
Modélisation et simulations numériques d'une détente de plasma entre deux électrodes

P. Crispel, P. Degond, C. Parzani, M. H. Vignal

Laboratoire **MIP**, CNRS et Université P. Sabatier

Soutenu par **CEA, CNES**

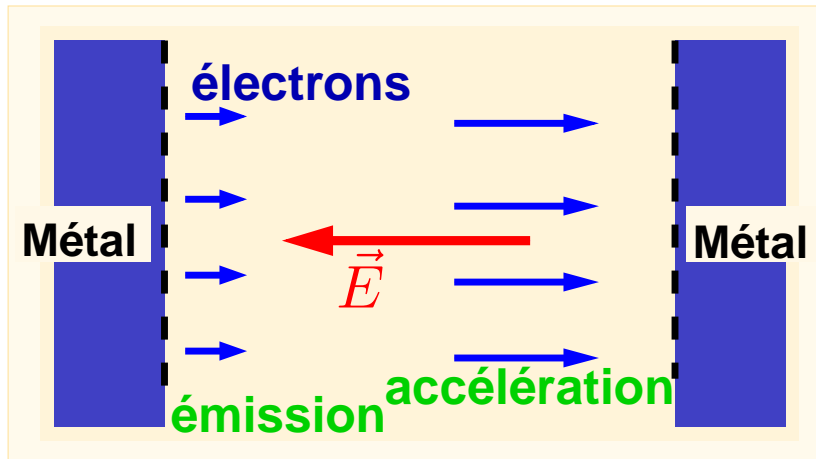
CEA : F. Assous, K.C. Le Than, J. Segré.

CNES : D. Payan.

mhvignal@mip.ups-tlse.fr

1. Présentation des applications physiques

Diode conventionnelle :



Valeur maximale du courant =

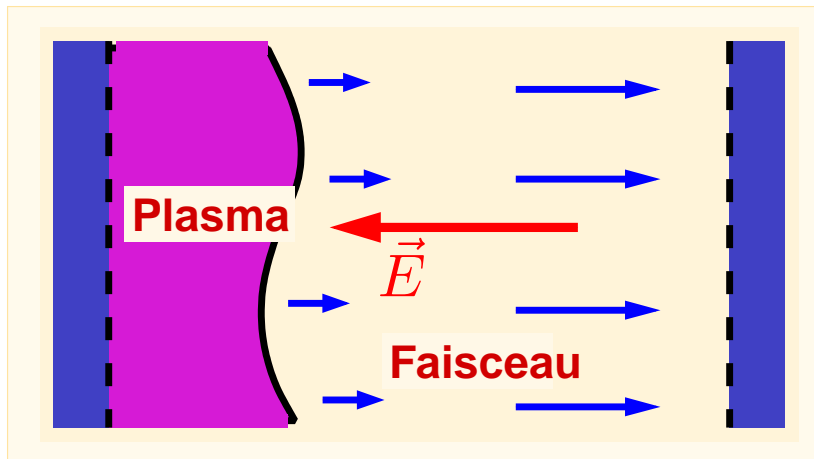
courant de
Child-Langmuir

$$J_{CL} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e \phi^{3/2}}{m L^2}}$$

∇ processus d'émission

Problème : Comment dépasser cette limitation ?

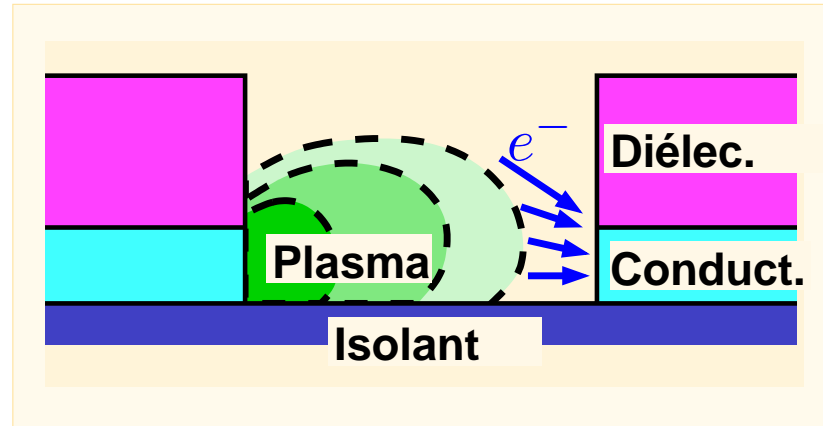
Diode à forts courants



- Plasma **se détend**
- Interface **avance**
- Courant extrait ↗

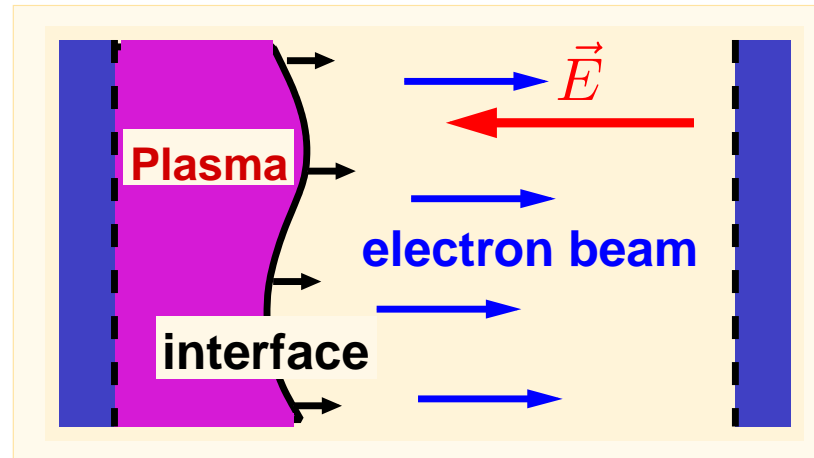
Questions :

- Quelle est la **dynamique de l'interface** ?
- Quelle est la **loi d'émission** des électrons dans le faisceau ?
- Quel est le **courant à l'anode** ?



- Une **décharge** a lieu.
- Un **plasma haute densité** est formé et **se détend**.
- Quand le plasma atteint l'anode, un **arc** est créé.

2. Modèle mathématique de base et problèmes



Modèle :

- Mouvement de deux fluides ($e^- + \text{ions}$).
- Remise à jour du potentiel électrique.

⇒ Équations d'**Euler** isentropique pour e^- et ions

$$\begin{cases} (n_e)_t + (n_e u_e)_x = 0 \\ m_e \left((n_e u_e)_t + (n_e u_e^2)_x \right) + (p_e(n_e))_x = q n_e \phi_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n_i)_t + (n_i u_i)_x = 0 \\ m_i \left((n_i u_i)_t + (n_i u_i^2)_x \right) + (p_i(n_i))_x = -q n_i \phi_x \end{cases}$$

⇒ Équation de **Poisson** pour le potentiel

$$-\phi_{xx} = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_i - n_e)$$

⇒ Conditions initiales ($t = 0$) : pas de plasma

$$n_i = n_e = 0$$

⇒ Conditions aux limites :

⇒ $x = 0$ (cathode) : $n_i = n_e = n_0 > 0$

$$u_i = u_e = u_0 > 0$$

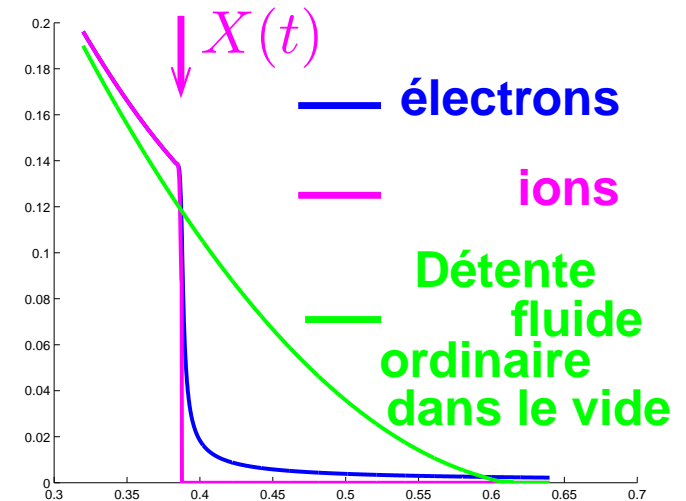
$$\phi = 0$$

⇒ $x = L$ (anode) : $\phi = \phi_L > 0$

⇒ ∃ interfaces fluide-vide $X_e(t)$, $X_i(t) = X(t)$.

⇒ $X_e(t) \rightarrow L$ très vite
(e^- accélérés)

⇒ $X_i(t) = X(t) =$
interface plasma vide



$X(t) \neq$ interface fluide-vide classique.

▣▣▣ Long. de **Debye** : échelle des interactions électriques

$$\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_{i,e} q^2}$$

▣▣▣ Problèmes

- ▣▣ Densités très grandes dans le plasma.
- ▣▣ Très petite longueur de Debye.
- ▣▣ **Petit maillage** pour équation de Poisson.



Simulations num. **1-D Difficiles**, **2-D irréalisables**

- Utiliser un modèle **quasi-neutre** dans le **plasma**

$$(n_e = n_i)$$

Mais près de l'**interface plasma-vide** la quasineutralité n'a plus lieu

- Quel est le modèle dans le **faisceau** ?
- Comment relier les deux zones ?
- Quelle est la **dynamique de l'interface** ?

3. La limite quasineutre dans le plasma

⇒ Eq. Euler isentropique pour e^- et ions + Poisson

$$\begin{cases} (n_e)_t + (n_e u_e)_x = 0 \\ m_e \left((n_e u_e)_t + (n_e u_e^2)_x \right) + (p_e(n_e))_x = q n_e \phi_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n_i)_t + (n_i u_i)_x = 0 \\ m_i \left((n_i u_i)_t + (n_i u_i^2)_x \right) + (p_i(n_i))_x = -q n_i \phi_x \end{cases}$$

$$-\phi_{xx} = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_i - n_e)$$

Longueurs : L	\longrightarrow	$x = L\bar{x}$
Vitesses : u_0	\longrightarrow	$u_{e,i} = u_0\bar{u}_{e,i}$
Temps : L/u_0	\longrightarrow	$t = L/u_0\bar{t}$
Densités : n_0	\longrightarrow	$n_{e,i} = n_0\bar{n}_{e,i}$
Pressions : $p_0 = n_0 m_i u_0^2$	\longrightarrow	$p_{e,i}(n_{e,i}) = p_0 \bar{p}_{e,i}(\bar{n}_{e,i})$
Potentiel : ϕ_L	\longrightarrow	$\phi = \phi_L \bar{\phi}$



3 paramètres **adimensionnés**

$$\varepsilon = \frac{m_e}{m_i} \quad \eta = \frac{m_i u_0^2}{q\phi_L} \ll 1 \quad \lambda = \frac{q\phi_L}{q^2 / (\varepsilon_0 (n_0 L^2)^{-1})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_e^\eta)_t + (n_e^\eta u_e^\eta)_x = 0 \\ \varepsilon \left((n_e^\eta u_e^\eta)_t + (n_e^\eta (u_e^\eta)^2)_x \right) + (p_e(n_e^\eta))_x = \frac{n_e^\eta \phi_x^\eta}{\eta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_i^\eta)_t + (n_i^\eta u_i^\eta)_x = 0 \\ (n_i^\eta u_i^\eta)_t + \left((n_i^\eta (u_i^\eta)^2) + p_i(n_i^\eta) \right)_x = -\frac{n_i^\eta \phi_x^\eta}{\eta} \end{array} \right.$$

$$-\lambda \phi_{xx}^\eta = n_i^\eta - n_e^\eta$$

⇒ Conditions initiales ($t = 0$) : pas de plasma

$$n_i = n_e = 0$$

⇒ Conditions aux limites :

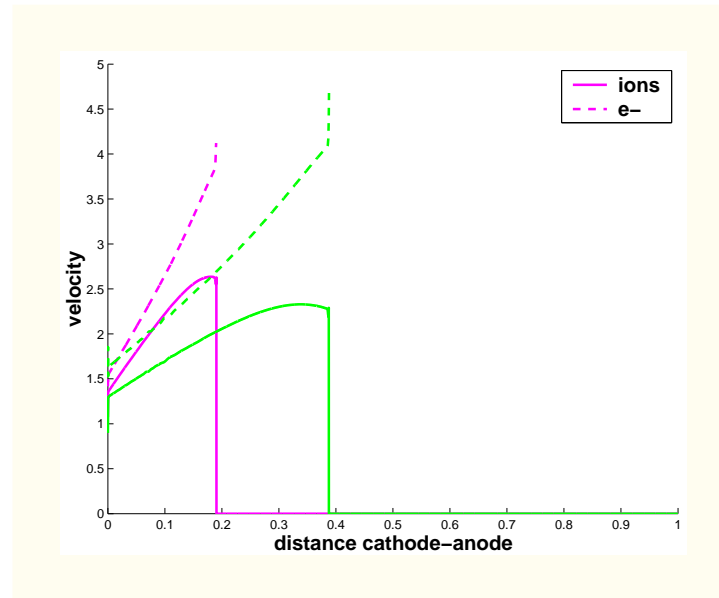
⇒ $x = 0$ (cathode) : $n_i = n_e = 1$

$$u_i = u_e = 1$$

$$\phi = 0$$

⇒ $x = L$ (anode) : $\phi = 1$

$$\phi^\eta \rightarrow 0, \quad n_e^\eta, n_i^\eta \rightarrow n, \quad u_i^\eta \rightarrow u_i, \quad u_e^\eta \rightarrow u_e$$



Vitesses des électrons et des ions dans le plasma,
modèle bifluide

$$(n(u_i - u_e))_x = 0 \Rightarrow n(u_i - u_e) = j \neq 0 \quad (j < 0)$$

(n, u_i, j) satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} n_t + (nu_i)_x = 0, \quad j_x = 0, \\ (1 + \varepsilon) \left((nu_i)_t + (nu_i^2)_x \right) + ((p_i + p_e)(n))_x \\ \quad + \left(-2\varepsilon u_i j + \varepsilon \frac{j^2}{n} \right)_x = \varepsilon j_t \end{array} \right.$$

pour $x \in [0, X(t)]$ et $t > 0$.

Limite rigoureuse quasineutre pour Euler-Poisson :
voir [Cordier, Grenier] et [Slemrod, Sternberg]

▣ La limite est valide pour $x \in [0, X(t) - \delta]$, ($\delta > 0$)

i.e. loin de l'interface

▣ Le système est **hyperbolique** (bien posé) ssi
 $n > n_H(j)$

$$i.e. \quad U_t + Df(U)U_x = 0,$$

avec $Df(U)$ matrice diagonalisable dans \mathbb{R} .

Conditions aux limites

▣ $x = 0$: $n = 1$ et $u_i = 1$.

▣ $x = X(t)$: les vitesses caractéristiques μ_+ et μ_- sont telles que

$$\mu_+ - \frac{dX}{dt} > 0$$

$$\mu_- - \frac{dX}{dt} < 0 \quad \text{ssi} \quad n(X(t), t) > n_P(j)$$

$n(X(t), t) > n_P(j) \Rightarrow$ une condition aux limites nécessaire

3. Modèle de Child-Langmuir dans le faisceau d'électrons

Redimensionnement du modèle dans le faisceau (1) 23

- ➡ Dans $[X(t), 1]$ il n'y a que des **électrons**
- ➡ Ils obéissent au modèle un-fluide **Euler-Poisson**

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_e^\eta)_t + (n_e^\eta u_e^\eta)_x = 0 \\ \varepsilon \left((n_e^\eta u_e^\eta)_t + (n_e^\eta (u_e^\eta)^2)_x \right) + (p_e(n_e^\eta))_x = \frac{n_e^\eta \phi_x^\eta}{\eta} \\ \lambda \phi_{xx}^\eta = n_e^\eta \end{array} \right.$$

- ➡ **Conditions aux limites** : $\phi(X(t)) = 0$, $\phi(1) = 1$

➡ À l'anode $x = 1$, on attend des vitesses telles que

$$m_e u_e^2 \sim q\phi_L$$

➡ En version **adimensionnée** $u_e \sim 1/\sqrt{\varepsilon\eta} \gg 1$

➡ Vitesse **redimensionnée** $u_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\eta}} \bar{u}_e$

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon\eta} (\bar{n}_e)_t + (\bar{n}_e \bar{u}_e)_x = 0 \\ \sqrt{\varepsilon\eta} (\bar{n}_e \bar{u}_e)_t + (\bar{n}_e \bar{u}_e^2)_x + \eta (p_e(\bar{n}_e))_x = \bar{n}_e \bar{\phi}_x \\ -\lambda \bar{\phi}_{xx} = -\bar{n}_e \end{cases}$$

- La limite $\eta \rightarrow 0$ donne le **problème de Child-Langmuir**

$$\begin{cases} (\bar{n}_e \bar{u}_e)_x = 0 \\ (\bar{n}_e \bar{u}_e^2)_x = \bar{n}_e \bar{\phi}_x \\ -\lambda \bar{\phi}_{xx} = -\bar{n}_e \end{cases}$$

- Modèle stationnaire** : e^- si rapide \Rightarrow ils traversent $[X(t), 1]$ instantanément
- Le problème de Child-Langmuir a une **solution explicite** [Langmuir & Compton (30's), Degond & Raviart (90's)]

$$\Rightarrow (\bar{n}_e \bar{u}_e)_x = 0 \Rightarrow \bar{n}_e(x, t) \bar{u}_e(x, t) = \bar{j}_e(t)$$

$$\Rightarrow (\bar{n}_e \bar{u}_e^2)_x = \bar{n}_e \bar{\phi}_x \Rightarrow$$

$$\bar{n}_e \bar{u}_e (\bar{u}_e)_x + \bar{u}_e (\bar{n}_e \bar{u}_e)_x = \bar{n}_e \bar{u}_e (u_e)_x = \bar{n}_e \bar{\phi}_x$$

$$\Rightarrow \bar{u}_e (\bar{u}_e)_x = (\bar{u}_e^2/2)_x = \bar{\phi}_x$$

Mais $\bar{u}_e(X(t), t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon \eta} u_e(X) = 0$ et $\bar{\phi}(X) = 0$

$$\Rightarrow \bar{u}_e(x, t) = \sqrt{2 \bar{\phi}(x, t)}$$

$$\bar{\phi}_{xx} = \bar{n}_e \quad \Rightarrow \quad \bar{\phi}_x \bar{\phi}_{xx} = \frac{\bar{j}_e}{\bar{u}_e} \bar{\phi}_x = \frac{\bar{j}_e}{\sqrt{2\bar{\phi}}} \bar{\phi}_x$$

$$(\bar{\phi}_x^2/2)_x = \bar{j}_e (\sqrt{2\bar{\phi}})_x$$

Après intégration

$$\bar{\phi}_x^2(x, t) - \bar{\phi}_x^2(X(t), t) = \bar{j}_e \sqrt{2\bar{\phi}(x, t)}$$

Et donc
$$\int_{X(t)}^x \frac{\bar{\phi}_x(x, t)}{\sqrt{\bar{\phi}_x^2(X(t), t) + \bar{j}_e \sqrt{2\bar{\phi}(x, t)}}} dx = x - X(t)$$

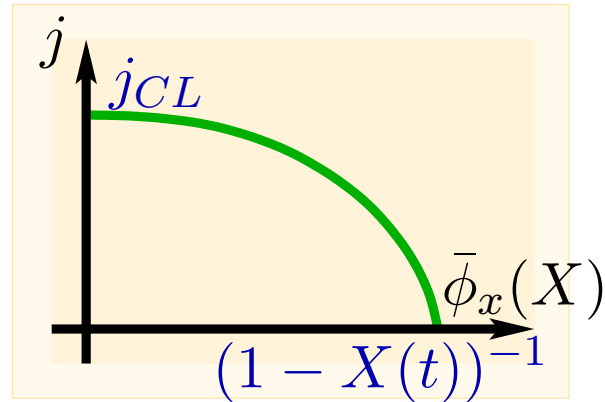
Changement de var $x \mapsto u = \bar{\phi}(x, t)$; $du = \bar{\phi}_x dx$ et

$$\int_{\bar{\phi}(X(t))}^{\bar{\phi}(x)} \frac{1}{\sqrt{\bar{\phi}_x^2(X(t), t) + \bar{j}_e \sqrt{2} u}} du = x - X(t)$$

Condition aux limites en $x=1$, $\bar{\phi}(1) = 1$



Relation entre \bar{j}_e et $\bar{\phi}_x(X(t), t)$



➡ Le courant maximal est atteint pour :

$$\bar{\phi}_x(X(t)) = 0$$

➡ Courant maximal = **courant de Child-Langmuir**

$$\bar{j}_e = \bar{j}_{CL} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \lambda \frac{1}{(1 - X(t))^2}$$

- Modèle quasineutre dans le plasma
 - Que vaut le courant j dans le plasma ?
 - Si $n(X, t) > n_H$ il faut une CL en $x = X(t)$?

- Modèle de Child-Langmuir
 - Que vaut le courant $-j_e$ dans le faisceau ?

- Quelle est la dynamique de l'interface ?

4. Réponse : Problème de couche limite en $x = X$

▣▣▣▣ Près de l'interface : **modèle bifluide**

▣▣▣▣ **Zoom** sur l'interface : $\xi = \frac{x - X(t)}{\beta}$

β = taille de la couche limite en X

▣▣▣▣ Pour voir les effets du **couplage** :

- redimension du potentiel $\phi(x, t) = \eta \psi(\xi, t)$
- taille de la couche limite $\beta = \eta^2$
- $n_{e,i}(x, t) = \tilde{n}_{e,i}(\xi, t)$
- $u_{e,i}(x, t) = \tilde{u}_{e,i}(\xi, t)$

▣▣▣▣ Limite $\eta \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_i(u_i - \sigma))_\xi = 0, \\ (n_i u_i (u_i - \sigma) + p_i(n_i))_\xi = -n_i \phi_\xi, \\ (n_e(u_e - \sigma))_\xi = 0, \\ (\varepsilon n_e u_e (u_e - \sigma) + p_e(n_e))_\xi = n_e \phi_\xi, \\ -\lambda \phi_{\xi\xi} = n_i - n_e, \end{array} \right.$$

▣▣▣▣ Conditions aux limites :

$\xi \rightarrow -\infty$: Plasma

$\xi \rightarrow +\infty$: Faisceau

Ce problème se ramène à un système différentiel dont on analyse les portraits de phase



1- **Vitesse de l'interface** $\frac{dX}{dt}(t) = u_i(X(t), t)$

2- **Continuité du courant** $j = 0 - \frac{\bar{j}_e}{\sqrt{\eta \varepsilon}}$

3- Condition aux limites pour le plasma à l'interface:

$$n(X(t) - 0) \in [n_H, n_P] = \text{Domaine supersonique}$$



Critère de Bohm pour les gaines d'ions

see [Ben Abdallah-Mas-Gallic-Raviart], [Franklin-Ockendon],
[Ha-Slemrod], [Riemann], [Slemrod]

⇒ Quel est le courant?

Hypothèse :

Le courant émis dans le faisceau est maximal

$$(\bar{\phi}_x(X) = 0)$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad m_i = 2000 m_e = 1,82 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 5,44 \cdot 10^{-4}$$

$$T_i = T_e = 1,16 \cdot 10^4 \text{ K} \quad \phi_L = 10^6 \text{ V} \Rightarrow \eta = 10^{-6}$$

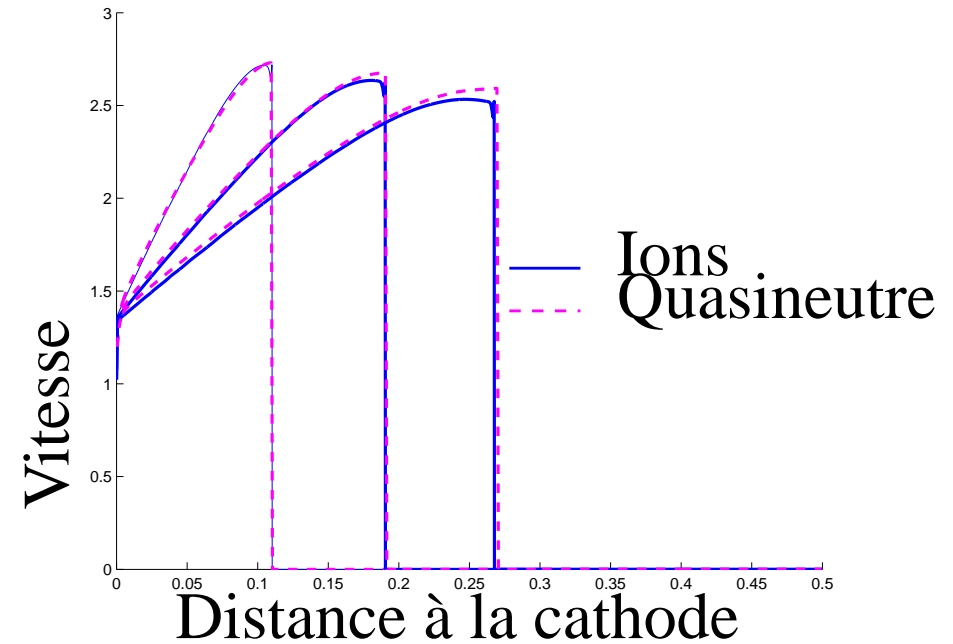
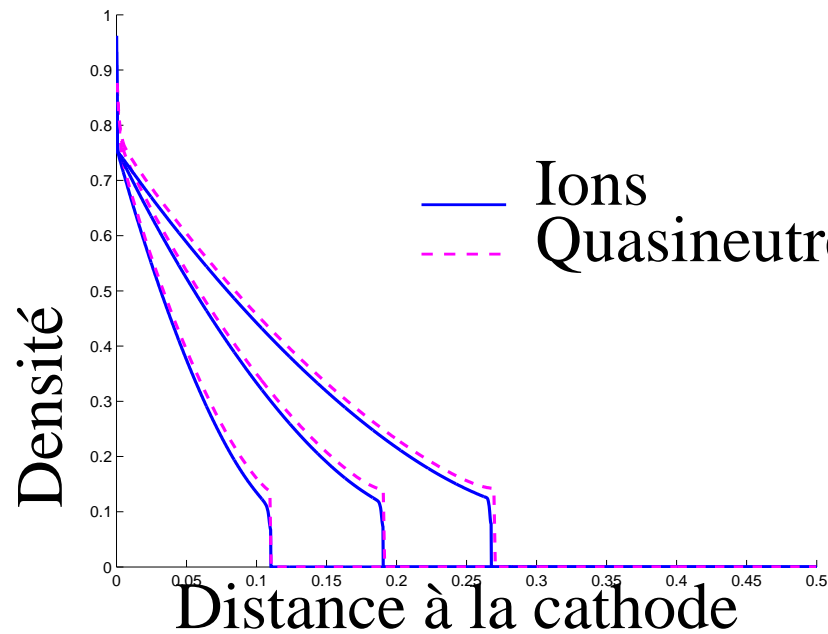
$$n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3} \quad L = 10^{-1} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5,5 \cdot 10^{-3}$$

Paramètres physiques

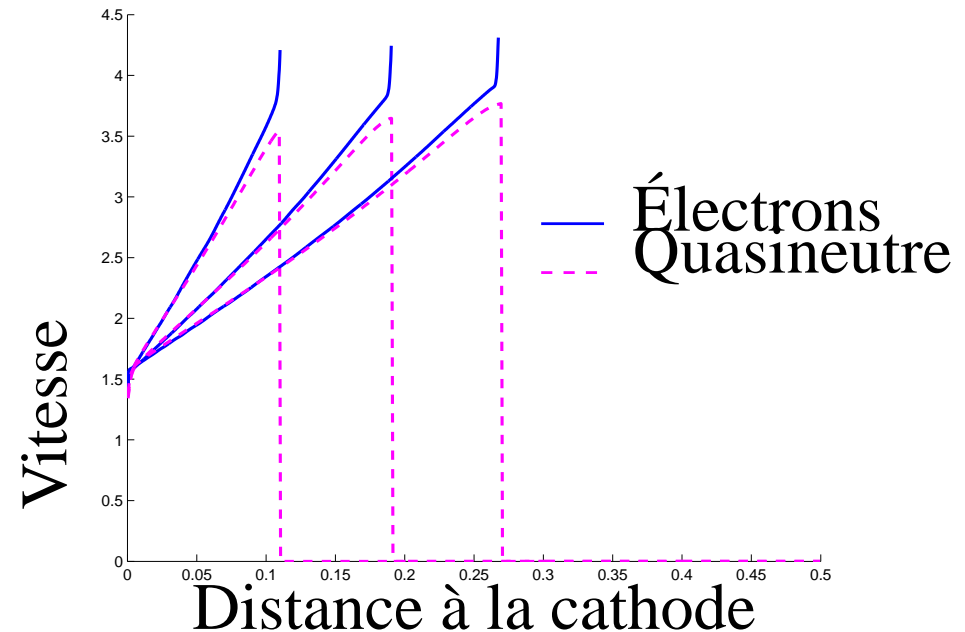
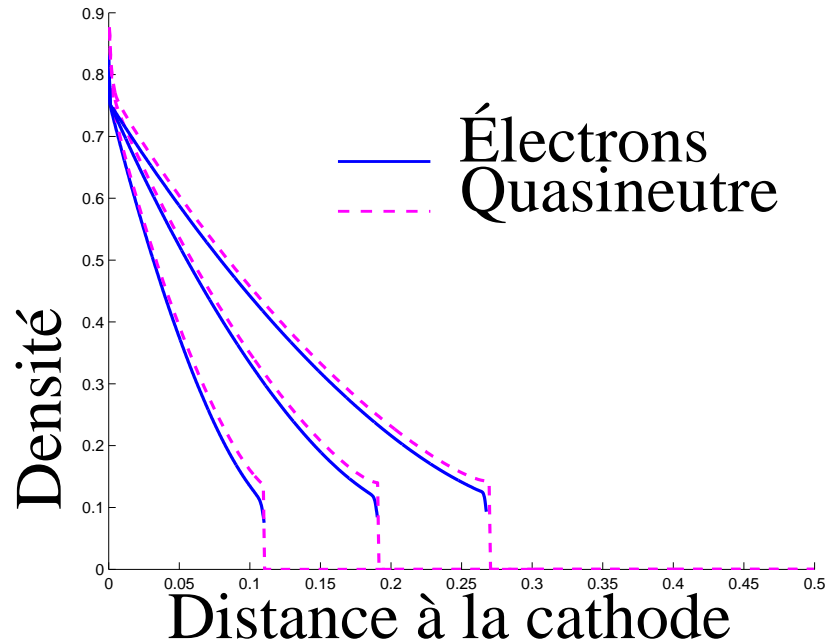
$$\varepsilon = 5,4 \cdot 10^{-4} \quad \eta = 10^{-6} \quad \lambda = 5,5 \cdot 10^{-3}$$

Paramètres numériques

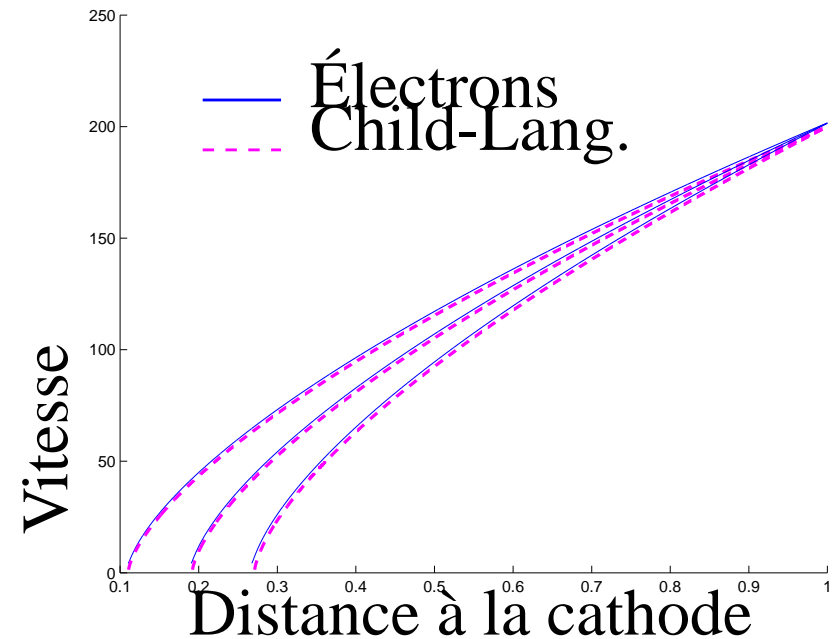
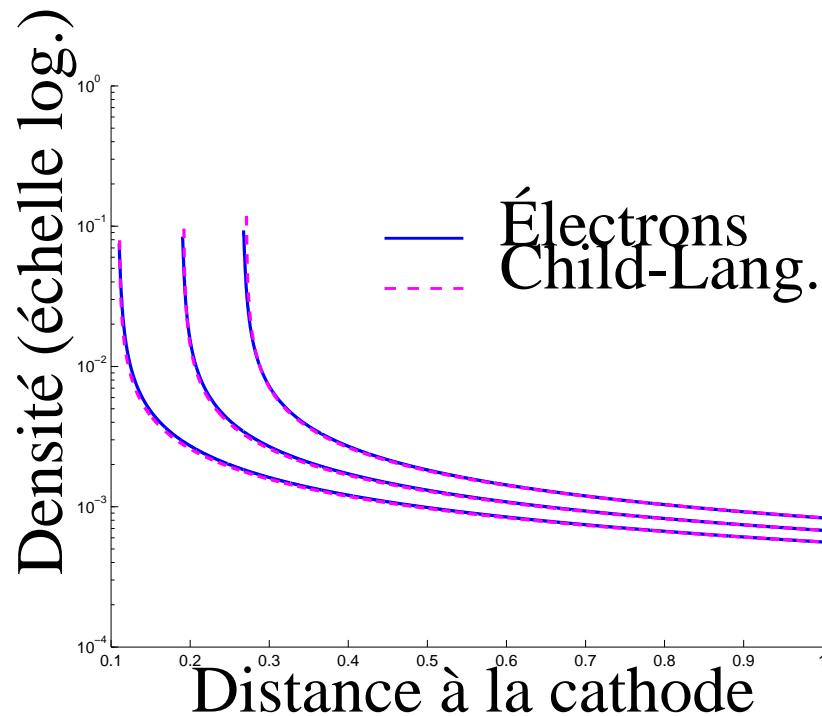
$$\varepsilon = 0,5 \quad \eta = 10^{-4} \quad \lambda = 10^{-3}$$



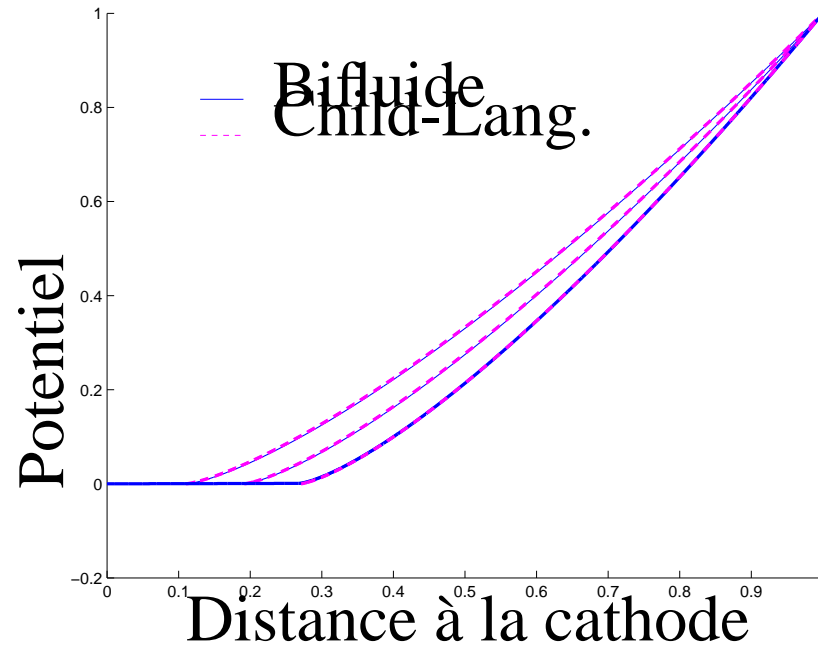
Densité et vitesse ioniques dans le plasma, modèles
bifluide et quasineutre



Densité et vitesse électroniques dans le plasma,
modèles bifluide et quasineutre

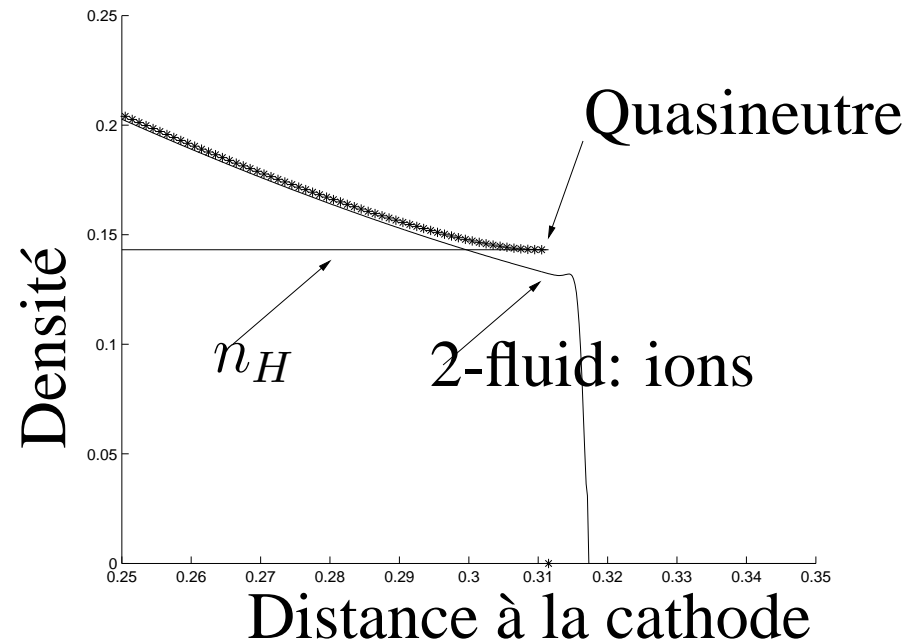


Densité et vitesse électroniques dans le faisceau,
modèles bifluide et de Child-Langmuir



Potentiel entre la cathode et l'anode

►► Problème : domaine d'hyperbolicité



Densité du plasma quand la condition d'hyperbolicité n'est plus vérifiée

$$\begin{cases} n_t + (nu_i)_x = 0, & j_x = 0, \\ (1 + \varepsilon) \left((nu_i)_t + (nu_i^2)_x \right) + ((p_i + p_e)(n))_x = -n \psi_x \\ \varepsilon j_t + \left(2 \varepsilon u_i j - \varepsilon \frac{j^2}{n} \right)_x = n \psi_x \end{cases}$$

for $x \in [0, X(t)]$ et $t > 0$.

On peut **éliminer** ψ en sommant les équations sur u_i et $j \Rightarrow$ **modèle précédent**

Analyse de stabilité linéaire d'une petite perturbation d'un plasma uniforme, stationnaire et quasineutre



Perte d'hyperbolicité \Leftrightarrow Instabilités double faisceaux,
connus dans les plasmas parcourus par un fort courant