Une classe de schémas pour les équations de Navier-Stokes compressibles préservant l'asymptotique bas Mach

Khaled SALEH

Institut Camille Jordan,
Université Claude Bernard, Lyon I

avec R. Herbin, et J.-C. Latché

Workshop: Schémas numériques pour les écoulements à faible nombre de Mach
Mardi 21 novembre 2017, Toulouse.

Contexte et motivations

Un code CFD "industriel":

- Stabilité des schémas, indépendamment des pas d'espace et de temps.
- Précisison pour les écoulements incompressibles ET compressibles ?

△ **Discrétisation temporelle par algorithme à pas fractionnaire, méthode de correction de pression.**

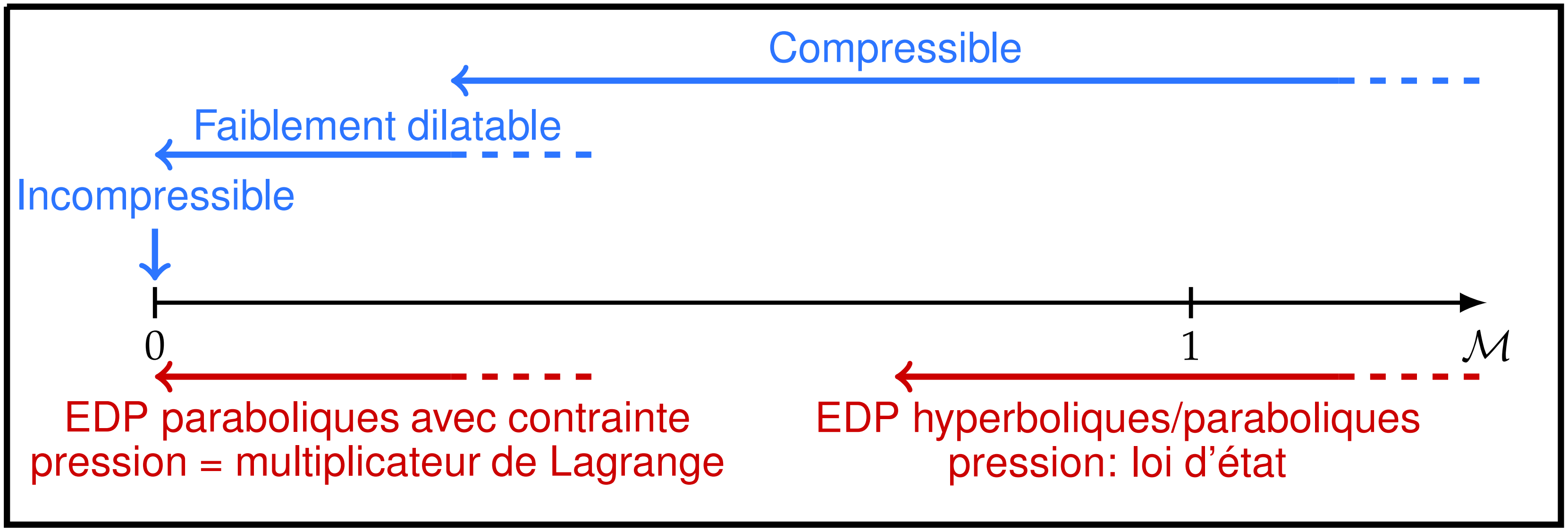
△ **Discrétisation spatiale sur grilles décalées (mais pas forcément structurées).**

Les méthodes décrites ici sont mises en œvre dans le logiciel libre CALIF^{3}S, fondé sur la librairie PELICANS.

Plan de l'exposé

- Schémas colocalisés *v.s.* schémas sur grilles décalées
- Asymptotique bas Mach: le problème continu
- Asymptotique bas Mach pour un schéma sur grilles décalées
- Conclusion et perspectives

Schémas précis à tout nombre de Mach



Difficultés:

- Des méthodes numériques différentes pour des EDP différentes.
- Des contraintes de discrétisation différentes (oscillations de pression, CFL,...).

But: Concevoir des schémas numériques valables à tout nombre de Mach.

Schémas colocalisés pour le compressible

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} p(\rho) = 0.$$

Avantages:

- Deux inconnues $(\rho, \boldsymbol{u})$: il est plus simple de les discrétiser au même endroit.
- Techniques de Volumes Finis classiques (solveurs de Riemann...).
- Inégalités d'energie cinétique et d'entropie discrètes faciles à démontrer.
- Relations de saut au niveau discret: les chocs sont approchés correctement.

Difficultés: ($\varepsilon =$ nombre de Mach)

- Vitesses de propagation : $u - u/\varepsilon$, u, $u + u/\varepsilon$.
- Si schéma explicite $\Longrightarrow$ schéma instable car CFL trop restrictive: $\delta t \leqslant \varepsilon\big(\delta x + \delta x^2/\mu\big)$.
- Perte de précision lorsque le nombre de Mach est petit:

$$\frac{1}{\delta t}\big((\rho \boldsymbol{u})^{n+1} - (\rho \boldsymbol{u})^n\big) + \operatorname{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n \otimes \boldsymbol{u}^n)_{\text{centré}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^n + \underbrace{\boldsymbol{\nabla} p^n}_{\text{gradient centré}} + \underbrace{\frac{\delta x}{\varepsilon} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{u}^n}_{\text{viscosité numérique}} = 0.$$

Schémas sur grilles décalées pour l'incompressible

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,$$

$$\partial_t u + \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mu \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{f}.$$

- Une seule inconnue $\boldsymbol{u}$ et un multiplicateur de Lagrange p associé à la contrainte de divergence nulle.
- Les discrétisations sur grilles décalées permettent d'assurer une version discrète de la propriété *inf-sup* :

Il existe $\beta > 0$ t.q. $\displaystyle \inf_{p \in \mathrm{L}^2_0} \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_0} \frac{\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\|p\|_{\mathrm{L}^2} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1_0}} \geqslant \beta.$

Autrement dit, pour tout $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega p = 0$, il existe $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_0$ tel que :

$$\frac{\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1_0}} \geqslant \beta \|p\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Donc si $\boldsymbol{\nabla} p \in \mathrm{H}^{-1}$ alors $\|p\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \frac{1}{\beta} \|\boldsymbol{\nabla} p\|_{\mathrm{H}^{-1}}$.

Schémas sur grilles décalées pour l'incompressible

Or, au niveau discret, on peut donner un sens précis au calcul suivant:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{f} + \mu \boldsymbol{\Delta u} - \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \frac{1}{\delta t}(u - u^*)$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right| \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^2} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2} + \mu \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1_0} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1_0} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^4} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1_0} + \frac{1}{\delta t}(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{L}^2} + \|\boldsymbol{u}^*\|_{\mathrm{L}^2}) \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right| \leqslant C(\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{f}\|, \frac{1}{\delta t}) \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1_0}.$$

- Si on contrôle $\|\boldsymbol{u}\|$ on peut contôler $\|\boldsymbol{\nabla} p\|_{\mathrm{H}^{-1}}$ et donc $\|p\|_{\mathrm{L}^2}$ grâce à la condition *inf-sup* discrète.
- Les schémas sur grilles décalées sont naturellement stables pour l'incompressible.
- Difficulté: Étendre ces schémas pour simuler des écoulements fortement compressibles.

Schémas précis à tout nombre de Mach

Stratégie usuelle: Stabiliser les méthodes numériques pour les modèles compressibles (souvent colocalisées) dans le régime bas Mach:

- Préconditionnement.
- Solveur de Godunov à flux numériques modifiés.
- Implicitation des termes raides dus à l'acoustique.
- Terme de diffusion dans la conservation de la masse.

Stratégie adoptée: Etendre aux modèles compressibles les méthodes numériques existantes pour les modèles incompressibles.

- Discrétisation spatiale sur grilles décalées

  Condition inf-sup discrète $\Longrightarrow$ stabilité de la pression
- Discrétisation temporelle par méthode de projection adaptée au compressible.
- Discrétisation hybride volumes finis / éléments finis.

Equations de Navier-Stokes compressibles isentropiques

- Deux équations de bilan:

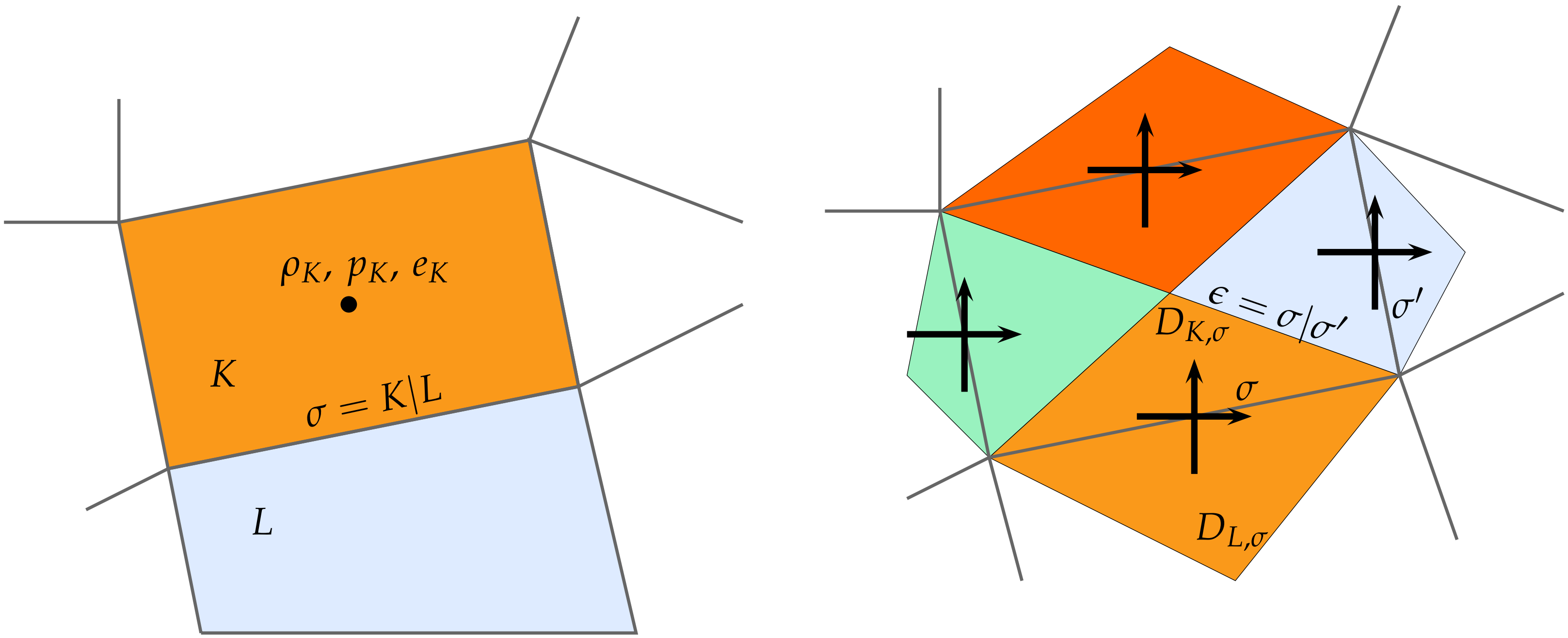
$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} \wp(\rho) = 0.$$

- On impose $\boldsymbol{u} = 0$ sur $\partial\Omega$.

- Les schémas numériques décrits ici s'étendent (plus ou moins facilement) à d'autres modèles:
  - Équations de Navier-Stokes compressibles avec énergie, modèle bas Mach de Majda-Sethian.
  - Équations d'évolution pour des espèces chimiques.
  - Modèle diphasique de Baer-Nunziato.
  - Autres conditions aux limites ...

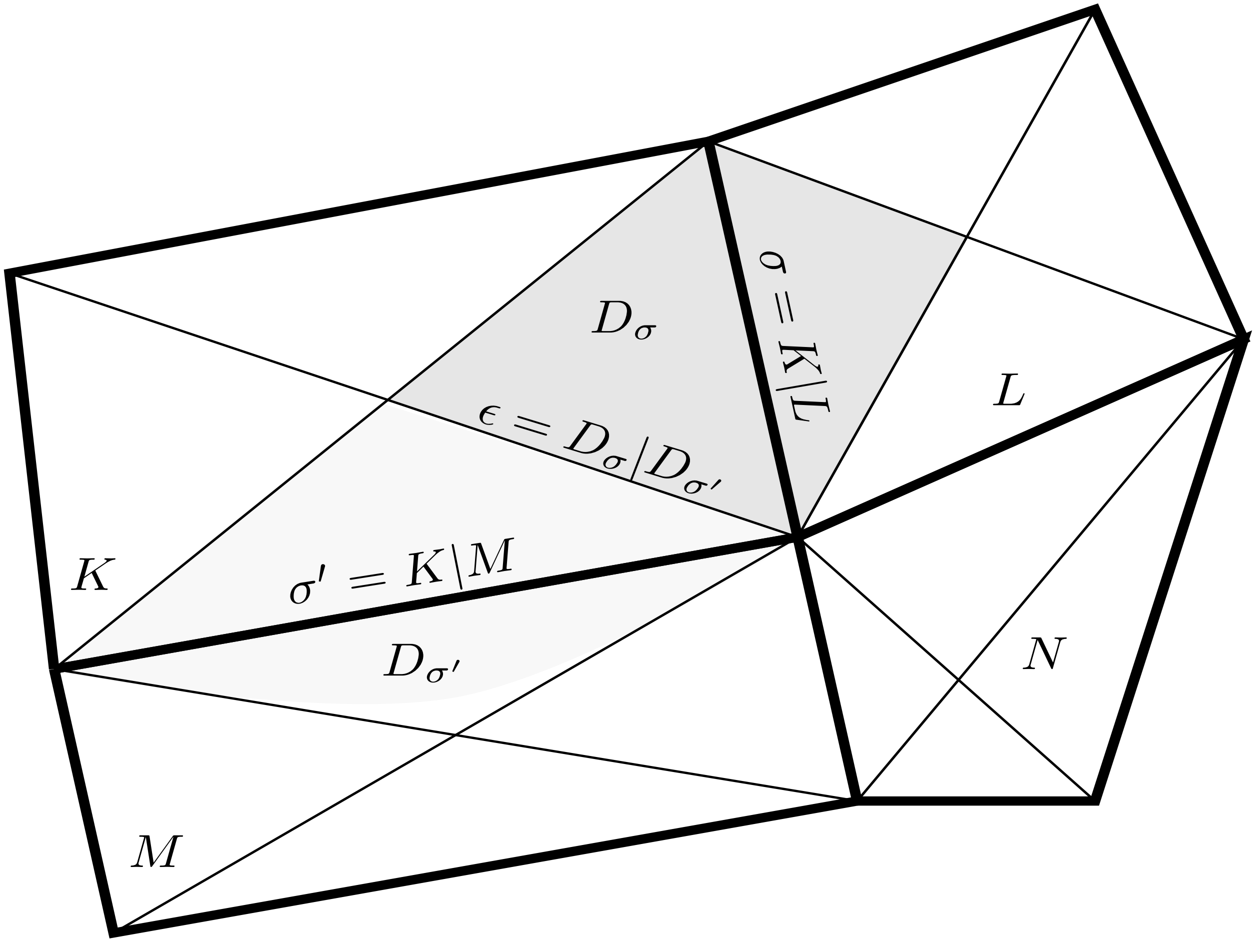
Discrétisation spatiale



- Maillage primal : $\mathcal{M}$ = {ensemble de volumes de contrôle K}. K quadrilatère convexe en 2D, hexaèdre convexe en 3D.
- Variables scalaires aux centrex des cellules du maillage primal: $(\rho_K)_{K\in\mathcal{M}}$, $(p_K)_{K\in\mathcal{M}}$.
- Vitesse aux interfaces : $(\boldsymbol{u}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}$.
- Maillage dual: $\mathcal{D} = (D_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}} =$ {ensemble des mailles duales}.

Discrétisation spatiale

Notations :



Un schéma implicite

- **Conservation de la masse**: (Volumes Finis sur la maillage primal)

$$\frac{1}{\delta t}\left(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n\right)+\operatorname{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})_K=0, \qquad K\in\mathcal{M},$$

avec $\quad \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})_K=\dfrac{1}{|K|}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}F_{K,\sigma} \quad$ et $\quad F_{K,\sigma}=|\sigma|\,\rho_\sigma^{\mathrm{up}}\,\boldsymbol{u}_\sigma\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma},$

$\rho_\sigma^{\mathrm{up}}$: approximation *upwind* de ρ sur les faces σ de K.

- **Quantité de mouvement** : (Hybride VF/ EF sur le maillage dual)

$$\frac{1}{\delta t}\left[\rho_\sigma^{n+1}\,\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}-\rho_\sigma^n\boldsymbol{u}_\sigma^n\right]+\operatorname{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1}\otimes\boldsymbol{u}^{n+1})_\sigma+(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1}+(\boldsymbol{\nabla}p)_\sigma^{n+1}=0, \quad \sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}},$$

avec $\quad \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})_\sigma=\dfrac{1}{|D_\sigma|}\displaystyle\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}\,\boldsymbol{u}_\epsilon,$

$\boldsymbol{u}_\epsilon$ approximation *upwind ou centrée* de $\boldsymbol{u}$ sur les faces ϵ de D_σ.

Asymptotique bas Mach: problème continu

Soit $T \in \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$ un domaine borné.

- Problème adimensionné: sur $\Omega \times (0,T)$:

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}^\varepsilon) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \boldsymbol{\nabla}(\rho^\varepsilon)^\gamma = 0,$$

ε = nombre de Mach, $\mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) = \mu \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{u}^\varepsilon + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon)$.

- On impose $\boldsymbol{u}^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Données initiales « mal préparées »:

$$\|\boldsymbol{u}_0^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\varepsilon} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant C.$$

- Données initiales « bien préparées »:

$$\|\boldsymbol{u}_0^\varepsilon\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^d} + \frac{1}{\varepsilon} \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_0^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant C.$$

Asymptotique bas Mach: problème continu

Soit $T \in \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$ un domaine borné.

- Problème adimensionné: sur $\Omega \times (0,T)$:

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}^\varepsilon) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \boldsymbol{\nabla}(\rho^\varepsilon)^\gamma = 0,$$

Formellement, dans la limite $\varepsilon \to 0$:

- On suppose $\rho^\varepsilon \to \rho$ et $\boldsymbol{u}^\varepsilon \to \boldsymbol{u}$.
- $\boldsymbol{\nabla} \wp(\rho^\varepsilon) \to \boldsymbol{\nabla} \wp(\rho) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho = \rho(t) \quad \overset{\text{CL}}{\Longrightarrow} \quad \rho = cste = 1.$
- A la limite, on obtient *formellement*:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\nabla} p_0 = 0$$

avec $p_0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}((\rho^\varepsilon)^\gamma - 1)$.

Asymptotique bas Mach: problème continu

Pour les solutions faibles :

Principale difficulté : passage à la limite dans le terme non linéaire.

- Lions-Masmoudi ’98: $\Omega = \mathbb{T}^d$.
- Desjardins-Grenier ’99 : $\Omega = \mathbb{R}^d$.
- Desjardins-Grenier-Lions-Masmoudi ’02 : Ω borné et conditions de Dirichlet homogènes.
- Fereisl-Novotny ’09: Navier-Stokes-Fourier avec énergie et lois de pression *ad hoc*.

Pour les solutions fortes :

- Klainerman - Majda.
- Métivier - Schochet.
- Hagstrom-Lorenz.
- Gallagher.
- Danchin.
- Alazard.

Asymptotique bas Mach: problème continu

Estimations a priori:

- Énergie cinétique:

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \qquad \partial_t(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}^\varepsilon) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\boldsymbol{\nabla} p^\varepsilon = 0,$$

$$\hookrightarrow \qquad \partial_t(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2) + \mathrm{div}(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\boldsymbol{u}^\varepsilon) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\boldsymbol{\nabla} p^\varepsilon \cdot \boldsymbol{u}^\varepsilon = 0.$$

- Identité de renormalisation :

$$b'(\rho^\varepsilon)\times \qquad \partial_t\rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0,$$

$$\hookrightarrow \qquad \partial_t b(\rho^\varepsilon) + \mathrm{div}(b(\rho^\varepsilon)\boldsymbol{u}^\varepsilon) + (\rho^\varepsilon b'(\rho^\varepsilon) - b(\rho^\varepsilon))\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^\varepsilon = 0.$$

On choisit b t.q. $sb'(s) - b(s) = s^\gamma$, *i.e.*:

$$b(s) = \begin{cases} s^\gamma/(\gamma-1) & \text{si } \gamma > 1 \\ s\ln s & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Asymptotique bas Mach: problème continu

Estimations a priori:

- Énergie cinétique et "énergie libre Π_γ":

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(f) = 0,$$

$$\hookrightarrow \qquad \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma - 1) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(f) = 0.$$

Asymptotique bas Mach: problème continu

Estimations a priori:

- Énergie cinétique et "énergie libre Π_γ":

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(f) = 0,$$

$$\hookrightarrow \qquad \partial_t(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2) + \frac{1}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\partial_t((\rho^\varepsilon)^\gamma - 1) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(f) = 0.$$

Conservation de la masse :

$$-\frac{\gamma}{(\gamma-1)\varepsilon^2}\times \quad \partial_t(\rho^\varepsilon - 1) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0.$$

On somme:

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2) + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\partial_t(\Pi_\gamma(\rho^\varepsilon)) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(g) = 0.$$

avec

$$\Pi_\gamma(s) = \begin{cases} s^\gamma - 1 - \gamma(s-1) & \text{si } \gamma > 1 \\ s\ln s - (s-1) & \text{si } \gamma = 1. \end{cases} \qquad C_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} & \text{si } \gamma > 1 \\ 1 & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Asymptotique bas Mach: problème continu

Estimations a priori:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\right) + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\partial_t(\Pi_\gamma(\rho^\varepsilon)) - \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{u}^\varepsilon + \mathrm{div}(g) = 0,$$

La fonction Π_γ satisfait:

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma(\rho) \quad &= \wp(\rho) - \wp(1) - \gamma\wp'(1)(\rho-1)\\ &= |\rho-1|^2\,\gamma\int_0^1 (1+s(\rho-1))^{\gamma-2}(1-s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Intégration sur $\Omega\times(0,t)$ + CL:

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\rho^\varepsilon(.,t)|\boldsymbol{u}^\varepsilon(.,t)|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\int_\Omega \Pi_\gamma(\rho^\varepsilon(.,t))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mu\int_0^t\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+ (\lambda+\mu)\int_0^t\int_\Omega(\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\Omega\frac{1}{2}\rho_0^\varepsilon|\boldsymbol{u}_0^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\int_\Omega\Pi_\gamma(\rho_0^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Asymptotique bas Mach: problème continu

Estimations a priori: Quels arguments a-t-on utilisés ?

(i) Énergie cinétique:

$$\boldsymbol{u} \cdot \Big[\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})\Big] \quad \geqslant \quad \partial_t(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2) + \mathrm{div}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}).$$

(ii) Identité de renormalisation : (pour b convexe)

$$b'(\rho) \times \Big[\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})\Big] \quad \geqslant \quad \partial_t b(\rho) + \mathrm{div}(b(\rho)\boldsymbol{u}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho))\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}.$$

(iii) Dualité Gradient-Divergence

$$\boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} + p\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \mathrm{div}(p\boldsymbol{u}).$$

(iv) Conservativité globale:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega \mathrm{div}(\phi \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

(v) Coercivité du terme de diffusion:

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant C \int_\Omega |\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Un schéma implicite

- **Conservation de la masse**: (Volumes Finis sur le maillage primal)

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})_K = 0, \qquad K \in \mathcal{M},$$

avec $\quad \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u})_K = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}$ et $F_{K,\sigma} = |\sigma|\, \rho_\sigma^{\mathrm{up}}\, \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}$,

$\rho_\sigma^{\mathrm{up}}$: approximation *upwind* de ρ sur les faces σ de K.

- **Quantité de mouvement** : (Hybride VF/ EF sur le maillage dual)

$$\frac{1}{\delta t}\left[\rho_\sigma^{n+1}\, \boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^n \boldsymbol{u}_\sigma^n\right] + \mathrm{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^{n+1})_\sigma + (\mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}},$$

avec $\quad \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})_\sigma = \dfrac{1}{|D_\sigma|} \displaystyle\sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}\, \boldsymbol{u}_\epsilon,$

$\boldsymbol{u}_\epsilon$ approximation *upwind ou centrée* de $\boldsymbol{u}$ sur les faces ϵ de D_σ.

Identité de renormalisation discrète

$$\frac{|K|}{\delta t}\,(\rho_K - \rho_K^*) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\; \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\; \rho_\sigma^{\mathrm{up}} = 0.$$

On suppose que :

- Les masses volumiques ρ_K et ρ_K^* sont positives
- la fonction b est convexe
- $\rho_\sigma^{\mathrm{up}}$ est une approximation upwind de ρ sur σ.

Alors : après multiplication par $b'(\rho_K)$ on obtient:

$$\frac{|K|}{\delta t}\,(b(\rho_K) - b(\rho_K^*)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\; \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\; b(\rho_\sigma^{\mathrm{up}})$$

$$+\,(\rho_K b'(\rho_K) + b(\rho_K)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} |\sigma|\; \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} + R_K = 0.$$

avec $R_K \geqslant 0$.

Dualité ∇ − div discrète

Divergence discrète:

$$(\operatorname{div} u)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \, \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}.$$

La dualité $\nabla - \mathrm{div}$ attendue impose que :

$$\text{pour } \sigma = K|L, \qquad (\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (p_L - p_K) \boldsymbol{n}_{K,\sigma}.$$

On obtient, pour toutes données discrètes $(p_K)_{K \in \mathcal{M}}$, $(\boldsymbol{u}_\sigma)_{\sigma \in \sigma}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \, p_K \, (\mathrm{div} \boldsymbol{u})_K &= \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \, p_K \, \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \, \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \\
&= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| \boldsymbol{u}_\sigma (p_L - p_K) \boldsymbol{n}_{K,\sigma} \\
&= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |D_\sigma| \, \boldsymbol{u}_\sigma \cdot (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma.
\end{aligned}$$

Energie cinétique discrète :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \left(\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} . \boldsymbol{u} \right) - \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

Energie cinétique discrète :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \left\{ \rho \left(\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} . \boldsymbol{u} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0. \right\}$$

Energie cinétique discrète :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\nabla} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Energie cinétique discrète :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\nabla} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_t \frac{\rho |\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\nabla} \frac{\rho |\boldsymbol{u}|^2}{2} - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée deux fois.

Energie cinétique discrète :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nabla} p = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \left(\partial_t \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\nabla} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_t \frac{\rho |\boldsymbol{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\nabla} \frac{\rho |\boldsymbol{u}|^2}{2} - \mathrm{div}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

- L'équation de conservation de la masse a été utilisée deux fois.
- Les deux équations ne sont pas discrétisées sur le même maillage !

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0, \qquad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_\sigma \boldsymbol{u}_\sigma - \rho_\sigma^\star \boldsymbol{u}_\sigma^\star) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} \boldsymbol{u}_\epsilon - (\mathrm{div}\boldsymbol{\tau})_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}.$$

Energie cinétique discrète :

Théorème (Herbin, Kheriji, Latché) :

- Supposons un bilan de masse vérifié sur les cellules du maillage dual :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho^\star_\sigma) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

avec $\rho_\sigma > 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$.

- Alors une équation locale d'énergie cinétique discrète est vérifiée sur ce maillage :

$$\frac{1}{2\delta t}\Big(\rho_\sigma\, |\boldsymbol{u}_\sigma|^2 - \rho^\star_\sigma\, |\boldsymbol{u}^\star_\sigma|^2\Big) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \epsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\epsilon}\, \boldsymbol{u}_\sigma \cdot \boldsymbol{u}_{\sigma'} - (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\sigma \cdot \boldsymbol{u}_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma \cdot \boldsymbol{u}_\sigma \leqslant 0.$$

Energie cinétique discrète :

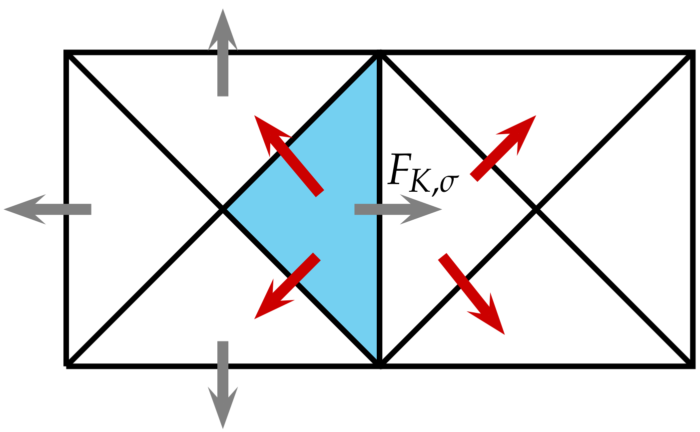
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Energie cinétique discrète :

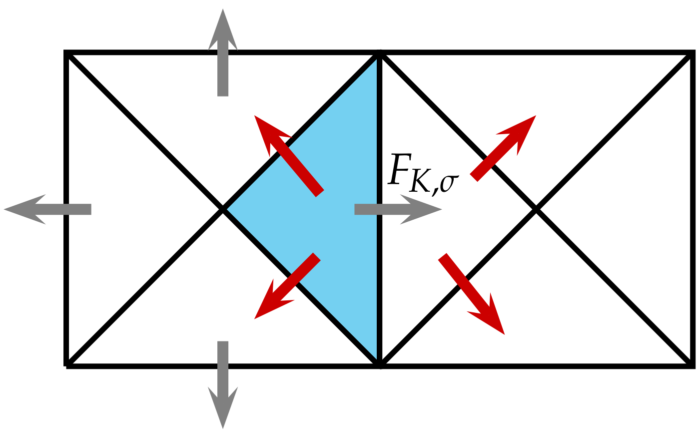
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K:

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} \qquad \text{(relèvement des flux).}$$

On définit alors : $\quad F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

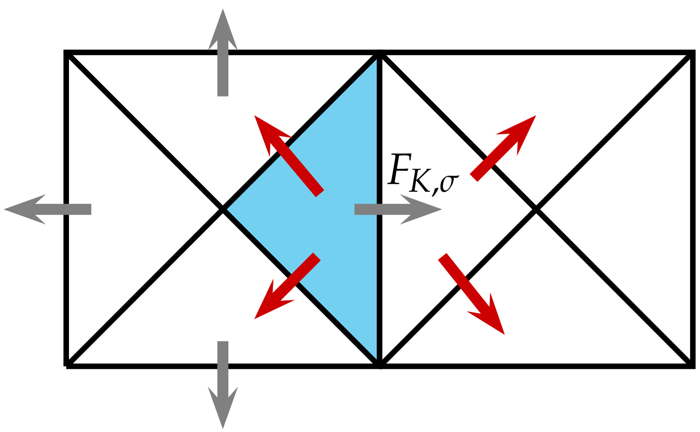
Energie cinétique discrète :

On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$
$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K:

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}$$ (relèvement des flux).

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\partial D_{K,\sigma}} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = \int_{D_{K,\sigma}} \mathrm{div}\boldsymbol{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_K \mathrm{div}\boldsymbol{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \int_{\partial K} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star)$$

Energie cinétique discrète :

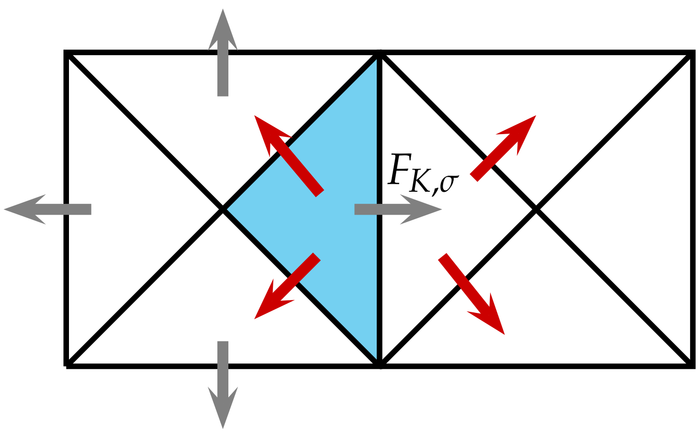
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\mathrm{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K:

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}$$ (relèvement des flux).

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

Energie cinétique discrète :

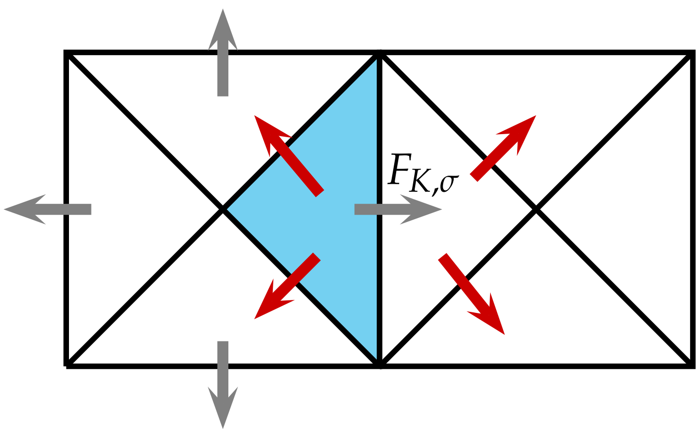
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit w tel que $\mathrm{div} w = cste$ et pour toute face σ de K:

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}$$ (relèvement des flux).

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

$$\frac{|D_{K,\sigma}|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon \subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = 0,$$

et

$$\frac{|D_{L,\sigma}|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + F_{L,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon \subset L}} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

Energie cinétique discrète :

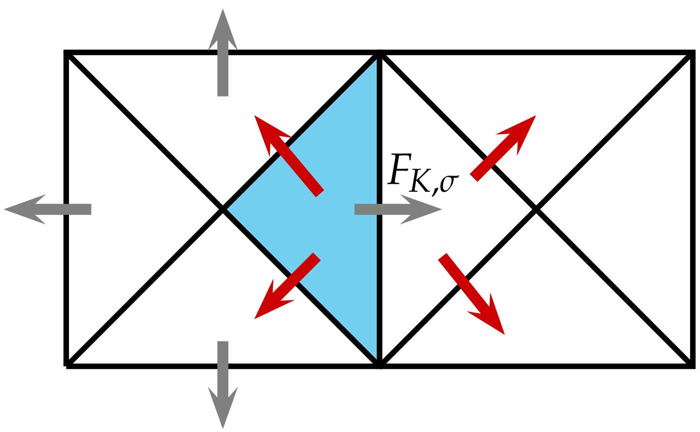
On veut :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_\sigma - \rho_\sigma^\star) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

On a :

$$\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = 0,$$

$$\frac{|L|}{\delta t}(\rho_L - \rho_L^\star) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma} = 0.$$



Soit $\boldsymbol{w}$ tel que $\operatorname{div}\boldsymbol{w} = cste$ et pour toute face σ de K:

$$\int_\sigma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}$$ (relèvement des flux).

On définit alors : $F_{\sigma,\epsilon} = \int_\epsilon \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_{\sigma,\epsilon}$.

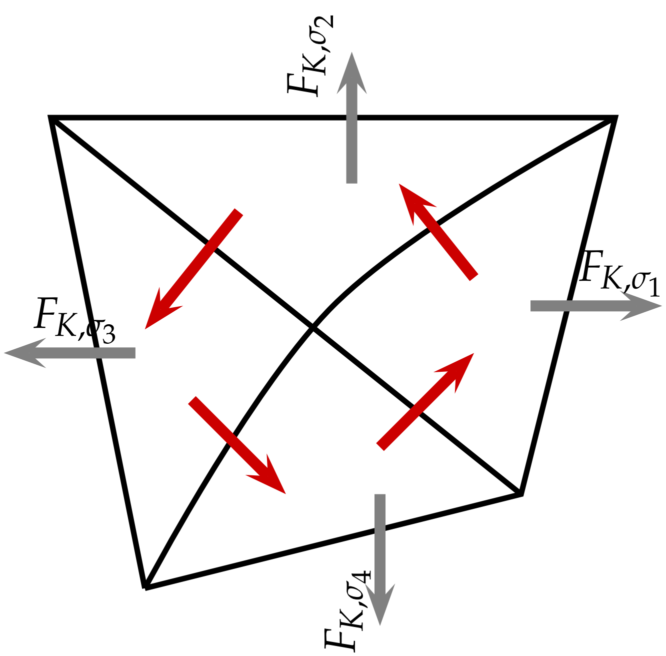
$$\frac{1}{\delta t}\Big(\underbrace{|D_{K,\sigma}|\rho_K + |D_{L,\sigma}|\rho_L}_{=:|D_\sigma|\rho_\sigma} - |D_{K,\sigma}|\rho_K^\star - |D_{L,\sigma}|\rho_L^\star\Big) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon} = 0.$$

Energie cinétique discrète :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon\subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \int_{\partial D_{K,\sigma}} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n} = \int_{D_{K,\sigma}} \mathrm{div}\boldsymbol{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}\int_K \mathrm{div}\boldsymbol{w} = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}\int_{\partial K} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$= \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma} = -\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}\frac{|K|}{\delta t}(\rho_K - \rho_K^\star)$$

avec $\xi_K^\sigma = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}$ indépendant de K et σ.



On résout le système linéaire :

$$F_{K,\sigma} + \sum_{\substack{\epsilon\in\mathcal{E}(D_\sigma)\\ \epsilon\subset K}} F_{\sigma,\epsilon} = \xi_K^\sigma \sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}, \qquad \forall\sigma\in\mathcal{E}(K).$$

Autres propriétés du schéma

- **Coercivité du terme de diffusion :**

  Éléments finis de Rannacher-Turek:

$$-\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |D_\sigma|(\mathrm{div}\boldsymbol{\tau})_\sigma \cdot \boldsymbol{u}_\sigma \geqslant C\|\boldsymbol{u}\|^2_{1,\mathrm{d}}.$$

- **Condition *inf-sup* discrète :** (*via* un opérteur de Fortin)

$$\inf_{p=(p_K)} \sup_{\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u}_\sigma)} \frac{\displaystyle\sum_{K\in\mathcal{M}} |K| p_K\,(\mathrm{div}\boldsymbol{v})_K}{\|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathrm{d}}} \geqslant \beta.$$

Pour tout $p=(p_K)$ tel que $\sum_{K\in\mathcal{M}} |K|p_K = 0$, il existe $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_\sigma)$ tel que $\|\boldsymbol{v}\|_{1,\mathrm{d}} = 1$ et:

$$\sum_{K\in\mathcal{M}} |K| p_K\,(\mathrm{div}\boldsymbol{v})_K \geqslant \beta\|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Asymptotique bas Mach

$$\frac{1}{\delta t}\,(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n)+|K|^{-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}F_{K,\sigma}^{n+1}=0, \qquad\qquad K\in\mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,\Big[\rho_\sigma^{n+1}\,\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}-\rho_\sigma^n\boldsymbol{u}_\sigma^n\Big]+|D_\sigma|^{-1}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)}F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}\boldsymbol{u}_\epsilon^{n+1}+(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1}+\frac{1}{\varepsilon^2}(\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^{n+1}=0, \quad \sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}.$$

Théorème : *On suppose que les conditions initiales sont mal préparées. Alors à maillage fixé, lorsque $\varepsilon\to 0$:*

- $\rho_\varepsilon\to 1$ *comme* ε *en norme* $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^q(\Omega))$ *pour tout* $q\in[1,\min(2,\gamma)]$.
- $\sqrt{\rho^\varepsilon}\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *est borné dans* $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ *et* $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *est borné dans* $\mathrm{L}^2((0,T);\mathrm{H}^1_d(\Omega)^d)$.
- $\|\delta p^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}:=\|\frac{1}{\varepsilon^2}\big(p^\varepsilon-|\Omega|^{-1}\int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\big)\|_{\mathrm{L}^2}\leqslant C/\delta t$.

Asymptotique bas Mach

$$\frac{1}{\delta t}\,(\rho_K^{n+1}-\rho_K^n)+|K|^{-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}^{n+1}=0, \qquad K\in\mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,\Big[\rho_\sigma^{n+1}\,\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}-\rho_\sigma^n\boldsymbol{u}_\sigma^n\Big]+|D_\sigma|^{-1}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}\boldsymbol{u}_\epsilon^{n+1}+(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1}+\frac{1}{\varepsilon^2}(\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^{n+1}=0, \quad \sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}.$$

Théorème : *On suppose que les conditions initiales sont mal préparées. Alors à maillage fixé, lorsque $\varepsilon\to 0$:*

- $\rho_\varepsilon\to 1$ *comme* ε *en norme* $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^q(\Omega))$ *pour tout* $q\in[1,\min(2,\gamma)]$.
- $\sqrt{\rho^\varepsilon}\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *est borné dans* $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ *et* $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ *est borné dans* $\mathrm{L}^2((0,T);\mathrm{H}^1_d(\Omega)^d)$.
- $\|\delta p^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}:=\|\frac{1}{\varepsilon^2}\big(p^\varepsilon-|\Omega|^{-1}\int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\big)\|_{\mathrm{L}^2}\leqslant C/\delta t$.

Pour toute sous-suite de $(\boldsymbol{u}^\varepsilon,\delta p^\varepsilon)$ *qui converge vers* $(\boldsymbol{u},\pi)$ *lorsque* $\varepsilon\to 0$, *alors* $(\boldsymbol{u},\pi)$ *est solution d'un schéma implicite stable pour Navier-Stokes incompressible:*

$$|K|^{-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}(K)}\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}\cdot\boldsymbol{n}_{K,\sigma}=0, \qquad K\in\mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,(\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1}-\boldsymbol{u}_\sigma^n)+|D_\sigma|^{-1}\sum_{\epsilon\in\tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}^{n+1}\boldsymbol{u}_\epsilon^{n+1}+(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1}+(\boldsymbol{\nabla}\pi)_\sigma^{n+1}=0, \quad \sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}.$$

Asymptotique bas Mach

Estimations a priori discrètes :

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}}|D_\sigma|\,\rho_\sigma^n|\boldsymbol{u}_\sigma^n|^2+\sum_{k=1}^n\delta t\|\boldsymbol{u}^k\|_{1,\rm d}^2++\frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\sum_{K\in\mathcal{M}}|K|\,\Pi_\gamma(\rho_K^n)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}}|D_\sigma|\,\rho_\sigma^0|\boldsymbol{u}_\sigma^0|^2+\frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\sum_{K\in\mathcal{M}}|K|\,\Pi_\gamma(\rho_K^0).$$

Par hypothèse sur ρ^0 on a $\frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}\sum_{K\in\mathcal{M}}|K|\,\Pi_\gamma(\rho_K^0)\leqslant C$.

On en déduit que:

- $\rho_\varepsilon\to 1$ comme ε en norme $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^q(\Omega))$ pour tout $q\in[1,\min(2,\gamma)]$.
- $\sqrt{\rho^\varepsilon}\boldsymbol{u}^\varepsilon$ est borné dans $\mathrm{L}^\infty((0,T);\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ et $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ est borné dans $\mathrm{L}^2((0,T);\mathrm{H}^1_d(\Omega)^d)$.
- De l'équation de qdm, on obtient :

$$\|\boldsymbol{\nabla}(\delta p^\varepsilon)\|_{\mathrm{H}^{-1}}\leqslant C/\delta t\quad\text{avec}\quad\delta p^\varepsilon:=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(p^\varepsilon-|\Omega|^{-1}\int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

- Par la condition *inf-sup* discrète, on obtient $\|\delta p^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}\leqslant C/\delta t$.

Asymptotique bas Mach

- Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (maillage fixé $\Rightarrow$ dimension finie): il existe une sous-suite de $(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \delta p^\varepsilon)$ qui converge vers $(\boldsymbol{u}, \pi)$ et en passant à la limite dans le schéma, on obtient:

$$\mathrm{div}\,(u^{n+1})_K = 0, \qquad\qquad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,(\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} - \boldsymbol{u}_\sigma^n) + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^{n+1})_\sigma + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1} + (\boldsymbol{\nabla}\pi)_\sigma^{n+1} = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}.$$

- Si la solution de ce système est unique, c'est toute la suite qui converge.

- Le sous-système suivant est régulier (il existe une solution):

  Trouver $\boldsymbol{u}^{n+1}$ tel que:

$$\boldsymbol{v} \cdot \Big[\frac{1}{\delta t}\,(\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} - \boldsymbol{u}_\sigma^n) + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}^{n+1} \otimes \boldsymbol{u}^{n+1})_\sigma + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau})_\sigma^{n+1}\Big], \quad \forall\, \boldsymbol{v} \text{ t.q. } \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

  On peut donc remplacer la vitesse initiale $\boldsymbol{u}_0$ par sa projection L^2 sur l'espace des fonctions à divergence nulle.

Un schéma de correction de pression

- **Re-scaling du gradient de pression:**

$$(\overline{\boldsymbol{\nabla} p})_\sigma^n = \left(\frac{\rho_\sigma^n}{\rho_\sigma^{n-1}}\right)^{1/2} (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^n, \qquad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}.$$

- **Étape de prédiction :** Résoudre en $\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}$:

$$\frac{1}{\delta t}\left[\rho_\sigma^n\,\tilde{\boldsymbol{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^{n-1}\boldsymbol{u}_\sigma^n\right] + \mathrm{div}(\rho^n \boldsymbol{u}^n \otimes \tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1})_\sigma + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}))_\sigma + (\overline{\boldsymbol{\nabla} p})_\sigma^n = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}},$$

- **Étape de correction**: Résoudre en p^{n+1}, ρ^{n+1} et $\boldsymbol{u}^{n+1}$:

$$\frac{1}{\delta t}\,\rho_\sigma^n\,(\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}_\sigma^{n+1}) + (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^{n+1} - (\overline{\boldsymbol{\nabla} p})_\sigma^n = 0, \quad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})_K = 0, \qquad K \in \mathcal{M},$$

$$p_K^{n+1} = (\rho_K^{n+1})^\gamma, \qquad K \in \mathcal{M}.$$

Stabilité inconditionnelle et asymptotique bas Mach similaire au cas implicite.
Difficulté: établir l'inégalité d'énergie cinétique discrète.

Un schéma aussi explicite que possible

$$\frac{1}{\delta t}\,(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathrm{div}(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})_K = 0, \qquad K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t}\,\Big[\rho_\sigma^n\,\boldsymbol{u}_\sigma^{n+1} - \rho_\sigma^{n-1}\boldsymbol{u}_\sigma^n\Big] + \mathrm{div}(\rho^n\boldsymbol{u}^n \otimes \boldsymbol{u}^n)_\sigma + (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}^n))_\sigma + (\boldsymbol{\nabla} p)_\sigma^{n+1} = 0, \qquad \sigma \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}},$$

$$p_K^{n+1} = (\rho_K^{n+1})^\gamma, \qquad K \in \mathcal{M}.$$

- En combinant les deux équations, on obtient un problème elliptique sur la pression, comme pour le schéma de correction de pression.

  $\hookrightarrow$ schéma potentiellement efficace pour les problèmes faiblement visqueux (LES).

- Difficulté: stabilité avec un opérateur de convection explicite dans la qdm ?

  On peut démontrer l'existence d'une équation d'énergie cinétique discrète avec un terme de reste positif si:
  - La diffusion numérique est suffisante (upwinding)
  - Sous une condition CFL.

Conclusion et perspectives

Conclusion : (comparaison avec les méthodes colocalisées)

- La preuve fonctionne pour $\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ schéma AP pour Euler.
- Stabilisation en temps lorsque $\varepsilon \to 0$:
  - Implicitation de l'acoustique : Liou '98 (AUSM), Degond '11, Chalons '14 (Splitting), Zakerzadeh '15, Dimarco...
  - Méthode de correction de pression: Schémas sur grilles décalées *mais aussi* schémas colocalisés (Thèse de Chady Zaza).
- Correction de la précision lorsque $\varepsilon \to 0$ sur maillage colocalisé: (Dellacherie '10)

$$(\nabla p)_j = \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2\delta x} - \kappa(\varepsilon) \frac{c_j}{2\delta x}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \qquad c_j \approx \frac{u_j}{\varepsilon}.$$

En prenant $\kappa(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, la viscosité numérique est alors en $\mathcal{O}\left(\kappa(\varepsilon)\frac{\delta x}{\varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(\delta x\right)$.

Perspectives :

- Tests numériques.
- Autres limites “incompressibles“ ?
- Schéma asymptotiquement stable vers un schéma pour un modèle de congestion (avec Charlotte Perrin)

Merci de votre attention.