Université Paul Sabatier
L2 Parcours Spécial – Année 2017-2018
Intégration

Révisions sur les suites et séries de fonctions

Exercice 1 : On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{nt^3}{1+nt^2}$.

1) Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) On définit pour tout n la fonction g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g_n(t) = \dfrac{t}{1+nt^2}$. En étudiant les variations de g_n montrer que $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} |g_n(t)| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : On considère les fonctions f_n de $[0;1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^n}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0;1[$. On notera f sa somme.

2) Calculer $\displaystyle\sup_{t\in[0;1[} |f_n(t)|$ (on pourra étudier les variations de la fonction f_n).

Est-ce que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0;1[$?

3) Soit $a \in]0;1[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$. En déduire que f est continue sur $[0;1[$.

4) Montrer que pour tout $a \in]0;1[$, on a $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a f_n(t)dt$.

Exercice 3 : On considère les fonctions f_n de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{t+n}}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$. On notera f sa somme.

2) Pour tout $t \in]0;+\infty[$ on note le reste $\displaystyle R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_n(t)$. Expliquer pourquoi on a $|R_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0;+\infty[$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $]0;+\infty[$.

3) Est-ce que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $]0;+\infty[$?

4) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.