, du point de vue de l'analyse globale il n'est pas satisfaisant de raisonner exclusivement au niveau des C^*-algèbres. Un des problèmes qui se posent est donc de construire des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels contenant les opérateurs dont le noyau de Schwartz est à support compact, mais qui vérifient des propriétés spectrales particulières. On attend en effet d'une telle algèbre qu'elle se comporte correctement vis-à-vis des parametrix. Plus précisément, si un opérateur P est de Fredholm, *i.e.* s'il est inversible modulo l'algèbre des opérateurs compacts, il possède un quasi-inverse, ou parametrix, Q tel que $PQ-Id$ et $QP-Id$ sont compacts. On souhaite naturellement que la parametrix appartienne aussi à l'algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels.
Ce problème est résolu lorsque l'algèbre est *stable par calcul fonctionnel holomorphe*. Cela a pour conséquence, en particulier, que sa K-théorie est la même que celle de sa clôture normique, c'est-à-dire que la K-théorie ne fait pas de différence entre la C^*-algèbre et sa sous-algèbre.
L'article [**14**] est entièrement consacré à ces questions. Nous y explicitons des constructions d'algèbres stables par calcul fonctionnel holomorphe, ou plus précisément nous construisons des sous-algèbres

stables par calcul fonctionnel holomorphe $\mathcal{J} \subset C^*(G)$, et nous montrons que $\mathcal{A} := \Psi^0(G) + \mathcal{J}$ est elle-même stable par calcul fonctionnel holomorphe. Nous donnons différents types de constructions pour $\mathcal{J}$.
La première repose sur l'utilisation de commutateurs, et aboutit à la construction d'une algèbre contenant $\Psi^0(G)$ comme sous-algèbre dense, et telle que ses éléments sont des opérateurs pseudo-différentiels sur G (et pas seulement des limites d'opérateurs pseudo-différentiels).
Une autre construction repose sur une généralisation des espaces de Schwartz de fonctions à décroissance rapide. Il est nécessaire dans ce cas de disposer d'une fonction longueur à croissance polynomiale sur G, et nous prouvons que l'espace de Schwartz sur G relatif à cette fonction longueur est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*(G)$.
Ces techniques sont également appliquées dans le cas des variétés à coins, voir plus loin.

D. Application aux variétés à coins

Nous avons maintenant un ensemble d'outils disponibles pour tout continuous family groupoid. Dès lors, pour étudier l'analyse globale sur une variété singulière, il suffit de construire un groupoïde adapté à ce contexte.
L'analyse globale sur les variétés à coins a été étudiée par R. Melrose et ses collaborateurs ([**21, 22, 24, 17, 20**], dans la lignée du travail d'Atiyah, Patodi et Singer pour les variétés à bord ([**2, 3, 4, 5**]). R. Melrose a développé le b-calcul, et étudié sa structure. Toutefois, sa définition l'a contraint à restreindre quelque peu l'éventail de variétés à coins admissibles pour son calcul, et d'autre part le petit b-calcul n'est pas stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Nous avons montré dans [**25, 28**] comment construire un groupoïde pour le b-calcul dans le cas des variétés à coins, sans restriction, et comment construire une algèbre d'opérateurs stable par calcul fonctionnel holomorphe. Nous avons aussi construit des groupoïdes pour les *cusp calculi* dans [**14**].
Ces constructions permettent de simplifier l'analyse des propriétés de ces algèbres d'opérateurs, en utilisant les outils généraux de la géométrie non-commutative. Elles permettent également d'étudier de nouveaux problèmes d'indice.
Parallèlement, une approche du calcul pseudo-différentiel sur les variétés à bord a été développée par L. Boutet de Monvel, et étudiée par E. Schrohe et B.W. Schulze. Dans un travail en collaboration avec J.

Aastrup, S. T. Melo et E. Schrohe ([**1**]) nous avons montré comment identifier l'algèbre des opérateurs régularisants du calcul de Boutet de Monvel, les Singular Green Operators, à un idéal d'une algèbre de groupoïde (voir la section D.7).

D.1. Les variétés à coins

Rappelons qu'une variété à coins est une variété modelée sur $(\mathbb{R}_+)^n$, qui sera noté $\mathbb{R}_+^n$ par la suite[2]. Chaque point admet un voisinage difféomorphe à $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ où k est la *codimension*, ou *profondeur* de x. L'ensemble des points de même profondeur se décompose en une réunion de composantes connexes appelées faces ouvertes. Les faces fermées sont les clôtures des faces ouvertes.
R. Melrose ajoute une condition supplémentaire pour définir le b-calcul, à savoir que chaque hyperface (face ouverte de codimension 1) de la variété est *plongée* dans la variété, ou de manière équivalente, que chaque hyperface H admette une fonction de définition, à savoir une fonction lisse $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ qui s'annule sur H et seulement sur H, et dont la différentielle soit non-nulle sur H. Nous appellerons variété à coins plongés une telle variété. Voici plusieurs exemples de variétés à coins :
Ici la goutte à un coin n'est pas une variété à coins plongés, car sa seule hyperface se recoupe. En revanche la goutte à deux coins est bien une variété à coins plongés. Le tore carré avec torsion de $\pi/4$ n'est pas non plus une variété à coins plongés, il possède une seule hyperface. En revanche le tore carré avec torsion de $\pi/2$ est une variété à coins plongés, qui a deux hyperfaces.

D.2. Le groupoïde d'une variété à coins plongés

Nous avons montré dans [**25, 26**] qu'on peut définir un groupoïde dont le calcul pseudo-différentiel correspond essentiellement au b-calcul. Dans le cas d'une variété à coins plongés X munie d'une famille $(\rho_1, \ldots, \rho_N)$ de fonctions de définition des faces, une définition non-canonique mais simple de ce groupoïde est la suivante :

Définition 3.
Soit X une variété à coins plongés. Soit

$$\tilde{\Gamma}(X) := \{(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in X \times X \times {\mathbb{R}_+^*}^N,\ \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y),\ \textit{pour tout } i\}.$$

[2] Contrairement à une notation parfois utilisée pour laquelle $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ est un demi-espace. Par ailleurs $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$.

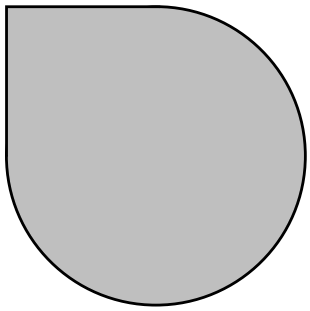

FIG. 2. La goutte à un coin

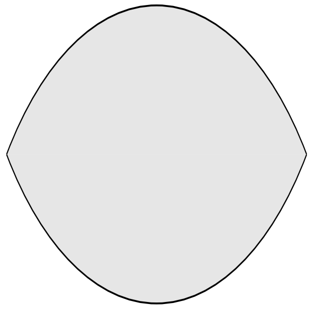

FIG. 3. La goutte à deux coins

FIG. 4. Le tore carré avec torsion de $\pi/4$

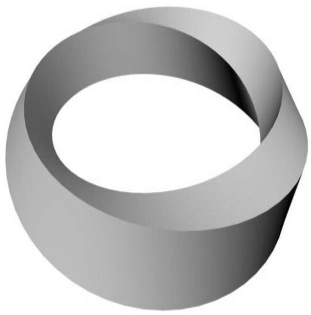

FIG. 5. Le tore carré avec torsion de $\pi/2$

Alors le groupoïde du b-calcul, noté $\Gamma(X)$*, est la composante s-connexe de* $\tilde{\Gamma}(X)^3$.

Notons qu'il est possible de donner une définition canonique de ce groupoïde : $\Gamma(X)$ est l'ensemble des triplets (x, y, α) où x et y sont dans une même face ouverte F et α est un isomorphisme entre le normal en y de F dans X, N_yF, et N_xF. Notons pour faire le lien avec la définition non-canonique qu'une fonction de définition induit une trivialisation de N_yF et N_xF, qui sont isomorphes à $\mathbb{R}_+^k$ où k est la codimension de F ; l'isomorphisme α se réduit alors à un élément de ${\mathbb{R}_+^*}^k$. Voir [**26**] pour la définition complète.
On a alors le résultat :

Théorème 4.
L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur $\Gamma(X)$ *dont le noyau*

[3]la composante s-connexe est le plus grand ouvert contenant X

de Schwartz est à support compact est égale au b-calcul proprement supporté.

Comme nous l'avons déjà dit, le b-calcul n'est pas stable par calcul fonctionnel holomorphe. Nous avons étudié ses opérateurs régularisants, et leurs conditions de décroissance. Cela nous a conduit à définir dans [**25**] une fonction longueur sur le groupoïde $\Gamma(X)$, induisant ainsi un espace de Schwartz un peu plus gros que l'algèbre des régularisants du b-calcul, mais stable par calcul fonctionnel holomorphe ([**14**]). Nous avons pu caractériser l'obstruction pour le b-calcul à être stable par calcul fonctionnel holomorphe par le fait que ses régularisants sont à décroissance exponentielle, et non polynomiale comme ceux de l'espace de Schwartz.

Dans la même famille de calculs pseudo-différentiels on trouve le *cusp calculus*, et plus généralement les c_n*-calculi*, introduits par R. Melrose et ses collaborateurs (voir [**17, 23**] par exemple). Dans [**14**], nous avons construit des groupoïdes pour ces calculs. Pour simplifier considérons une variété à bord munie d'une fonction de définition ρ, et le groupoïde

$$\Gamma_n(X) \simeq \{(u,v,\mu) \in X \times X \times \mathbb{R} \mid \mu\rho(u)^{n-1}\rho(v)^{n-1} = \rho(u)^{n-1} - \rho(v)^{n-1}\}$$

(où $n \geq 2$).Ce groupoïde induit le c_n-calcul. Il est homéomorphe à $\mathcal{G}(X)$, mais ne lui est pas difféomorphe. Cela implique que les calculs pseudo-différentiels soient différents, mais pour autant lorsqu'on considère la clôture normique on obtient des C^*-algèbres isomorphes.
Dans ce contexte de c_n-calcul, nous avons défini des algèbres stables par calcul fonctionnel holomorphe, par exemple en considérant une fonction longueur induisant un espace de Schwartz, mais nous avons également montré comment construire des algèbres stables par calcul fonctionnel holomorphe pour les cusp-calculi, où les noyaux sont lisses (ce qui n'est pas le cas pour l'espace de Schwartz du b-calcul).

D.3. Le groupoïde d'une variété à coins (non plongés)

Dans le cas d'une variété à coins où les hyperfaces ne sont pas plongées, on ne dispose pas de fonctions de définition des faces et la définition "non-canonique" de $\Gamma(X)$ n'est plus valide. Toutefois, celle qui utilise les isomorphismes peut être adaptée, et on considère alors le groupoïde $\mathcal{G}(X)$ comme ensemble des triplés (x,y,α) où x et y sont de même codimension (ils peuvent être dans des faces différentes), et $\alpha : N_yF_y \overset{\simeq}{\to} N_xF_x$ est n'importe quel isomorphisme.
Dans le cas d'une variété à coins plongés, le groupoïde du b-calcul, $\Gamma(X)$ est la composante s-connexe de $\mathcal{G}(X)$.

Ce groupoïde possède des propriétés intéressantes, bien que sa complexité soit plus grande (notamment, il n'est pas de Hausdorff dès que la variété est de codimension supérieure à 2) :

Théorème 5.
Soient X et X' deux variétés de même codimension maximale. Alors les groupoïdes $\mathcal{G}(X)$ et $\mathcal{G}(Y)$ sont équivalents, donc

$$K_*(C^*(\mathcal{G}(X))) = K_*(C^*(\mathcal{G}(Y))).$$

Ce résultat est satisfaisant, car $K_*(C^*(\mathcal{G}(X)))$ est le réceptacle de l'indice analytique, il dit donc que si l'on considère le groupoïde "universel" $\mathcal{G}$, l'indice analytique prend ses valeurs dans un groupe qui ne dépend que de la codimension de la variété. C'est un résultat familier dans le cas des variétés lisses, où l'indice analytique prend toujours ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

D.4. L'algèbre indicielle d'une variété à coins

Une étape importante dans l'étude de l'indice analytique est de calculer le groupe dans lequel il prend ses valeurs. Deux cas se présentent, suivant que l'on considère le "groupoïde universel" d'une variété à coins, ou le groupoïde du b-calcul.
Nous venons de voir que dans le cas du groupoïde universel le groupe réceptacle de l'indice ne dépend que de la codimension. Avec P.Y. Le Gall nous avons identifié ces groupes dans [**16**]. Ce travail repose sur une identification du rôle joué dans $\mathcal{G}(X)$ par les groupes $\mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique agissant sur $\mathbb{R}^n$ par permutation des coordonnées.
En effet, en considérant la définition de $\mathcal{G}(X)$, un élément est de la forme (x, y, α), avec $\alpha : N_yF_y \xrightarrow{\sim} N_xF_x$ un isomorphisme. Or si y est de profondeur k, on a une trivialisation $N_yF_y \simeq \mathbb{R}^k_+$. Notons que dans le cas d'une variété à coins plongés, on peut obtenir une trivialisation globale du fibré normal d'une face donnée.

Remarque. Ce n'est pas le cas en général, car les hyperfaces locales peuvent se confondre globalement, comme dans le cas de la bouteille de Klein dont la section est une goutte : il s'agit de la variété obtenue en recollant les deux extrêmités d'un cylindre de section carrée, en identifiant les points par symétrie axiale relativement à la diagonale. Plus précisément, c'est $([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$, où l'action de $\mathbb{Z}$ est la réflexion par rapport à une diagonale sur $[0,1] \times [0,1]$, et la translation par 1 sur $\mathbb{R}$: $1 \cdot (a, b, t) = (b, a, t+1)$.

L'isomorphisme α, à travers ces trivialisations locales, s'identifie au produit d'une matrice diagonale à termes strictement positifs, et d'une matrice de permutation, c'est-à-dire à un élément de ${\mathbb{R}_+^*}^k \rtimes \mathfrak{S}_k$.
Nous avons pu mettre en évidence une relation de récurrence :

$$0 \to K_*(C^*(\mathcal{G}_n)) \to K_*(C^*({\mathbb{R}_+^*}^n \rtimes \mathfrak{S}_n)) \to K_{1-*}(C^*(\mathcal{G}_{n-1})) \to 0$$

Dès lors le calcul des groupes de l'algèbre indicielle repose sur celui de $K_*(C^*({\mathbb{R}_+^*}^n \rtimes \mathfrak{S}_n))$. Or ces groupes de K-théorie sont sans torsion, ce qui fut établi par M. Karoubi dans son article motivé par nos travaux, [**13**]. Les groupes de K-théorie peuvent donc être calculés grâce à l'isomorphisme de Chern pour les groupes discrets, en se ramenant au calcul des groupes d'homologie.
Cela nous a conduits au résultat suivant :

Théorème 6.
$K_0(C^*(\mathcal{G}_n))$ est de la forme $\mathbb{Z}^{\ell_n}$ et $K_1(C^*(\mathcal{G}_n))$ est de la forme $\mathbb{Z}^{m_n}$, où ℓ_n et m_n sont des entiers définis par des relations de récurrence.

Ne frustrons pas plus longtemps le lecteur, le 100ème groupe est :

$$K_0(C^*(\mathcal{G}_{100})) = \mathbb{Z}^{115826}, \ K_1(C^*(\mathcal{G}_{100})) = \mathbb{Z}^{115825}.$$

Toutefois on peut aussi considérer un indice analytique à valeurs dans le groupe du groupoïde du b-calcul. Comme $\Gamma(X)$ est un sous-groupoïde ouvert de $\mathcal{G}(X)$, on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & K_*(C^*(\mathcal{G}(X))) \\
K^*(A^*(G)) \arrow[ur, "ind_a"] \arrow[dr, "ind_a"'] & \\
 & K_*(C^*(\Gamma(X))) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Il est donc pertinent de connaître l'indice analytique à valeurs dans $K_*(C^*(\Gamma(X)))$.

D.5. Théorème de l'indice topologique pour les variétés à coins plongés

Dans le cas des variétés à coins plongés, nous avons établi un théorème permettant de généraliser le théorème de l'indice topologique d'Atiyah-Singer. Ce résultat permet notamment de calculer plus facilement les algèbres indicielles du b-calcul.

Rappelons que le théorème de l'indice topologique d'Atiyah-Singer repose sur le fait qu'on peut plonger toute variété lisse M dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et si l'on note ι ce plongement il existe une application $\iota_! : K^0(T^*M) \to K^0(T^*\mathbb{R}^n)$ dite application de Gysin. On peut alors définir l'indice topologique comme la composée $ind_a^{\mathbb{R}^n} \circ \iota_! : K^0(T^*M) \to \mathbb{Z}$ (où $ind_a^{\mathbb{R}^n}$ est en fait un isomorphisme). Le théorème d'indice topologique donne l'égalité de l'indice analytique et de l'indice topologique. Il peut être utile de représenter ce résultat à travers le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \\
K^0(T^*M) \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^M"] \arrow[r, "\iota_!"] & K^0(T^*\mathbb{R}^n). \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^{\mathbb{R}^n}"']
\end{tikzcd}$$

Le théorème de l'indice indique que ce diagramme est commutatif.
Une question naturelle est la suivante : dans le cas d'une variété à coins plongés M, comment généraliser ce résultat ?
Plus précisément, on souhaite prouver que si on dispose d'un plongement de variétés à coins plongés $\iota : M \hookrightarrow X$, il existe aussi un diagramme commutatif comme le précédent :

$$\begin{tikzcd}
K_*(C^*(\Gamma(M))) \arrow[r] & K_*(C^*(\Gamma(X))) \\
K^0(A^*_M) \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^M"] \arrow[r, "\iota_!"] & K^0(A^*_X), \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^X"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Au-delà de la commutativité du diagramme, on souhaite construire une variété à coins plongés X telle que
– M se plonge dedans,
– les algèbres indicielles $K_*(C^*(\Gamma(M)))$ et $K_*(C^*(\Gamma(X)))$ soient isomorphes,
– l'indice analytique de X soit un isomorphisme.
En effet, cela signifiera que l'indice analytique de M repose en fait sur l'application $\iota_!$, qui est topologique. On appelle une variété à coins X satisfaisant ces propriétés un *espace classifiant* de M.

Nous avons montré dans [**29**] que le diagramme commute, et comment construire de telles variétés. On peut donner des conditions suffisantes pour la variété X afin qu'elle satisfasse les conditions ci-dessus :
– les faces de M doivent être les traces sur M des faces de X,
– les faces doivent être en bijection,
– enfin les faces ouvertes de X doivent être des espaces euclidiens.
Les deux premières conditions conduisent au fait que les groupoïdes $\Gamma(M)$ et $\Gamma(X)$ sont équivalents, ce qui implique que leurs C^*-algèbres sont Morita équivalentes, et *in fine* leurs algèbres indicielles sont isomorphes.

Par ailleurs, le fait que les faces ouvertes soient des espaces euclidiens conduit à ce que l'indice analytique de X soit un isomorphisme.

La commutativité du diagramme pose des difficultés a priori, car les flèches horizontales du diagramme ne sont a priori pas de même nature. Pour assurer la commutativité, nous avons donc évité de raisonner séparément sur ces applications, et cela a été rendu possible grâce au groupoïde tangent, qui permet de définir l'indice analytique (voir l'égalité (1) page 15).
Plus précisément, comme dans le théorème d'Atiyah-Singer, nous décomposons le plongement ι en considérant un voisinage tubulaire U de M dans X. Nous avons alors à considérer un diagramme relatif à une fibration $U \to M$, et un second relatif à l'inclusion $U \to X$. Cette technique a aussi été utilisée dans le cas des groupoïdes étales par M. Hilsum et G. Skandalis dans [**12**].
Le second diagramme est naturellement commutatif, mais pour le premier il faut utiliser une double déformation, c'est-à-dire une déformation du groupoïde tangent de U[4]. Voici comment définir schématiquement cette double déformation : $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2 \sqcup \mathcal{G}_3$ où

$$\mathcal{G}_1 := A_U \times \{0\} \times [0,1], \quad \mathcal{G}_2 := A_M \times_M U \times_M U \times (0,1] \times \{0\},$$
$$\mathcal{G}_3 := G(U) \times (0,1] \times (0,1].$$

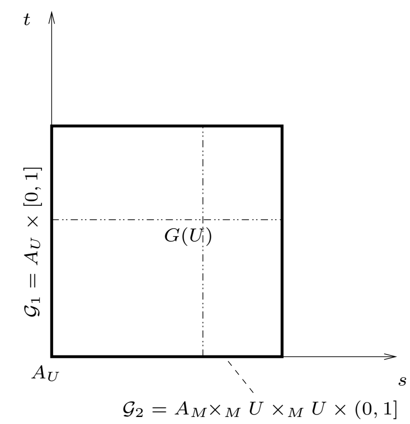

FIG. 6. Le groupoïde $\mathcal{G}$

On peut définir plusieurs applications d'évaluation, en $s = s_0, t = t_0$, et nous prouvons que les applications induites en K-théorie $e_{1,0}$ et $e_{0,0}$ sont des isomorphismes. Dès lors, il est possible de considérer ind_a^U comme la composée $e_{1,1} \circ e_{0,0}^{-1}$ (on peut le visualiser sur la diagonale du carré ci-dessus) , et on peut également décomposer cette application le long des côtés inférieur et droit du carré (en $t = 0$ et $s = 1$). *Modulo* une

[4]qui est lui-même une déformation

équivalence de Morita, cela fournit les applications de Gysin et l'indice analytique de M, et la commutativité est directe.

Remarque. Bien que cela ne soit pas traité dans [**29**], notons qu'il est possible de généraliser le théorème qui assure la commutativité du diagramme au cas des continuous family groupoids tels que $G(U) = G(M) \times_{M\times M} (U \times U)$.

En ce qui concerne l'existence d'une variété à coins plongés vérifiant les conditions énoncées précédemment, nous en proposons une construction. Celle-ci repose sur un plongement φ de M dans un espace $\mathbb{R}^n$ et sur la donnée de fonctions de définition des faces $\rho_1, \ldots, \rho_p$. Le plongement est un raffinement de celui obtenu en considérant $\varphi \times \prod_{i=1..n} \rho_i$.

D.6. L'indice de Fredholm pour les variétés à coins plongés

Nous avons évoqué jusque-là l'indice analytique pour les variétés à coins, qui n'est pas un indice de Fredholm car les opérateurs régularisants ne sont pas compacts. Comme nous l'avons vu dans le théorème 2 page 16, un opérateur d'ordre 0 est totalement elliptique s'il est elliptique et sa restriciton au bord, appelée *opérateur indiciel* dans le cadre du b-calcul, est inversible. Dans ce cas, il est possible de considérer l'indice de Fredholm grâce à un groupoïde, comme dans la proposition 3 de [**15**].
Nous allons en donner une version légèrement différente, reposant sur le groupoïde tangent plutôt que sur le groupoïde adiabatique, puis montrer comme le théorème d'indice topologique se traduit dans ce cadre. Soit G un continuous family groupoid, et ${}^TG = A(G) \cup G \times (0, 1]$ son groupoïde tangent. On suppose, comme dans le théorème 2, qu'il existe un ouvert saturé U de $G^{(0)}$ tel que $G_U = U \times U$; soit F le complémentaire de U. Donc

$$ {}^TG = A(G) \cup G_F \times (0, 1] \cup U \times U \times (0, 1]. $$

Considérons le sous-groupoïde ouvert

$$ G' = A(G) \cup G_F \times (0, 1) \cup U \times U \times (0, 1] $$

(on a enlevé $G_F \times \{1\}$). Notons $G_1 = A(G) \cup G_F \times (0, 1)$.
Alors $U \times U \times (0, 1]$ est un sous-groupoïde ouvert de G', dont la K-théorie est nulle, donc il y a un isomorphisme $\alpha : K_*(C^*(G_1)) \to K_*(C^*(G'))$. Si on le compose avec l'évaluation en 1, on obtient une application notée ind_f :

$$ ind_f = e_1 \circ \alpha : K_*(C^*(G_1)) \to K_*(C^*(U \times U)) = \mathbb{Z}. $$

Notons ρ l'application d'évaluation sur $A(G)$: $\rho : C^*(G_1) \to C^*(A(G))$. Dans [**15**] nous avons montré qu'on peut associer à tout opérateur différentiel de Fredholm P une classe canonique $[P] \in K_0(C^*(G_1))$

telle que $\rho_*([P]) = [\sigma(P)]$, et $ind_f([P])$ est l'indice de Fredholm de P. L'application ind_f est donc cruciale pour l'indice de Fredholm.

Remarque. On peut améliorer ce résultat (pour les variétés à bord pour le moment) en utilisant les travaux de C. Debord et J.M. Lescure ([**10**]). En effet, le groupoïde G_1 est KK-équivalent à leur "espace tangent" ([**10**], remarque 4). Un opérateur pseudo-différentiel totalement elliptique induit alors un élément de la K-homologie de la variété à singularités côniques associée. Or la K-dualité indique que cette K-homologie est isomorphe à la K-théorie de $C^*(G_1)$. On obtient donc une classe $[P] \in K_0(C^*(G_1))$ comme auparavant.

Pour calculer ind_f, on peut utiliser une variante du théorème de l'indice topologique. En effet, celui-ci repose sur une déformation du groupoïde tangent, qui si on la restreint au sous-groupoïde G_1 induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{Z} \\ K_0(C^*(G_1(M)))) \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^M"] \arrow[rr, "\beta"] & & K_0(C^*(G_1(X))). \arrow[u, "\mathrm{ind}_a^X"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

Dans le cas où X est un espace classifiant de M, l'indice analytique de X est un isomorphisme, donc le groupoïde adiabatique de X, ${}^{ad}G(X) = A(G) \cup G \times (0,1)$ a une K-théorie nulle. Comme

$$G_1 = {}^{ad}G(X) \cup U \times U \times \{1\},$$

l'évaluation en 1 induit un isomorphisme en K-théorie. Donc l'application ind_f^X est un isomorphisme, et on a le théorème :

Théorème 7.
Soit M une variété à coins plongés, et X un espace classifiant de M. Alors $ind_f^M = ind_f^X \circ \beta$, où ind_f^X est un isomorphisme.

Ce résultat sera développé dans un autre article.

D.7. Calcul de Boutet de Monvel et groupoïdes

Dans le cadre des variétés à bord, un autre type de calcul pseudo-différentiel a été développé par L. Boutet de Monvel ([**6**]). Ce calcul est adapté aux problèmes de valeurs au bord. Pour simplifier la question, considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $\partial\Omega$ son bord. Un problème de valeurs au bord classique est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}$$

L. Boutet de Monvel a développé un calcul pseudo-différentiel adapté à ce type de problèmes. Ce calcul lui permet d'expliciter des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur soit de Fredholm (ellipticité totale), et impose des conditions au bord particulières pour qu'un opérateur dans l'intérieur de la variété appartienne au calcul : la propriété de transmission.
Un opérateur de Boutet de Monvel sur une variété X de bord Y est une matrice

$$\begin{pmatrix} P_+ + G & K \\ T & S \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(X) \\ \oplus \\ C^\infty(Y) \end{array}, \tag{4}$$

où P est un opérateur pseudo-différentiel sur X avec la propriété de transmission, S est un opérateur pseudo-différentiel sur Y, tandis que G, K et T appartiennent à des classes d'opérateurs qu'il a définis et nommés, respectivement, *Singular Green Operators* (opérateurs de Green singuliers), de Poisson et trace. Pour des présentations détaillées, voir [**11, 35, 37**].
Les opérateurs de symbole nul du calcul de Boutet de Monvel sont les *Singular Green Operators*, leur algèbre est notée $\mathcal{G}$, c'est un idéal de l'algèbre $\mathcal{A}$ des opérateurs de Boutet de Monvel. Dans [**18, 19**]), S.T. Melo, R. Nest et E. Schrohe ont calculé les groupes de K-théorie impliqués dans le calcul de Boutet de Monvel. La collaboration avec S.T. Melo nous a conduits à exposer leurs résultats sous la forme du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^*(\mathring{X} \times \mathring{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi^0}(\mathring{X} \times \mathring{X}) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(S^*(\mathring{X})) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\gamma"] & C(S^*X)/\sim \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(S^*Y) \otimes \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & C(S^*Y) \otimes \tau_0 \oplus C(Y) \arrow[r] \arrow[d] & C(S^*X_{|Y})/\sim \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Notre objectif est de montrer comment définir le calcul de Boutet de Monvel à l'aide de groupoïdes. Une première étape, réalisée dans [**1**], est de définir l'algèbre $\mathcal{G}$ des opérateurs de Green singuliers à travers un groupoïde. Pour ce faire, nous avons utilisé la théorie des extensions.

Soit $G = Y \times Y$ le groupoïde de la variété lisse Y, et ${}^{ad}G$ son groupoïde adiabatique :

$$ {}^{ad}G = TY \cup Y \times Y \times \mathbb{R}_+^*. $$

On peut alors définir une action de $\mathbb{R}_+^*$ sur ${}^{ad}G$: soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \cdot (x, \xi) = (x, \xi/\lambda)$, et $\lambda \cdot (\gamma, t) = (\gamma, \lambda t)$. Cette action permet de définir le produit semi-direct ${}^{ad}G \rtimes \mathbb{R}_+^*$. On a alors la suite exacte

$$ 0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C^*({}^{ad}G) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C_0(T^*Y) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to 0. $$

Considérons alors l'évaluation en 0 $e_0 : C^*({}^{ad}G) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C_0(T^*Y) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ et la restriction sur la section nulle $C_0(T^*Y) \rtimes \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{r_0} C_0(Y) \rtimes \mathbb{R}_+^*$. Soit $\mathcal{J}$ le noyau de $r_0 \circ e_0$: c'est un idéal de $C^*({}^{ad}G) \rtimes \mathbb{R}_+^*$, qui satisfait la suite exacte

$$ 0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{J} \to C_0(T^*Y \backslash Y) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to 0. $$

Or $C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^* \simeq \mathcal{K}$, et $C_0(T^*Y \backslash Y) \rtimes \mathbb{R}_+^* \simeq C_0(S^*Y) \otimes \mathcal{K}$. Par conséquent $\mathcal{J}$ est une extension de $C_0(S^*Y) \otimes \mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$. On peut considérer une extension analogue, $\overline{\Psi^0}(G) \otimes \mathcal{K}$, comme le montre la suite exacte d'Atiyah-Singer.
Or $C_0(S^*G) \otimes \mathcal{K}$ est séparable, et $\mathcal{K}$ est un idéal essentiel de $\overline{\Psi^0}(G) \otimes \mathcal{K}$ et de $\mathcal{J}$, donc pour prouver que ces deux extensions sont unitairement équivalentes il suffit de prouver qu'elles induisent le même élément dans $KK_1(C_0(S^*G) \otimes \mathcal{K}, \mathcal{K})$. C'est le cas car l'élément de KK_1 est en fait l'indice analytique (à tensorisation par $\mathcal{K}$ près). Donc on a le résultat suivant :

Théorème 8.
$\overline{\Psi^0}(G) \otimes \mathcal{K}$ *est isomorphe à* $\mathcal{J}$.

Revenons aux opérateurs de Green singuliers. On peut identifier l'algèbre $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{A}_Y \otimes \mathcal{K}$ (ici $\mathcal{A}_Y$ est l'algèbre "classique" des opérateurs pseudo-différentiels sur Y, c'est donc l'algèbre du groupoïde $G = Y \times Y$, $\overline{\Psi^0}(G)$).
En effet, l'algèbre $\mathcal{G}$ des opérateurs de Green singuliers sur M est isomorphe à celle définie sur un voisinage collier du bord Y (les opérateurs de Green singuliers sont régularisants sur l'intérieur, donc la différence entre deux opérateurs coïncidant sur le collier est un opérateur compact), et nous avons montré dans [**1**] que sur un voisinage collier on peut décomposer l'algèbre des opérateurs de Green singuliers en $\mathcal{A}_Y \otimes \mathcal{K}$.
Comme d'après le théorème précédent $\mathcal{A}_Y \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{J}$, on a donc le théorème :

Théorème 9.
Soit M une variété à bord, et Y son bord. Alors l'algèbre des opérateurs

de Green singuliers $\mathcal{G}$ est isomorphe à l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur Y tensorisée par l'agèbre des opérateurs compacts ; elle est aussi isomorphe à un idéal de $C^*({}^{ad}(Y \times Y) \rtimes \mathbb{R}_+^*)$.

Dans un travail en cours avec S.T. Melo nous étudions comment le groupoïde introduit peut jouer un rôle dans la description de l'algèbre de Boutet de Monvel elle-même.

E. Perspectives de recherche

Notre programme de recherche ouvre sur des perspectives naturelles, déjà partiellement évoquées dans ce qui précède..

E.1. Indice topologique

En ce qui concerne les outils généraux de l'analyse globale, nous souhaitons étudier plus précisément comment l'indice topologique pourrait être défini en toute généralité, et au moins dans un premier temps pour les variétés à coins non-plongés. Dans ce dernier cas, il s'agit d'étendre la construction de l'espace classifiant d'une variété à coins afin qu'elle ne repose plus sur les fonctions de définition des faces.
Par ailleurs, nous avons indiqué dans la remarque page 25 que notre théorème sur la commutativité du diagramme impliqué dans le théorème de l'indice topologique pour les variétés à coins plongés peut être étendu au cas des continuous family groupoids tels que $G(U) = G(M) \times_{M \times M} (U \times U)$. Or cette condition est tout à fait naturelle, puisqu'elle signifie que si l'on a une fibration $p : U \to M$, où les fibres sont lisses, alors le groupoïde de U a les mêmes singularités que celui de M. Cela constitue donc le départ de la définition d'un indice topologiqe général.

E.2. Indice de Fredholm

Par ailleurs, en ce qui concerne les variétés à coins, nous souhaitons approfondir l'étude de l'indice de Fredholm entamée dans ce manuscrit, en lien avec J.M. Lescure et C. Debord, afin de pouvoir formuler en termes de géométrie non-commutative le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer, et surtout l'étendre à des cas plus généraux.

E.3. Equations au dérivées partielles, analyse numérique

V. Nistor a commencé à étudier les applications de nos travaux sur les EDP et l'analyse numérique ([]) et cela ouvre des perspectives d'applications pertinentes et intéressantes.

E.4. Calcul de Boutet de Monvel

Enfin, nous continuons notre collaboration avec S.T. Melo dans le but de caractériser le calcul de Boutet de Monvel à l'aide des groupoïdes. La première étape (celle de la caractérisation des régularisants) ayant été franchie, nous avons de bonnes perspectives pour caractériser complètement l'algèbre de Boutet de Monvel.
Dès lors nous pourrons envisager la généralisation de ce calcul à des classes plus larges de variétés singulières.

Bibliographie

[1] Johannes Aastrup, Severino Melo, Bertrand Monthubert, and Elmar Schrohe. Boutet de Monvel's calculus and groupoids I. preprint.

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. *Bull. London Math. Soc.*, 5 :229–234, 1973.

[3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77 :43–69, 1975.

[4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 78(3) :405–432, 1975.

[5] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 79(1) :71–99, 1976.

[6] Louis Boutet de Monvel. Boundary problems for pseudo-differential operators. *Acta Math.*, 126(1-2) :11–51, 1971.

[7] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, volume 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 521–628. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[8] Alain Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, Inc., 1994.

[9] Alain Connes and Georges Skandalis. The longitudinal index theorem for foliations. *Pub. of Research Institute for Math. Sc.*, 20, N. 6 :1139–1183, 1984.

[10] Claire Debord and Jean-Marie Lecure. K-duality for pseudomanifolds with isolated singularities. *Jour. Func. An.*, 2005.

[11] Gerd Grubb. *Functional calculus of pseudodifferential boundary problems*, volume 65 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1996.

[12] Michel Hilsum and Georges Skandalis. Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4è série, t.20 :325–390, 1987.

[13] Max Karoubi. Equivariant K-theory of real vector spaces and real projective spaces. *Topology Appl.*, 122(3) :531–546, 2002.

[14] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor. Spectral invariance of certain algebras of pseudodifferential operators. To appear in Jour. Inst. Math. Jussieu, preprint available on the xxx archive, math.OA/0112091.

[15] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor. Pseudodifferential analysis on continuous family groupoids. *Doc. Math.*, 5 :625–655 (electronic), 2000.

[16] Pierre-Yves Le Gall and Bertrand Monthubert. K-theory of the indicial algebra of a manifold with corners. *K-Theory*, 23(2) :105–113, 2001.

[17] Rafe Mazzeo and Richard B. Melrose. Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries. *Asian J. Math.*, 2(4) :833–866, 1998. Mikio Sato : a great Japanese mathematician of the twentieth century.

[18] S. T. Melo, R. Nest, and E. Schrohe. C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :145–175, 2003.

[19] Severino T. Melo, Ryszard Nest, and Elmar Schrohe. K-theory of Boutet de Monvel's algebra. In *Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001)*, volume 61 of *Banach Center Publ.*, pages 149–156. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.

[20] R. Melrose and V. Nistor. K-theory of C^*-algebras of b-pseudodifferential operators. *Geom. Funct. Anal.*, 8(1) :88–122, 1998.

[21] Richard B. Melrose. Transformation of boundary problems. *Acta Math.*, 147(3-4) :149–236, 1981.

[22] Richard B. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem.* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.

[23] Richard B. Melrose. Fibrations, compactifications and algebras of pseudodifferential operators. In *Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund, 1995)*, volume 21 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 246–261. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[24] Richard B. Melrose and Paolo Piazza. Analytic K-theory on manifolds with corners. *Adv. Math.*, 92(1) :1–26, 1992.

[25] Bertrand Monthubert. *Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins.* PhD thesis, Université Paris 7, 1998.

[26] Bertrand Monthubert. Pseudodifferential calculus on manifolds with corners and groupoids. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(10) :2871–2881, 1999.

[27] Bertrand Monthubert. Groupoids of manifolds with corners and index theory. In *Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999)*, volume 282 of *Contemp. Math.*, pages 147–157. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[28] Bertrand Monthubert. Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners. *J. Funct. Anal.*, 199(1) :243–286, 2003.

[29] Bertrand Monthubert and Victor Nistor. A topological index theorem for manifolds with corners. available on ArXiv, math.KT/0507601.

[30] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(2) :193–198, 1997.

[31] Paul Muhly, Jean Renault, and Dana Williams. Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 17(1) :3–22, 1987.

[32] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific J. Math.*, 189(1) :117–152, 1999.

[33] Alan L. T. Paterson. Continuous family groupoids. *Homology Homotopy Appl.*, 2 :89–104 (electronic), 2000.

[34] Jean Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263 :A907–A910, 1966.

[35] Stephan Rempel and Bert-Wolfgang Schulze. *Index theory of elliptic boundary problems.* North Oxford Academic Publishing Co. Ltd., London, 1985. Reprint of the 1982 edition.

[36] Jean Renault. *A Groupoid Approach to C^*-Algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980.

[37] Elmar Schrohe. A short introduction to Boutet de Monvel's calculus. In *Approaches to singular analysis (Berlin, 1999)*, volume 125 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 85–116. Birkhäuser, Basel, 2001.

CHAPITRE 2

Liste des travaux et publications

A. Articles et Notes publiés dans des revues à comité de lecture

– Robert Lauter, B.M. et Victor Nistor, *Spectral invariance for certain algebras of pseudodifferential operators*, à paraître dans *J. de l'Inst. Math. Jussieu* **4** (2005), 3ème fascicule, preprint disponible sur http ://arXiv.org/abs/math/0112091
– Robert Lauter, B.M. et Victor Nistor, *Invariance spectrale des algèbres d'opérateurs pseudodifférentiels*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 12, 1095–1099
– B.M., *Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners*, Journal of Functional Analysis 199(2003), 243-286
– Robert Lauter, B.M. et Victor Nistor, *Pseudodifferential analysis on groupoids et singular spaces*, Documenta Mathematica, **5** (2000), 625–655.
– B.M. et Pierre-Yves Le Gall, *K-theory of the indicial algebra of a manifold with corners*, K-theory, **23** (2001), 105–113.
– B.M., *Groupoids of manifolds with corners et index theory*, dans *Groupoids in analysis, geometry, et physics*, Contemporary Math. **282** (2001), 147–157.
– B.M., *Pseudodifferential calculus on manifolds with corners et groupoids*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 10, 2871–2881.
– B.M. et François Pierrot, *Indice analytique et groupoïdes de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 2, 193–198.

B. Prépublications

– J. Aastrup, S.T. Melo, B.M. et E. Schrohe, *Boutet de Monvel's calculus et Groupoids, I : Singular Green Operators*, prépublication

– B.M. et Victor Nistor, *A Topological Index Theorem for manifolds with corners*, prépublication

C. Mémoires

– B.M., *Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins*, thèse de doctorat, Université Paris 7, 1998.
– B.M., *Mémoire de Magistère*, Ecole Normale Supérieure, 1994.
– B.M., *La K-théorie relative, entre les K-théorie topologique et algébrique*, mémoire de DEA, Université Paris 7, 1993.

D. Contributions orales dans des conférences à comité de sélection

– *A topological index theorem on manifolds with corners* : "**Joint Meeting of AMS, DMV, and ÖMG**", Mainz, Germany, June 2005
– *Groupoids and Index Theory in the Singular setting* : "**7th Conference on Geometry and Topology of Manifolds**", Bedlewo, Banach Center, Poland, May 2005
– *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : "**French-Nordic Congress of Mathematicians**", Reykjavik, Iceland, January 2005
– *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : "**First Joint Canada-France meeting of the mathematical sciences**", Toulouse, France, July 2004
– *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : " **Groupes quantiques localement compacts et symétries quantiques**", Marseille, France, June 2004
– *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : "**Second annual spring institute on noncommutative geometry and operator algebras**", Vanderbilt University, USA, May 2004
– *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : "**Workshop on index theory and operator algebras**, University of São Paulo (Brazil), April 2004

- *A Atiyah-Singer type index theorem on manifolds with corners* : "C^*-**algebras and elliptic theory**", Banach Center, Bedlewo(Poland), February 2004
- *Index theory in noncommutative geometry : a groupoids' approach* : "**Shanks lectures, conference on noncommutative geometry**", Vanderbilt University, USA, May 2003
- *Groupoids and Index Theory* : conference "**Ellipticity and Parabolicity in Analysis and Geometry** ", Potsdam, Germany, August 2001 (Organizers : J.B. Gil (Philadelphia), A. Parmeggiani (Bologna), T. Krainer (Potsdam), T. Schick (Münster))
- *Index theory on singular spaces and noncommutative geometry* : conférence "**3rd International ISAAC Congress**", Berlin, Germany, August 2001 (Organizers : R.P. Gilbert (USA), A. Ben-Israel (USA), A. Bourgeat (France), E. Brüning (South Africa), Ju.A. Dubinskii (Russia). . .)
- *K-theory of the indicial algebra of a manifold with corners* : conference "**Geometric analysis**", Potsdam, Allemagne, Octobre 2000 (Organizers : A. Connes, B.W. Schulze, N. Teleman)
- *Groupoids of manifolds with corners and index theory* : conference "**Groupoids in Geometry, Analysis and Physics**", Boulder, USA, June 1999 (Organizers : J. Kaminker, A. Ramsay, J. Renault, A. Weinstein)
- *Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners* : conference "**Operator algebras with symbolic structures on singular manifolds, Index theory, and asymptotics**", Potsdam, Germany, February 1998 (Organizers : B.W. Schulze and E. Schrohe)

CHAPITRE 3

Encadrement, coopération

Depuis 1998 je participe à des réseaux RTN de la Commission Européenne : "Geometric Analysis", puis "Quantum Spaces and Noncommutative Geometry". Cela m'a permis notamment de collaborer avec R. Lauter, et de nouer des contacts réguliers avec R. Nest, E. Schrohe, B.W. Schulze, N. Teleman entre autres.
Par ailleurs depuis 2003 je fais partie d'un accord franco-brésilien CAPES-COFECUB, dont le responsable français est J. Renault, et le responsable brésilien S. T. Melo. C'est ce programme qui nous a permis de réaliser nos travaux communs.
J'ai également été invité à Pennsylvania State University en 2003 par V. Nistor.
En 2004 j'ai participé à l'encadrement d'un étudiant de DEA, Romain Boullet, qui effectua son mémoire sur le thème : "K-théorie algébrique". Cet étudiant souhaitait poursuivre en thèse sous ma direction, malheureusement il n'a pas obtenu d'allocation de recherche.
Parallèlement je participe à l'encadrement d'un doctorant brésilien, David Pires Dias, de l'université de São Paulo, sur le thème " The Chern character for the algebra of pseudodifferential operators on the sphere".
Malgré mon intérêt pour l'encadrement doctoral, la baisse du nombre de doctorants et de financements de thèse ne m'a pas permis d'y contribuer autant que je le souhaitais. J'ai toutefois pu le faire de manière indirecte en étant chargé de mission à la Direction de la Recherche du Ministère de la Recherche pendant 3 ans, où j'étais en charge des dossiers concernant les jeunes chercheurs (incluant les doctorants).