N° d'ordre : 75

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

pour obtenir

le Titre de Docteur de l'École normale supérieure de Lyon
spécialité : Mathématiques
au titre de la formation doctorale de : Analyse numérique, équations aux dérivées partielles et calcul scientifique

par Marie Hélène VIGNAL

Titre :

Schémas Volumes Finis pour des équations elliptiques ou hyperboliques avec conditions aux limites, convergence et estimations d'erreur

Soutenue le 15 Décembre 1997

Après avis de :

Monsieur Michel CROUZEIX
Monsieur Jean-Marie THOMAS

Devant la commission d'examen formée de :

Monsieur Frédéric COQUEL
Monsieur Michel CROUZEIX
Monsieur Thierry GALLOUËT (Directeur de Thèse)
Monsieur Jean-François MAITRE
Monsieur Denis SERRE

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Thierry Gallouët qui a dirigé cette thèse. Il m'a encouragée et guidée tout au long de ce travail. Je le remercie sincérement pour tout le temps qu'il m'a consacré ainsi que pour tous ses conseils avisés.
J'exprime toute ma reconnaissance à Michel Crouzeix et Jean-Marie Thomas qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs, je suis très sensible à l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail.
Je remercie Frédéric Coquel, Michel Crouzeix et Jean-François Maitre d'avoir accepté de participer à ce jury.
Je voudrais remercier Denis Serre qui m'a accueillie dans son laboratoire, je lui sais gré d'avoir accepté d'être membre du jury.
Je voudrais compléter cette liste en adressant mes plus vifs remerciements aux membres (passés et présents) du laboratoire de Mathématiques de l'ENS Lyon et plus particulièrement à Claire Chainais Hillairet, Magali Grassin, Florence Hubert, Julien Michel et Alain Prignet.
Enfin, je termine en remerciant tous mes proches qui m'ont accordé leur soutien tout au long de cette thèse.

Table des Matières

1. Introduction

On s'intéresse ici à l'étude de schémas volumes finis pour des équations elliptiques et hyperboliques sur des domaines bornés. L'originalité de ce travail réside dans le traitement des conditions aux limites ainsi que dans le traitement du couplage elliptique hyperbolique.

Les schémas volumes finis sont depuis longtemps utilisés dans l'industrie, notamment dans l'industrie pétrolière. Ils sont tout à fait adaptés à la discrétisation d'équations de conservation. En revanche l'étude théorique de ces schémas n'est que très récente. En effet, l'un des premiers résultats de convergence est celui de P.A. Forsyth et P. H. Sammon en 1988 (voir [19]) pour une équation elliptique en dimension un.

Le principe des schémas volumes finis est le suivant. On se donne un ensemble de mailles (ou volumes de contrôle). A chaque maille est associée une inconnue, on obtient alors autant d'équations que d'inconnues en intégrant l'équation à discrétiser sur chaque volume de contrôle. Cette intégration fait apparaître des termes d'échange entre volumes de contrôle. On discrétise ces derniers par différences finies. Remarquons qu'ici, par souci de clarté, l'ensemble des volumes de contrôle est l'ensemble des mailles, ce qui n'est pas toujours le cas. Par exemple dans le chapitre 4, l'ensemble des volumes de contrôle est l'ensemble des mailles et des côtés du maillage situés dans le bord du domaine.

Les schémas volumes finis sont souvent assimilés à des schémas différences finies. Pourtant, déja en dimension un, sur un maillage à pas d'espace variable, il est possible de montrer que les schémas différences finies et volumes finis ne coïncident pas dans certains cas (voir Introduction dans [16]). De plus, en dimension deux, il est facile de construire un schéma volumes finis sur un maillage triangulaire, alors que les schémas différences finies sont plus difficilement étendus à des maillages triangulaires.

Pour établir la convergence de schémas volumes finis appliqués à des équations elliptiques, deux classes de méthodes sont en général employées. La première, voir entre autres [1], [30], [36], [35], consiste à utiliser la théorie (très développée) des éléments finis mixtes et de voir, lorsque ceci est possible, les schémas volumes finis comme des schémas éléments finis mixtes. La deuxième classe de méthodes, voir entre autres [11],

[16], [23], [27], consiste à montrer directement la convergence des schémas volumes finis sans utiliser les théories qui existent sur d'autres types de schémas.
C'est ce dernier point de vue que l'on adopte ici.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à la convergence d'un schéma volumes finis pour un système couplé elliptique-hyperbolique linéaire sur Ω ouvert borné de $I\!R^2$. Ce système est de la forme suivante :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta P(x) = 0 & x \in \Omega, \\ u_t(x,t) - \operatorname{div}\Big(\nabla P(x)\, u(x,t)\Big) = 0 & (x,t) \in \Omega \times I\!R_+, \\ \nabla P(\tau).n(\tau) = g(\tau) & \tau \in \partial\Omega, \\ u(\tau,t) = \overline{u}(\tau,t) & (\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω et n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.
On suppose que la solution P de l'équation elliptique est dans $C^2(\overline{\Omega})$ (on verra au chapitre 3 que l'on peut étendre les résultats de convergence à P seulement $H^2(\Omega)$). Notons que la solution P n'est pas unique mais que ∇P est unique. De plus, l'équation hyperbolique étant linéaire, il n'est pas nécessaire de considérer les inégalités d'entropie puisque la solution faible est unique. On note $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ cette solution faible.
On considère un maillage vérifiant certaines hypothèses de régularité. Les exemples les plus classiques de tels maillages sont rectangulaires, triangulaires ou encore de Voronoï. On se donne également un pas de temps satisfaisant une condition de type C.F.L. (Courant Friedrichs Lewy). On discrétise alors l'équation elliptique à l'aide d'un schéma volumes finis "à quatre points" et l'équation hyperbolique avec un schéma volumes finis décentré vers l'amont de l'écoulement.
On montre dans un premier temps la convergence de la solution approchée associée à l'équation elliptique. Pour cela, on établit une estimation d'erreur en norme $H^1(\Omega)$ discrète de l'ordre de h, où h représente la taille du maillage, en étendant les résultats de [23] au problème (1.1). Dans [23] la condition aux limites est de type Dirichlet alors qu'ici, on considère une condition de Neumann. Ainsi les estimations sont changées par les termes de bords. En particulier, pour les estimations d'erreur sur P, il est nécessaire d'établir une inégalité de Poincaré Wirtinger discrète, alors que dans [23] il est possible d'établir une inégalité de Poincaré dans H_0^1 discret puisqu'on contrôle P sur le bord du domaine.
De plus, on établit des estimations d'erreurs en norme $L^r(\Omega)$ pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$.

On montre alors des estimations sur la solution approchée associée à l'équation hyperbolique : tout d'abord une estimation L^∞, qui permettra d'obtenir de la compacité L^∞ faible $\star$, puis une estimation faible sur les variations en temps et en espace de la solution approchée. Ces estimations permettent de passer à la limite dans le schéma.

On établit ainsi la convergence de la solution approchée vers la solution faible de l'équation hyperbolique comme le font R. Eymard et T. Gallouët dans [14] pour un schéma couplé éléments finis - volumes finis. En effet, le système considéré dans [14] est le même que (1.1) mais les auteurs utilisent un schéma couplé éléments finis-volumes finis ; les inconnues dicrètes sont localisées aux sommets des mailles alors qu'ici elles sont localisées aux centres des cellules. Le schéma utilisé sur la pression, dans [14], est un schéma éléments finis, ainsi la convergence de la solution approchée associée à l'équation elliptique résulte des travaux sur les éléments finis.
Ce chapitre est en partie publié dans M^2AN (voir [41]).

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la résolution d'un problème issu de la modélisation d'un écoulement diphasique en milieu poreux. Ce travail a été réalisé en collaboration avec S. Verdière (anciennement en thèse à l'Institut Français du Pétrole, aujourd'hui ingénieur chez Elf).
On suppose que deux phases sont en présence, une phase eau et une phase pétrole. On cherche alors à déterminer la saturation u de la phase eau et la pression P du fluide. Ce couple (u, P) est solution d'un système couplé elliptique hyperbolique non linéaire sur un domaine borné Ω de $I\!R^2$.
Les paramètres pétrophysiques, c'est à dire la perméabilité absolue et les perméabilités relatives, sont donnés par les géophysiciens comme des fonctions constantes sur une grille fine, qui peut être composée de millions de cellules. La discrétisation du problème elliptique conduit à un système linéaire de la taille de cette grille fine. Ce système étant trop grand pour les capacités machine, il est nécessaire de réduire le nombre de cellules afin de pouvoir effectuer des tests numériques.
On étudie ici, une méthode de double maillage, proposée par D. Guérillot, J.M. Thomas et S. Verdière, qui permet de résoudre ces problèmes en discrétisant l'équation elliptique sur le maillage grossier et l'équation hyperbolique sur le maillage fin.
L'étape principale de l'algorithme de cette méthode est la reconstruction des gradients de pression sur le maillage fin à partir des valeurs connues sur le maillage grossier.
On expose dans ce chapitre deux méthodes de reconstruction. La première, proposée par T. Gallouët, consiste à interpoler les flux à l'aide des valeurs sur les côtés du maillage grossier.
L'idée de la deuxième méthode, proposée par D. Guérillot, J.M. Thomas et S. Verdière, est de résoudre une succession de problèmes indépendants localement dans les mailles grossières.
Dans une première partie, on donne des résultats de convergence pour un problème simplifié (problème (1.1)). La solution P de l'équation elliptique est supposée ici seulement $H^2(\Omega)$. On utilise des schémas volumes finis pour discrétiser ce problème sur des maillages rectangulaires : un schéma à cinq points pour l'équation elliptique, un schéma décentré vers l'amont de l'écoulement pour l'équation hyperbolique. On présente alors les deux méthodes de reconstruction des flux, puis on établit la convergence

de la solution approchée, donnée par le schéma numérique, vers une solution exacte du problème. Il est important de noter que seul le fait d'utiliser un double maillage nous a amenées à utiliser une grille rectangulaire. Si l'on utilise un seul maillage ces démonstrations de convergence s'étendent à des maillages plus complexes comme des maillages triangulaires ou de Voronoï. C'est à dire que l'on peut étendre les résultats du chapitre 2 au cas où P est seulement $H^2(\Omega)$ et non pas $C^2(\overline{\Omega})$.
On présente ensuite des résultats numériques, tout d'abord pour le problème simplifié étudié précédemment, puis pour des problèmes physiques complexes. Ces résultats confirment la validité de la méthode de double maillage même dans le cas d'un milieu poreux hétérogène et d'un problème non linéaire.
Ce chapitre est accepté pour publication dans Numerische Matematik (voir [40]).

Dans le chapitre 4, on étudie la convergence d'un schéma volumes finis pour une équation elliptique définie sur un ouvert borné de $I\!R^2$ avec une condition aux limites de type Fourier. Le gradient de pression sur le bord du domaine n'étant alors plus une donnée du problème comme dans les chapitres 2 et 3, on introduit des inconnues supplémentaires sur le bord du domaine. On montre, dans ce cas, des estimations d'erreur en norme H^1 discrète du domaine ainsi que L^2 discrète du bord. On établit de plus des estimations en norme L^r pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$.

Dans le chapitre 5, on étend les résultats du chapitre 2 à un système couplé elliptique - hyperbolique non linéaire proche du problème (1.1), où l'équation hyperbolique est remplacée par

$$u_t - \operatorname{div}(\nabla P\, f(u)) = 0 \tag{1.2}$$

sur un ouvert borné, où f est une fonction croissante. Sur l'équation elliptique, le schéma volumes finis "à quatre points", présenté dans le chapitre 2, est utilisé. Pour discrétiser l'équation hyperbolique, on utilise un schéma décentré vers l'amont de l'écoulement.
En utilisant les résultats de convergence, pour la solution approchée associée à l'équation elliptique, du chapitre 2, on montre la convergence de la solution approchée associée à l'équation hyperbolique vers la solution entropique de (1.2) ainsi que l'existence et l'unicité de cette dernière. Pour cela on passe à la limite dans les équations discrétisées, on montre alors que la solution approchée converge au sens non linéaire faible $\star$ vers une solution processus entropique, voir [17] (ou une solution entropique à valeur mesure, voir [12]) de l'équation hyperbolique. Il reste à montrer que cette solution est en fait la solution entropique. Cette étape, développée dans [17] dans le cas où $\Omega = I\!R^d$, se généralise au problème considéré ici malgré la difficulté supplémentaire introduite par les conditions aux limites.
De plus, en supposant la condition initiale à variations bornées, on établit, comme ceci est fait dans [15] dans le cas où $\Omega = I\!R^d$, une estimation d'erreur en norme L^1, de l'ordre de $h^{1/4}$ où h définit la taille du maillage. La différence essentielle entre [15]

et ce travail provient des termes de bord qu'il faut contrôler, ceci est fait à l'aide de la prise en compte des termes de bord là où le flux est "sortant" dans la formulation entropique.
Ce chapitre est publié sous la forme d'un acte de congrès avec comité de lecture (voir [42]).

Dans le chapitre 6, on s'intéresse à une équation hyperbolique non linéaire, de la forme suivante :

$$u_t + \mathrm{div}\Big(v\, f(u)\Big) = 0$$

sur un ouvert borné, avec des conditions aux limites et une condition initiale, où v est une fonction vectorielle et f une fonction scalaire.
On discrétise ce problème à l'aide d'un schéma volumes finis à flux monotone, dont les exemples les plus classiques sont le schéma à décomposition de flux et le schéma de Godunov 1-D par interface.
On montre alors deux résultats. Le premier concerne le cas où f est croissante. En supposant les conditions aux limites et initiales dans L^∞, on établit la convergence de la solution approchée, donnée par le schéma, vers la solution entropique du problème. Ce résultat donne également l'existence et l'unicité de la solution entropique. La technique employée est différente de celle utilisée dans le chapitre 5, elle permet de montrer la convergence de la solution approchée. même si $v(x,t) \neq \nabla P(x)$ et permet d'éviter certaines hypothèses techniques nécessaires au chapitre précédent. Toutefois on n'a pas dans ce cas d'estimations d'erreur.
Le deuxième résultat concerne f quelconque. On suppose dans ce cas les conditions initiales et aux limites plus régulières que dans le cas f croissante afin d'avoir l'existence et l'unicité de la solution entropique, qui est à variations bornées (résultat donné dans [2]). On montre alors la convergence de la solution approchée, donnée par le schéma numérique, vers cette solution entropique.
Pour établir ces deux résultats, on montre tout d'abord des estimations sur la solution approchée. La première est une estimation L^∞. Elle permet d'avoir de la "compacité non linéaire faible $\star$".
La deuxième estimation, dite estimation "BV faible", est une estimation faible sur les variations en temps et en espace de la solution approchée. On utilise pour cela une technique introduite dans [15], on doit toutefois traiter en plus les termes de bord absents dans [15] puisque les auteurs s'intéressent à un problème sans condition aux limites (i.e. dans $I\!R^d \times I\!R_+$).
Enfin la troisième estimation est une estimation continue d'entropie. On montre que la solution approchée vérifie une inégalité d'entropie similaire à celle vérifiée par la solution entropique avec en plus des termes d'erreur. Comme dans [15], ces termes d'erreurs s'expriment sous la forme de mesures que l'on peut contrôler à l'aide de l'estimation "BV faible".

Pour montrer la convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution entropique de l'équation, on passe à la limite dans l'inégalité d'entropie continue vérifiée par la solution approchée. On montre alors que la solution approchée converge au sens non linéaire faible $\star$ vers une solution processus entropique (ou une solution entropique à valeur mesure) de l'équation hyperbolique. On utilise dans cette étape une technique introduite dans [3] afin de retrouver les "bons" termes de bords. On montre alors que cette solution est en fait la solution entropique. Pour cela, on procède comme dans [34], où l'auteur s'intéresse à l'équation $u_t + \mathrm{div}(F(u)) = 0$, où F ne dépend de x et t qu'à travers u et montre que la solution à valeurs mesure de ce problème est unique. Cette étape nécessite de supposer u à variations bornées.
Dans le cas où f est croissante, on montre de plus qu'il n'est pas nécessaire de supposer u à variations bornées.

2. Schémas volumes finis pour un système elliptique - hyperbolique linéaire avec une condition aux limites de type Neumann

On se propose dans ce chapitre d'étudier la convergence d'un schéma volumes finis pour un système couplé elliptique - hyperbolique linéaire.

Ce chapitre, hormis les estimations d'erreur en norme L^r de la section 2.3.3 page 35, est publié dans M^{2}AN, voir [41].

La condition aux limites du problème elliptique considéré est de type Neumann et on suppose la solution P régulière (C^2), une extension de ces résultats au cas où P est seulement H^2 est possible comme nous le verrons dans le chapitre 3.

L'équation hyperbolique considérée est linéaire, et on suppose la solution faible du problème u dans L^∞. L'équation étant linéaire la solution faible est unique ; il n'est donc pas nécessaire de considérer les inégalités d'entropie.

Pour discrétiser ces équations, un schéma de type volumes finis est utilisé, puis les résultats présentés par R. Eymard et T. Gallouët dans [14] et R. Herbin dans [23] sont généralisés. En effet, le système considéré dans [14] est le même que celui présenté ici mais les auteurs utilisent un schéma couplé éléments finis-volumes finis ; les inconnues dicrètes sont ainsi localisées aux sommets des mailles alors qu'ici elles sont localisées aux centres des cellules. Pour ce schéma, ils montrent un résultat de convergence vers la solution du système considéré. Le schéma utilisé sur la pression est un schéma éléments finis, ainsi la convergence de la solution approchée associée à l'équation elliptique résulte des travaux sur les éléments finis. Ici, on utilise un schéma volumes finis sur la pression, alors la démonstration de la convergence est donnée en généralisant les résultats de [23]. On montre des estimations d'erreur en norme H^1 discrète de l'ordre de h, où h définit la taille du maillage. L'une des différences essentielles provient des conditions aux limites, puisque dans [23] la condition est de type Dirichlet alors qu'ici on considère une condition de Neumann. Les estimations sont donc changées par les termes de bords. En particulier, pour établir les estimations d'erreur sur P, il est nécessaire de montrer une inégalité de Poincaré Wirtinger discrète, ainsi il faut compter le nombre de mailles, qui sont "après" une maille donnée, dans toutes les directions, alors que dans [23] une seule direction suffit pour établir une inégalité de Poincaré dans H_0^1 discret.

De plus, dans [23] toutes les mailles doivent avoir une mesure du même ordre, alors qu'ici les déformations de mailles sont permises, la convergence se fait alors à la vitesse de la taille de la plus grande maille.
Pour l'équation hyperbolique, un schéma volumes finis décentré vers l'amont de l'écoulement est utilisé, puis, sous une condition de stabilité, la convergence de la solution approchée vers la solution de l'équation hyperbolique est montrée. Pour montrer ce résultat, on a besoin d'une estimation sur la variation de la solution approchée, ceci utilise une estimation sur la norme H^1 discrète de la solution approchée de l'équation elliptique, ce résultat dans [14] est donné par les travaux sur les éléments finis.
Des essais numériques sur la comparaison entre un schéma éléments finis et un schéma volumes finis, réalisés dans [18] pour un problème de conduction, et dans [24] pour un problème de diffusion-convection, ont montré que l'approximation des flux est meilleure pour le schéma volumes finis. De plus, une comparaison, entre le schéma présenté ici et le schéma couplé de R. Eymard et T. Gallouët, a aussi été faite dans [18] sur un système plus général que (2.1)-(2.5), où (2.1) est changée par $\mathrm{div}\Big(f(u(x,t))\,\nabla P(x)\Big)= 0$, $x \in \Omega$, $t \in I\!R_+$. Les tests numériques montrent que le schéma presenté ici donne de meilleurs résultats que le schéma couplé. D'autres auteurs se sont intéressés aux schémas volumes finis sur des maillages triangulaires, voir par exemple [37]. Dans [37], les résultats sont restreints à des mailles particulières, alors qu'ici, comme il a déjà été remarqué, les hypothèses sont plus générales.
Plus récemment R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin ont montré, dans [16], que si la solution exacte P du problème elliptique était seulement $H^1(\Omega)$, la solution approchée, donnée par un schéma volumes finis, converge en norme $L^2(\Omega)$ vers la solution exacte.

2.1 Présentation du problème

Le problème est le suivant : soit Ω un ouvert borné polygonal connexe de $I\!R^2$, on note $\partial\Omega$ le bord de Ω. On considère alors le problème défini par :

$$\Delta P(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u_t(x,t) - \mathrm{div}\Big(u(x,t)\ \nabla P(x)\Big)= 0, \quad x \in \Omega, t \in I\!R_+, \tag{2.2}$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale suivantes :

$$\nabla P(\tau).n(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in \partial\Omega, \tag{2.3}$$

$$u(\tau,t) = \overline{u}(\tau,t), \quad \tau \in \partial\Omega^+, t \in I\!R_+, \tag{2.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω et où $\partial\Omega^+ = \{\tau \in \partial\Omega\ ;\ g(\tau) > 0\}$.

On fait les hypothèses suivantes :

$$
(2.6) \quad \begin{cases} g \in L^\infty(\partial\Omega) \text{ vérifiant la relation de compatibilité :} \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0, \text{ et telle que } P \text{ solution de (2.1) et (2.3) soit } C^2(\overline{\Omega}). \\ \\ u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega^+ \times I\!R_+). \end{cases}
$$

On cherche à déterminer P dans $C^2(\overline{\Omega})$ solution classique de (2.1), (2.3) et u dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ solution de (2.2), (2.4), (2.5) dans le sens faible suivant :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt - \int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\, \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \\
+ \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx + \int_{\partial\Omega^+} \int_{I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, \varphi(\tau,t)\, g(\tau)\, d\tau\, dt = 0
\end{aligned}
$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+)$ avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$.
Il est à noter que les fonctions tests φ sont nulles sur $\partial\Omega^- = \{\tau \in \partial\Omega \; ; \; g(\tau) \leq 0\}$ mais pas nécessairement sur $\partial\Omega^+$.

2.2 Discrétisation

Avant de discrétiser les équations elliptique et hyperbolique, on commence par donner les hypothèses sur le maillage.

2.2.1 Hypothèses sur le maillage

Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω. Soit $p \in \mathcal{T}$, on note h_p le diamètre de p, $N(p)$ l'ensemble des voisins de p et σ_{pq} l'interface entre les mailles p et q. On suppose que $\mathcal{T}$ vérifie les hypothèses de régularité suivantes :

(2.7)

- L'intersection entre deux éléments de $\mathcal{T}$ est soit un point soit un segment, ce segment est alors un côté de chacune des deux mailles considérées.
- Il existe une famille de points $(x_p)_{p\in\mathcal{T}}$ telle que pour tout $p \in \mathcal{T}$, $x_p \in p$ et pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$.
- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $p \in \mathcal{T}$: $d(x_p, \partial p) \geq \alpha\, h_p$
- Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout côté a de p :
$$\alpha_1\, h_p \leq l(a) \leq h_p$$

où $d(.,.)$ est la fistance Euclidienne de IR^2 et $l(a)$ est la longueur de a.
On note alors $h = \max_{p \in \mathcal{T}} h_p$.

Remarque 2.1

1. *On peut considérer différents types de maillage. Par exemple des maillages constitués de rectangles ou de triangles. Un autre exemple classique est celui du maillage de Voronoï qui consiste à se donner un ensemble de sommets (qui deviendront les centres de mailles) puis à reconstruire les mailles en prenant certaines médiatrices des segments joignant les sommets. Ce maillage affecte à un sommet tous les points situés plus près de lui que des autres sommets.*

2. *Dans le cas des triangles, pour que les deux dernières conditions soient vérifiées, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout triangle du maillage et tout angle θ de ce triangle :*

$$\alpha_2 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

3. *Dans le cas des rectangles pour que les deux dernières conditions soit vérifiées, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout rectangle p du maillage, si l'on note l_p la largeur de p et L_p sa longueur, alors :*

$$l_p \geq \alpha_2 \, L_p$$

Quelques notations seront utiles pour décrire le schéma numérique :
NOTATIONS

$\mathcal{T}_{ext}$ l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}$ dont l'intersection avec $\partial\Omega$ est non vide,

$\mathcal{A}_{ext}$ l'ensemble des côtés du maillage qui sont inclus dans $\partial\Omega$,

$\mathcal{A}_{int}$ l'ensemble des côtés du maillage qui sont dans Ω,

$g^+(\tau) = max(g(\tau), 0)$ et $g^-(\tau) = (-g)^+(\tau) \ \forall \ \tau \in \partial\Omega$.

Pour tout $p \in \mathcal{T}$, on note :

$m(p)$ l'aire de p,

$l(a)$ la longueur de a côté de p,

n_p la normale à ∂p extérieure à p,

$N(p)$ l'ensemble des voisins de p,

$\mathcal{A}_{ext}(p)$, l'ensemble des côtés de p situés dans le bord de Ω.

Pour tout $q \in N(p)$, on note :

$\sigma_{pq} = \partial p \cap \partial q$,

$d_{pq} = d(x_p, x_q)$, où $d(\cdot,\cdot)$, est la distance euclidienne de $I\!R^2$,

x_{pq} le centre de σ_{pq},

n_{pq} la normale unitaire à σ_{pq} dirigée de p vers q.

Pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, on note :

$$g_a^+ = \frac{1}{l(a)} \int_a g^+(\tau)\, d\tau,$$

$$g_a^- = \frac{1}{l(a)} \int_a g^-(\tau)\, d\tau,$$

$$g_a = g_a^+ - g_a^- = \frac{1}{l(a)} \int_a g(\tau)\, d\tau.$$

2.2.2 Discrétisation de l'équation elliptique

La solution approchée est constante par maille, elle est définie par :

$$P_{\mathcal{T}}(x) = P_p \text{ si } x \in p,\ p \in \mathcal{T}. \tag{2.8}$$

Pour discrétiser (2.1), on utilise un schéma volumes finis ; le principe des schémas volumes finis (voir [16]) est d'associer à chaque inconnue discrète P_p une équation en intégrant l'équation continue sur le volume de contrôle associé à l'inconnue considérée, ici la maille p. Ainsi, d'après la formule de Green, on a :

$$\int_{\partial p} \nabla P(\tau).n_p(\tau)\, d\tau = \sum_{q \in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}\, d\tau + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a \nabla P(\tau).n(\tau)\, d\tau = 0$$

Il faut alors discrétiser le flux exact défini sur chaque interface σ_{pq} par :

$$\overline{F}_{p,q} = \frac{1}{l(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}\, d\tau$$

On approche ce flux exact par un flux approché, noté $F_{p,q}$.
Afin d'assurer la convergence du schéma, deux propriétés sont fondamentales :

1. La première est une propriété de conservativité, c'est à dire :

$$F_{p,q} = -F_{q,p},$$

2. la deuxième est une propriété de consistance des flux. $F_{p,q}$ doit être une approximation consistante de $\overline{F}_{p,q}$. Cette propriété sera définie plus en détails dans le lemme 2.1.

L'équation discrétisée s'obtient alors en approchant le flux de P à travers l'interface entre p et q par :

$$F_{p,q} = \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}$$

Ainsi on a :

$$\sum_{q \in N(p)} l(\sigma_{pq}) \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) g_a = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{T} \tag{2.9}$$

avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$.

On peut remarquer que sur la frontière du domaine l'approximation du flux est exact.

2.2.3 Discrétisation de l'équation hyperbolique

Avant de discrétiser (2.2), on doit définir le pas de temps k. Soit donc $\mathcal{T}$ un maillage de Ω qui satisfait les hypothèses (2.7) et $\eta \in]0,1[$, on choisit $k \in I\!R_+^*$ qui satisfait la condition suivante :

$$\frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_q > P_p}} l(\sigma_{pq}) \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right) \leq 1 - \eta \qquad \text{pour tout } p \in \mathcal{T}. \tag{2.10}$$

On note alors $t^n = n\, k$ pour tout $n \in I\!N$.

On discrétise tout d'abord la condition initiale et la condition aux limites. On définit u_p^0, pour tout $p \in \mathcal{T}$, par :

$$u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x)\; dx \tag{2.11}$$

et $\overline{u}_a^n$, pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}$ et tout $n \in I\!N$, par :

$$\overline{u}_a^n = \frac{1}{k\; l(a)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \overline{u}(\tau, t)\, d\tau\, dt \tag{2.12}$$

où $\overline{u}$ est prolongée par 0 à $\left(\partial\Omega \setminus \partial\Omega^+\right) \times I\!R_+$.

On approche alors u par $u_{\mathcal{T},k}$ avec :

$$u_{\mathcal{T},k}(x,t) = u_p^n \text{ si } x \in p,\ p \in \mathcal{T},\ \text{et } t \in [t^n, t^{n+1}[,\ n \in I\!N. \tag{2.13}$$

Pour discrétiser (2.2), on utilise un schéma d'Euler explicite en temps, qui peut être vu comme l'intégration de (2.2) sur un pas de temps. De plus comme pour l'équation elliptique, on intègre également l'équation sur chaque maille, on obtient :

$$\int_p \frac{u(x,t^{n+1}) - u(x,t^n)}{k}\, dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial p} u(\tau,t)\ \nabla P(\tau).n_p\ d\tau\, dt = 0$$
$$\text{pour tout } p \in \mathcal{T} \text{ et tout } n \in I\!N$$

On a alors pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$:

$$\int_{\partial p} u(\tau,t)\ \nabla P(\tau).n_p\ d\tau\, dt = \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} u(\tau,t)\ \nabla P(\tau).n_{pq}\ d\tau\, dt + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a u(\tau,t)\ \nabla P(\tau).n_p\ d\tau\, dt.$$

On approche le flux de P à travers l'interface entre p et q par le flux $F_{p,q}$ défini dans le paragraphe précédent. Puis on choisit comme valeur de u aux interfaces des mailles, ainsi qu'au bord, une valeur discrète décentrée vers l'amont de l'écoulement. Alors, l'équation discretisée est donnée par :

$$m(p)\,(u_p^{n+1} - u_p^n) - k \sum_{q\in N(p)} u_{pq}^n\, l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} - k \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(\overline{u}_a^n\, g_a^+ - u_p^n\, g_a^-\right) = 0 \tag{2.14}$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$ et où :

$$u_{pq}^n = \begin{cases} u_p^n & \text{si } P_p > P_q, \\ u_q^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il sera plus facile de travailler, non pas sur (2.14), mais sur la formulation équivalente suivante :

$$m(p)\,(u_p^{n+1} - u_p^n) + k \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\left(u_p^n - u_q^n\right) \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + k \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(u_p^n - \overline{u}_a^n\right) g_a^+ = 0$$
$$\text{pour tout } p \in \mathcal{T} \text{ et tout } n \in I\!N, \tag{2.15}$$

obtenue en remarquant qu'en utilisant le schéma sur l'équation elliptique (2.9) :

$$-\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q<P_p}} u_p^n\, l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} u_p^n\, l(a)\, g_a^- = \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} u_p^n\, l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} u_p^n\, l(a)\, g_a^+$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$.

2.3 Convergence du schéma pour l'équation elliptique

On montre tout d'abord dans cette section l'existence et l'unicité à une constante près de la solution du schéma numérique sur l'équation elliptique (2.9). On établit alors la convergence du schéma en montrant une estimation d'erreur en norme H^1 discrète. Enfin, on montre des estimations d'erreur en norme L^r pour tout $1 \leq r \leq +\infty$.

2.3.1 Existence et unicité de la pression approchée

Proposition 2.1 *Soit Ω un ouvert borné, polygonal et connexe de $I\!R^2$. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7). Soit $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ tel que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. Alors il existe une solution $P_{\mathcal{T}}$ de (2.8) et (2.9), unique à une constante près.*

Démonstration de la proposition 2.1

On s'intéresse tout d'abord au noyau de l'application linéaire définie par (2.9).
Soit donc $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9), on suppose que

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a = 0 \qquad \forall\, p \in \mathcal{T} \tag{2.16}$$

et on va montrer que :

$$P_p = P_q \quad \forall\, p, q \in \mathcal{T}.$$

Soit $p_0 \in \mathcal{T}$ tel que $P_{p_0} = \min_{p \in \mathcal{T}} P_p$, d'après le schéma sur l'équation elliptique (2.9) et (2.16), on a :

$$\sum_{q \in N(p_0)} l(\sigma_{p_0 q})\, \frac{P_q - P_{p_0}}{d_{p_0 q}} = 0$$

et donc :

$$P_q = P_{p_0} \quad \forall\, q \in N(p_0)$$

Comme Ω est connexe, on obtient :

$$P_p = P_q \quad \forall\, p, q \in \mathcal{T}. \tag{2.17}$$

Ainsi le noyau de l'application linéaire définie par (2.9) est de dimension 1.

Intéressons nous alors à l'image de cette application. Pour cela, supposons qu'il existe $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9) et sommons ces équations on obtient :

$$\sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a = \int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0$$

Comme le noyau est de dimension 1, d'après ce qui précède, l'image de ce système linéaire est l'ensemble des $B \in I\!R^L$, $B = {}^t(b_1, b_2, \ldots, b_L)$ tels que $\sum_{j=1}^{L} b_j = 0$, où $L = card(\mathcal{T})$.
Comme $\sum_{j=1}^{L} b_j = \int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0$, il existe une solution $P_{\mathcal{T}}$ de (2.8) et (2.9), et d'après (2.17), elle est unique à une constante près.
Ce qui termine la démonstration de la proposition 2.1.

2.3.2 Estimation d'erreur en norme H^1 discrète

Théorème 2.1 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7). Soit $g \in L^\infty(\partial\Omega)$, on note $P(\cdot)$ la solution de (2.1), (2.3) telle que $\int_\Omega P(x)\, dx = 0$. On suppose g telle que P est dans $C^2(\overline{\Omega})$. Soit $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9) et telle que $\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, P_p = \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, P(x_p)$ où x_p est défini en (2.7). On définit l'erreur sur la maille p par $e_p = P_p - P(x_p)$ pour tout $p \in \mathcal{T}$.*

Alors il existe C, ne dépendant que de α, α_1, Ω et des dérivées secondes de P, telle que :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{(e_q - e_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \right)^{1/2} \leq C\, h \tag{2.18}$$

et

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^2 \right)^{1/2} \leq C\, h \tag{2.19}$$

Remarque 2.2 *Remarquons que la première estimation peut être interprétée comme une estimation d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ discrète. En effet, le gradient discret de l'erreur est défini sur chaque côté σ_{pq} par $\dfrac{e_q - e_p}{d_{pq}}$, et donc peut être vu comme une fonction constante sur chaque maille duale $\mathcal{V}_{pq} = \mathcal{V}_{pq}^+ \cup \mathcal{V}_{pq}^-$ qui est le quadrangle dont les sommets sont x_p, x_q et les deux sommets de σ_{pq}, voir figure 2.1.*
Or $m\big(\mathcal{V}_{pq}\big) = \dfrac{1}{2}\, l(\sigma_{pq})\, d_{pq}$, ainsi :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \left(\frac{e_q - e_p}{d_{pq}} \right)^2 l(\sigma_{pq})\, d_{pq}$$

est bien la norme $L^2(\Omega)$ de la fonction constante sur chaque maille $\mathcal{V}_{pq}$ égale à $\dfrac{e_q - e_p}{d_{pq}}$.
La deuxième estimation d'erreur étant en norme $L^2(\Omega)$, ce théorème donne bien une estimation en norme $H^1(\Omega)$ discrète.

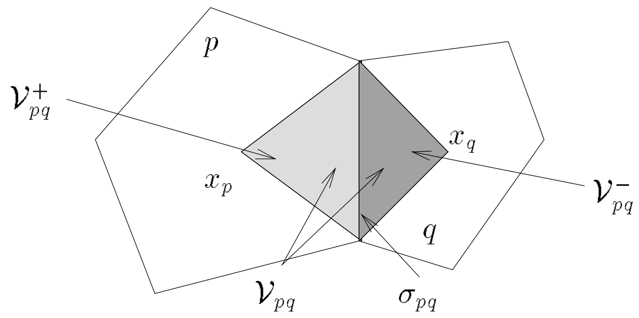

FIG. *2.1 - maillage dual*

Afin de démontrer ce résultat, on commence par établir la consistance du schéma au sens volumes finis (voir [16]), et donc par définir l'erreur de consistance sur les flux.

Définition de l'erreur de consistance sur les flux

Comme il a déjà été remarqué dans la section 2.2.2, les flux sont exacts sur le bord du domaine, on ne définit donc l'erreur de consistance qu'aux interfaces des mailles c'est à dire sur les côtés intérieurs au domaine.

Soit $p \in \mathcal{T}$ et $q \in N(p)$, le flux exact sur le côté σ_{pq} dans la direction de p vers q est :

$$\overline{F}_{p,q}(P) = \frac{1}{l(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{p,q}(\tau)\, d\tau$$

et le flux approché sur le côté σ_{pq} dans la même direction est :

$$F_{p,q}(P) = \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}$$

On définit l'erreur de consistance sur le flux de pression, notée $R_{p,q}(P)$, sur le côté σ_{pq} pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, par :

$$R_{p,q}(P) = \overline{F}_{p,q}(P) - \frac{P(x_q) - P(x_p)}{d_{pq}}$$

On peut remarquer que la conservativité des flux exacts et approchés implique :

$$R_{p,q}(P) = -R_{q,p}(P)$$

On montre alors le résultat suivant qui établit la consistance du schéma au sens volumes finis, c'est à dire la consistance des flux :

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7).*

Soit $g \in L^\infty(\partial\Omega)$, on note $P(\cdot)$ la solution de (2.1), (2.3) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose g telle que P est dans $C^2(\overline{\Omega})$.

Alors, il existe C, ne dépendant que de α, α_1 et des dérivées secondes de P, telle que :

$$|R_{p,q}(P)| \leq C\,h \quad \forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } \forall\, q \in N(p)$$

Preuve du lemme 2.1

En utilisant un développement de Taylor, on montre qu'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ ne dépendant que de α, α_1 et des dérivées secondes de P telles que :

$$\begin{aligned}|R_{p,q}(P)| &\leq \left|\frac{1}{l(\sigma_{pq})}\int_{\sigma_{pq}} \nabla P.n_{p,q}\;d\tau - \nabla P(x_{pq}).n_p\right| + \left|\nabla P(x_{pq}).n_{p,q} - \frac{P(x_q)-P(x_p)}{d_{pq}}\right| \\ &\leq C_1.h + C_2.h\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.1

On montre alors le premier résultat du théorème 2.1, i.e. l'estimation d'erreur en norme H_0^1 discrète.

Démonstration de l'estimation d'erreur en norme H_0^1 discrète : (2.18)

En intégrant l'équation (2.1) sur $p \in \mathcal{T}$ et en utilisant la formule de Green, il vient :

$$\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\overline{F}_{p,q}(P) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,g_a = 0 \tag{2.20}$$

On soustrait le schéma sur l'équation elliptique (2.9) à (2.20), on multiplie par e_p, et on somme sur $p \in \mathcal{T}$, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} R_{p,q}(P)\,l(\sigma_{pq})\,e_p - \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{e_q-e_p}{d_{pq}}\,e_p = 0$$

alors en utilisant la conservativité des flux exacts et approchés, on a :

$$\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{\left(e_q-e_p\right)^2}{d_{pq}} = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} R_{p,q}(P)\,l(\sigma_{pq})\left(e_q-e_p\right)$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{\left(e_q-e_p\right)^2}{d_{pq}}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} R_{p,q}(P)^2\,l(\sigma_{pq})\,d_{pq}\right)^{1/2}$$

On conclut en utilisant le lemme 2.1 et en remarquant que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, d_{pq} = 2\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} m(\mathcal{V}_{pq}) = 2\, m(\Omega) \tag{2.21}$$

on obtient :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{\left(e_q-e_p\right)^2}{d_{pq}}\right)^{1/2} \leq C\, h\sqrt{2\, m(\Omega)}$$

où $m(\Omega)$ est l'aire de Ω et où C ne dépend que de α, α_1 et des dérivées secondes de P.

On termine alors la démonstration du théorème 2.1 en établissant la deuxième estimation de ce dernier, i.e. l'estimation d'erreur en norme $L^2(\Omega)$.

Démonstration de l'estimation d'erreur en norme $L^2(\Omega)$: (2.19)

Cette estimation d'erreur est montrée en utilisant une inégalité de Poincaré-Wirtinger discrète, i.e. le résultat suivant :

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7). Soit e une fonction constante par maille sur $\mathcal{T}$, i.e. $e(x) = e_p$ pour tout $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.*
Il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, telle que :

$$\int_{\Omega}\left|e(x) - moy_{\Omega}(e)\right|^2 dx \leq C\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q-e_p|^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \tag{2.22}$$

où $moy_{\Omega}(e) = \dfrac{1}{m(\Omega)}\displaystyle\int_{\Omega} e(x)\, dx = \dfrac{1}{m(\Omega)}\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, e_p,$

Ce résultat sera montré en quatre étapes. Dans la première étape on l'établit sur un carré, dans la deuxième on le montre sur un triangle rectangle. On l'étend à un triangle quelconque dans la troisième étape, enfin dans la dernière étape, on termine en montrant cette propriété sur une union finie de triangles.

Etape 1 :

Soit $\mathcal{C}$ un carré inclus dans $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux directions définies par $\mathcal{C}$, voir figure 2.2.
On note $d = |b - c|$ et on suppose $d \geq 2\, h$. On choisit comme système de coordonnées le système défini par un point quelconque de $I\!R^2$ et les deux directions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
On définit $\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}$ l'ensemble des côtés a de $\mathcal{A}_{int}$ tels que $a \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.
Pour tout $a \in \mathcal{A}_{int}$, on note :

- $\varphi_a(x, z)$ pour tout $x, z \in I\!R^2$, la fonction qui vaut 1 si le segment $[x, z]$ coupe a en un point, 0 sinon.

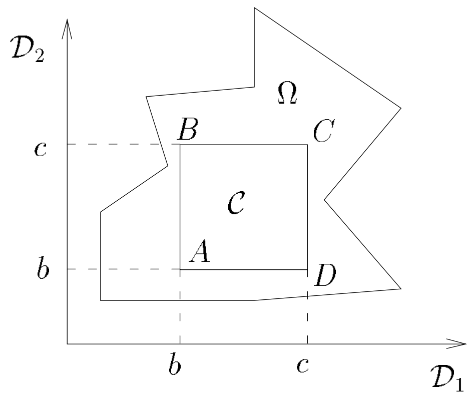

Fig. 2.2 -

- $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$ les deux mailles situées de part et d'autre de a,
- $e_{a,+}$ et $e_{a,-}$ les valeurs de e sur les mailles $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$,
- d_a la distance entre $x_{p_{a,+}}$ et $x_{p_{a,-}}$, où $x_{p_{a,+}}$ et $x_{p_{a,-}}$ sont définis en (2.7)
- $\theta_{a,1}$ l'angle entre a et $\mathcal{D}_1$ tel que $\theta_{a,1} \in [0, \pi/2]$

Soient p et q dans $\mathcal{T}$ tels que $p \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ et $q \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Soient $x = (x_1, x_2) \in p \cap \mathcal{C}$ et $y = (y_1, y_2) \in q \cap \mathcal{C}$. On intègre alors le long d'un chemin joignant (x_1, x_2) à (y_1, y_2), voir figure 2.3.

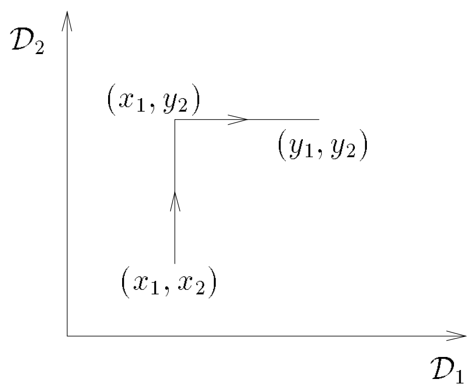

Fig. 2.3 -

Alors, on a :

$$\Big|e(x) - e(y)\Big| = \Big|e_p - e_q\Big| \leq \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \; \varphi_a\Big((x_1, x_2), (x_1, y_2)\Big)$$

$$+ \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \; \varphi_a\Big((x_1,y_2),(y_1,y_2)\Big)$$

p.p. $y \in \mathcal{C}\cap\Omega$, $\forall\; x \in \mathcal{C}\cap\Omega$.
En intégrant sur $\mathcal{C}\cap\Omega$ par rapport à y, on obtient pour tout $x \in \mathcal{C}\cap\Omega$:

$$d^2 \left|e_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)\right| \le d^2 \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \; \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)$$
$$+ d \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \int_b^c \varphi_a\Big((b,y_2),(c,y_2)\Big)\, dy_2$$

où $\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e) = \dfrac{1}{m(\mathcal{C})}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} e(x)\,dx = \dfrac{1}{m(\mathcal{C})}\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\, e_p$.
Remarquons alors que pour $a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}$ fixé l'ensemble des points $y_2 \in [b,c]$, tels que $\varphi_a\Big((b,y_2),(c,y_2)\Big) \neq 0$, est la projection de a sur $\mathcal{D}_2$ et donc un segment de longueur $l(a)\,\sin\theta_{a,1}$. Ainsi :

$$d\,|e_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)| \le d \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \; \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)$$
$$+ \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} |e_{a,+} - e_{a,-}| \; l(a)\,\sin\theta_{a,1}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$d^2\,|e_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)|^2 \le 2 \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+} - e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)\right)\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} l(a)\, d_a\, \sin\theta_{a,1}\right)$$
$$+2\,d^2 \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+} - e_{a,-}|^2}{d_a\,\cos\theta_{a,1}}\, \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)\right)$$
$$\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} d_a\,\cos\theta_{a,1}\, \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)\right)$$

et donc :

$$d^2\,|e_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)|^2 \le 4\left(d + 2\,h\right)^2 \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+} - e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)\right)$$
$$+2\,d^2\Big(d+2\,h\Big)\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+} - e_{a,-}|^2}{d_a\,\cos\theta_{a,1}}\, \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)\right)$$

On intègre alors par rapport à x_1 sur $[b,c]$ et on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\left(p\cap\Big[(b,x_2),(c,x_2)\Big]\right)\; |e_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)|^2 \le 20\,d \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+} - e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)$$
$$\text{pour tout } x_2 \in [b,c]. \tag{2.23}$$

De la même façon, on montre :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\left(p\cap\left[(x_1,b),(x_1,c)\right]\right)\,|e_p-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)|^2 \le 20\,d \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a)$$

(2.24) pour tout $x_1\in[b,c]$.

Ces deux inéquations vont nous permettre de passer à une union finie de triangles dans la dernière étape.
On conclut cette étape en intégrant (2.23) par rapport à $x_2\in[b,c]$ ou (2.24) par rapport à $x_1\in[b,c]$, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\,|e_p-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(e)|^2 \le 20\,d^2 \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a) \tag{2.25}$$

Etape 2 :

Dans cette étape on montre l'inégalité (2.25) sur un triangle rectangle noté T, ainsi que des inégalités similaires à (2.23) et (2.24). On note H l'hypothénuse de T et I et J les deux autres côtés de T.
On utilise la symétrie orthogonale par rapport à l'hypothénuse H de T. On construit $\overline{e}$ constant par morceaux sur $\mathcal{C}$ de la façon suivante :
$\overline{e}(x)=e_p$ si x appartient à $p\cap T$ ou x appartient au symétrique orthogonal de $p\cap T$ par rapport à l'hypothénuse de T, voir figure 2.4.
On est donc ramené au problème de l'étape 1, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathcal{T}} l\big(p\cap I\big)\,|e_p-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(\overline{e})|^2 &\le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \frac{|\overline{e}_{a,+}-\overline{e}_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a)\\ &= 2\,C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a)\end{aligned}$$

où C ne dépend que de T.
Remarquons alors que :

$$\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(\overline{e}) = \frac{1}{m(\mathcal{C})}\int_{\mathcal{C}} \overline{e}(x)\,dx = \frac{1}{2\,m(T)}\int_T 2\,e(x)\,dx = \mathrm{moy}_T(e)$$

Donc d'après (2.24) :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\big(p\cap I\big)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le 2\,C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a)$$

où C ne dépend que de T.
De même d'après (2.23) :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\big(p\cap J\big)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le 2\,C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\,l(a)$$

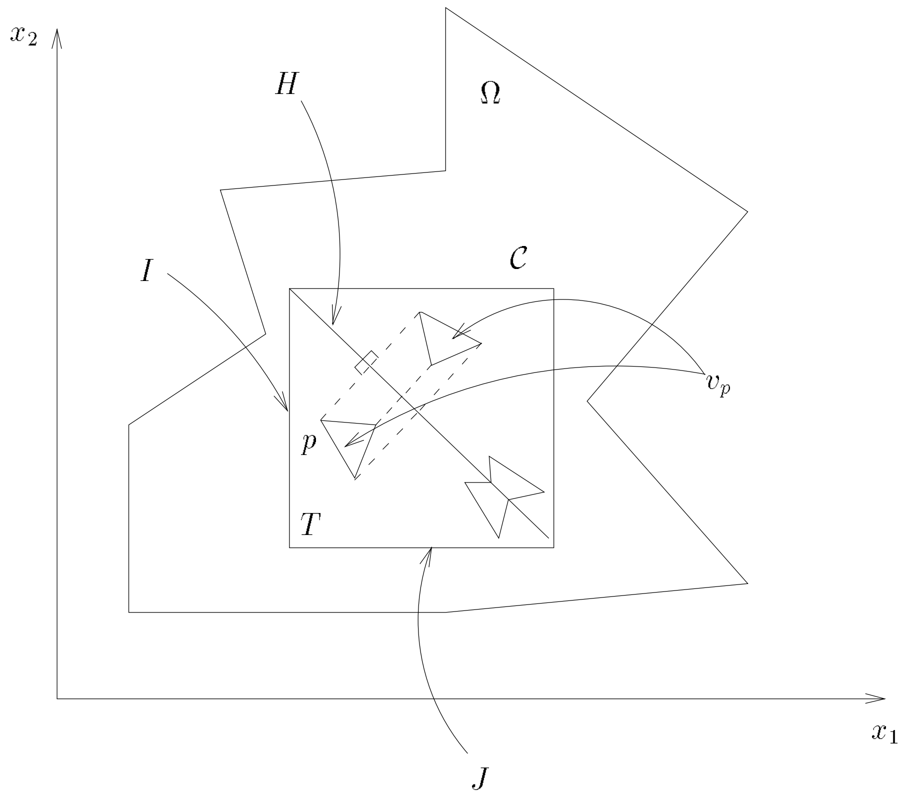

FIG. 2.4 -

et d'après (2.25) :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T)\,|e_p - \mathrm{moy}_T(e)|^2 \leq C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C ne dépend que de T.
Afin d'obtenir l'estimation sur H, on procède de la même façon en effectuant deux symétries, une par rapport à I et l'autre par rapport à la droite portant J, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap H\Big)\,|e_p - \mathrm{moy}_T(e)|^2 \leq C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C ne dépend que de T. Ce qui termine l'étape 2.

Etape 3 :

On étend ces résultats à un triangle quelconque T inclus dans $\overline{\Omega}$.
Pour cela, on décompose T en deux triangles rectangles T_1 et T_2, voir figure 2.5.

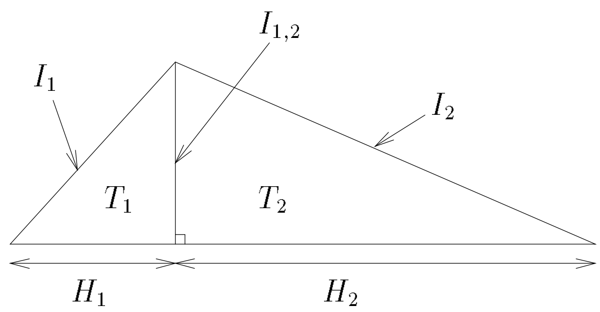

FIG. 2.5 -

On note H_1 et H_2 les deux côtés de T inclus respectivement dans $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$, et I le côté de T ayant une partie dans $\overline{T}_1$, que l'on note I_1, et une partie dans $\overline{T}_2$, que l'on note I_2. De plus, on note $I_{1,2}$ l'interface entre T_1 et T_2.
Remarquons que, comme

$$\operatorname{moy}_T(e) = \frac{m(T_1)\operatorname{moy}_{T_1}(e) + m(T_2)\operatorname{moy}_{T_2}(e)}{m(T)}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T_1)\ |e_p - \operatorname{moy}_T(e)|^2 \le 2 &\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T_1)\ \Big|e_p - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2\right. \\ &\left. +m(T_1)\ \frac{m(T_2)}{m(T)} \Big|\operatorname{moy}_{T_2}(e) - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

D'après l'étape 3 on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T_1)\ \Big|e_p - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 \le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_1}} \frac{|e_{a,-} - e_{a,+}|^2}{d_a}\ l(a) \tag{2.27}$$

où C ne dépend que de T_1.
Il ne reste donc plus qu'à estimer la différence entre $\operatorname{moy}_{T_2}(e)$ et $\operatorname{moy}_{T_1}(e)$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in I_{1,2}$, alors :

$$\Big|\operatorname{moy}_{T_2}(e) - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 \le 2\left(\Big|e(x_1,x_2) - \operatorname{moy}_{T_2}(e)\Big|^2 + \Big|e(x_1,x_2) - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2\right)$$

En intégrant sur $I_{1,2}$, il vient :

$$\begin{aligned} l(I_{1,2})\ \Big|\operatorname{moy}_{T_2}(e) - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 \le 2 &\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap I_{1,2}\Big)\ \Big|e_p - \operatorname{moy}_{T_1}(e)\Big|^2\right. \\ &\left. + \sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap I_{1,2}\Big)\ \Big|e_p - \operatorname{moy}_{T_2}(e)\Big|^2\right) \end{aligned}$$

D'après l'étape précédente, on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap I_{1,2}\Big)\,\Big|e_p-\mathrm{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 \le C_1 \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_1}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)$$

et

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap I_{1,2}\Big)\,\Big|e_p-\mathrm{moy}_{T_2}(e)\Big|^2 \le C_2 \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_2}} \frac{|e_{a,+}-e_{a,-}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C_1 ne dépend que de T_1 et ou C_2 ne dépend que de T_2, donc :

$$l(I_{1,2})\,\Big|\mathrm{moy}_{T_2}(e)-\mathrm{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 \le C\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_1}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_2}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a)\right)$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
En reportant ce résultat ainsi que (2.27) dans (2.26), on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T_1)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
De la même façon, on montre que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T_2)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
Et donc :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap T)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a) \tag{2.28}$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
De plus, on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap H_1\Big)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le 2\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap H_1\Big)\,\Big|e_p-\mathrm{moy}_{T_1}(e)\Big|^2 + \frac{l(H_1)\,m(T_2)}{m(T)}\,\Big|\mathrm{moy}_{T_1}(e)-\mathrm{moy}_{T_2}(e)\Big|\right)$$

et donc, avec un raisonnement identique, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap H_1\Big)\,|e_p-\mathrm{moy}_T(e)|^2 \le C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\, l(a)$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
De même :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap H_2\Big)\,|e_p-\text{moy}_T(e)|^2 \leq C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\,l(a)$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2.
Et

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathcal{T}} l\Big(p\cap I\Big)\,|e_p-\text{moy}_T(e)|^2 &= \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big[l\Big(p\cap I_1\Big)+l\Big(p\cap I_2\Big)\Big]\;|e_p-\text{moy}_T(e)|^2 \\ &\leq C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\,l(a)\end{aligned}$$

où C ne dépend que de T_1 et T_2. Ceci termine l'étape 3.

Etape 4 :

On procède comme dans l'étape 3, pour l'établissement de (2.28), afin d'établir cette dernière sur une union finie de triangles, c'est à dire sur n'importe quel polygone de $I\!R^2$.
Ainsi :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\;|e_p-\text{moy}_\Omega(e)|^2 \leq m(T)\,C \sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\,l(a) \tag{2.29}$$

où C ne dépend que du nombre de triangles utilisés dans la décomposition de Ω.
Comme :

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \frac{|e_{a,-}-e_{a,+}|^2}{d_a}\,l(a) = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{|e_p-e_q|^2}{d_{pq}}\,l(\sigma_{pq})$$

(2.29) donne l'inégalité de Poincaré Wirtinger (2.22) annoncée dans le lemme 2.2.
Ceci termine la démonstration de l'estimation d'erreur en norme $L^2(\Omega)$ (2.19). En effet, on a supposé :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P_p = \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P(x_p)$$

donc :

$$\text{moy}_\Omega(e) = \frac{1}{m(\Omega)}\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,e_p = 0$$

et donc d'après (2.18) et (2.22), il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,e_p^2 \leq C\,h^2$$

où C ne dépend que de α, α_1, α_2, Ω et des dérivées secondes de P.

Remarque 2.3 *Une autre démonstration de ce résultat est possible (communication personnelle de M. Crouzeix). On suppose tout d'abord Ω convexe. On considère alors u de moyenne nulle et solution du problème suivant :*

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x) = e(x) - moy_\Omega(e) & x \in \Omega \\ \\ \nabla u(\tau).n(\tau) = 0 & \tau \in \partial\Omega \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |e(x) - moy_\Omega(e)|^2\,dx &= \int_\Omega \Delta u(x)\,(e(x) - moy_\Omega(e))\,dx = \int_\Omega \Delta u(x)\,e(x)\,dx \\ &= \sum_{p\in\mathcal{T}} e_p \int_p \Delta u(x)\,dx = \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} e_p \int_{\sigma_{pq}} \nabla u(\tau).n_{pq}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} (e_p - e_q) \int_{\sigma_{pq}} \nabla u(\tau).n_{pq}\,d\tau \\ &\le \frac{1}{2} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{(e_p - e_q)^2}{d_{pq}} \right)^{1/2} \times \\ &\qquad \times \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{d_{pq}}{l(\sigma_{pq})} \left| \int_{\sigma_{pq}} \nabla u(\tau).n_{pq}\,d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et comme d'après (2.7) $\dfrac{d_{pq}}{l(\sigma_{pq})} \le \dfrac{1}{\alpha_1}$, *il suffit donc de montrer qu'il existe C telle que :*

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \left| \int_{\sigma_{pq}} \nabla u(\tau).n_{pq}\,d\tau \right|^2 \le C^2 \int_\Omega |e(x) - moy_\Omega(e)|^2\,dx$$

Ceci résulte de la régularité $H^2(\Omega)$ et de l'inégalité suivante, que l'on établit par passage à un triangle de référence,

$$\left| \int_{\sigma_{pq}} \nabla u(\tau).n_{pq}\,d\tau \right|^2 \le K \left(\int_{\mathcal{V}_{pq}^+} |\nabla u(x)|^2\,dx + \left(\int_{\mathcal{V}_{pq}^+} |D^2 u(x)|\,dx \right)^2 \right)$$

Ce qui termine la démonstration de l'inégalité de Poincaré Wirtinger discrète dans le cas où Ω est convexe.
Si Ω n'est pas convexe, u est alors la somme d'une fonction régulière et de fonctions singulières que l'on connait explicitement.
Une autre démonstration simple, et qui de plus affaiblit les hypothèses sur le maillage, est possible dans le cas où Ω est convexe, voir [16].

2.3.3 Estimation d'erreur en norme L^r pour tout $1 \leq r \leq +\infty$

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7). Soit $g \in L^\infty(\partial\Omega)$, on note $P(\cdot)$ la solution exacte de (2.1), (2.3) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose de plus g telle que P soit dans $C^2(\overline{\Omega})$. Soit $(P_p)_{p\in\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.9) et telle que :*

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P_p = \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P(x_p)$$

où l'on rappelle que x_p est défini en (2.7). On définit e l'erreur par $e(x) = e_p = P_p - P(x_p)$ si $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.
Alors, il existe C, ne dépendant que de α, α_1, Ω et des dérivées secondes de P, telle que :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} \leq r\,C\,h \tag{2.30}$$

pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$.

De plus si $\mathcal{T}$ vérifie la propriété suivante :

$$\textit{Il existe } \alpha_3 \textit{ tel que pour tout } p \in \mathcal{T} \;:\; m(p) \geq \alpha_3\,h^2 \tag{2.31}$$

Alors, il existe C ne dépendant que de α, α_1, α_3 et de Ω, telle que :

$$\|e\|_\infty \leq C\,h\,|\ln(h)|$$

pour tout h tel que $h \leq \dfrac{1}{\alpha_3}\exp\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

Démonstration du théorème 2.2 :

On utilise les notations introduites dans la démonstration du lemme 2.2 page 26. Afin d'établir ce résultat on utilise les deux lemmes suivants, que l'on démontrera par la suite :

Lemme 2.3 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage quelconque de Ω. Soit v une fonction constante par maille sur $\mathcal{T}$, i.e. $v(x) = v_p$ pour tout $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.*
Alors, il existe C ne dépendant que de Ω, telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|v_p|^2\right)^{1/2} \leq C\left[\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \left|v_{a,+} - v_{a,-}\right| l(a) + \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|v_p|\right] \tag{2.32}$$

Lemme 2.4 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7). Soit e une fonction constante par maille sur $\mathcal{T}$, i.e. $e(x) = e_p$ pour tout $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.*
Alors il existe C ne dépendant que de α, α_1 et de Ω, telle que :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} \leq C\,r\left[\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q-e_p|^2}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\right)^{1/2} + \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^2\right)^{1/2}\right] \tag{2.33}$$

pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$.

On utilise le lemme 2.4 ainsi que l'estimation d'erreur en norme $H^1(\Omega)$ discrète, on obtient :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} \leq C\,r\,h$$

où C ne dépend que de α, α_1, Ω et des dérivées secondes de P.
Pour obtenir l'estimation en norme infinie, on remarque que, d'après l'hypothèse (2.31) et l'inégalité (2.33), pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$:

$$\alpha_3^{1/r}\,h^{2/r}\,\|e\|_\infty \leq \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} \leq C\,r\,h$$

où C ne dépend que de α, α_1, Ω et des dérivées secondes de P.
Donc :

$$\|e\|_\infty \leq C\,r\left(\alpha_3\,h\right)^{1-2/r}$$

où C ne dépend que de α, α_3 et de Ω.
Il suffit d'étudier la fonction réelle $r \mapsto f(r) = r\left(\alpha_3\,h\right)^{1-2/r}$.
Cette fonction atteint son maximum en $r = -2\,\ln(\alpha_3\,h)$ dès que $\ln(\alpha_3\,h) \leq -\dfrac{1}{2}$ (car $r \geq 1$).
Donc il existe C ne dépendant que de α, α_1, α_3 et de Ω telle que

$$\|e\|_\infty \leq C\,h\,|\ln h|$$

pour tout h tel que $h \leq \dfrac{1}{\alpha_3}\exp\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.
Ce qui termine la démonstration du théorème 2.2.

Remarque 2.4
L'estimation (2.32) donne l'injection discrète de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et l'estimation (2.33) donne l'injection discrète de $H^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$.

Il reste alors à démontrer les lemmes 2.3 et 2.4.

Démonstration du lemme 2.3 :

Pour cela, on procède en quatre étapes comme pour l'inégalité de Poincaré Wirtinger discrète (lemme 2.2 page 26). On montre tout d'abord le résultat sur un carré inclus dans $\overline{\Omega}$, puis sur un triangle rectangle. On l'étend à un triangle quelconque dans la troisième étape. Enfin on conclut dans la dernière étape sur une union finie de triangles.

Etape 1 :

Soit $\mathcal{C}$ un carré inclus dans $\overline{\Omega}$. On note $d = |b - c|$ et on suppose $d \geq 2\,h$. On choisit comme système de coordonnées celui défini par un point quelconque de $I\!R^2$ et les deux directions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par $\mathcal{C}$ (voir figure 2.2 page 27).
Soient p et q dans $\mathcal{T}$, tels que $p \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ et $q \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Soient $x = (x_1, x_2) \in p \cap \mathcal{C}$ et $y = (y_1, y_2) \in q \cap \mathcal{C}$.
Alors :

$$|v(x) - v(y)| = |v_p - v_q| \leq \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((x_1, b), (x_1, c)\Big) + \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((b, y_2), (c, y_2)\Big)$$

et

$$|v(x) - v(y)| \leq \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((b, x_2), (c, x_2)\Big) + \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((y_1, b), (y_1, c)\Big)$$

On intègre ces deux inéquations sur $\mathcal{C}$ par rapport à y, il vient :

$$d^2 \Big|v_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\Big| \leq \int_{\Omega} \Big|v(x) - v(y)\Big|\, dy \leq d^2 \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((x_1, b), (x_1, c)\Big) + d \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, l\,(a \cap \mathcal{C})$$

et

$$d^2 \Big|v_p - \mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\Big| \leq d^2 \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, \varphi_a\Big((b, x_2), (c, x_2)\Big) + d \sum_{a \in \mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, l\,(a \cap \mathcal{C})$$

où $\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v) = \dfrac{1}{m(\mathcal{C})} \displaystyle\int_{\mathcal{C}} v(x)\, dx$.

On multiplie alors ces deux inégalités entre elles et on intègre sur $\mathcal{C}$ par rapport à x, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\left|v_p-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\right|^2 \leq \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right|\int_b^c \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)\,dx_1\right)$$
$$\times\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right|\int_b^c \varphi_a\Big((b,x_2),(c,x_2)\Big)\,dx_2\right)$$
$$+\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right|\int_b^c \varphi_a\Big((x_1,b),(x_1,c)\Big)dx_1\right)\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap\mathcal{C})\right)$$
$$+\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right|\int_b^c \varphi_a\Big((b,x_2),(c,x_2)\Big)dx_2\right)\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap\mathcal{C})\right)$$
$$+\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap\mathcal{C})\right)^2$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\left|v_p-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\right|^2 \leq 4\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap\mathcal{C})\right)^2 \tag{2.34}$$

On remarque alors que :

$$\|v\|^2_{L^2(\mathcal{C})} = \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\,|v_p|^2 \leq 2\,d^2\left(\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\right)^2 + 2\,\|v-\mathrm{moy}_{\mathcal{C}}(v)\|^2_{L^2(\mathcal{C})}$$

Ainsi d'après (2.34) :

$$\|v\|^2_{L^2(\mathcal{C})} \leq 2\,d^2\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p\cap\mathcal{C})\,|v_p|\right)^2 + 8\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,\mathcal{C}}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap\mathcal{C})\right)^2 \tag{2.35}$$

Ce qui termine l'étape 1

Etape 2 :

Soit T un triangle rectangle inclus dans $\overline{\Omega}$, on suppose que $T=(ABD)$ est la moitié de $\mathcal{C}$ (voir figure 2.2 page 27). On construit $\overline{v}$ constant par morceaux sur $\mathcal{C}$ de la façon suivante :
$\overline{v}(x)=v_p$ si x appartient à $p\cap T$ ou x appartient au symétrique orthogonale de $p\cap T$ par rapport à l'hypothénuse de T, voir figure 2.4 page 30.
D'après l'étape précédente :

$$\int_{\mathcal{C}} |\overline{v}(x)|^2\,dx = 2\int_T |v(x)|^2\,dx \leq 2\,d^2\left(2\int_T |v(x)|\,dx\right)^2$$
$$+8\left(2\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}}\left|v_{a,+}-v_{a,-}\right| l\,(a\cap T)\right)^2$$

et donc :

$$\int_T |v(x)|^2\,dx \leq 4\,d^2 \left(\int_T |v(x)|\,dx\right)^2 + 32 \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} \Big|v_{a,+} - v_{a,-}\Big|\, l\,(a\cap T)\right)^2$$

Ce qui termine l'étape 2.

Etape 3 :

On étend ce résultat à un triangle quelconque T inclus dans $\overline{\Omega}$.
Pour cela, on décompose T en deux triangles rectangles T_1 et T_2, voir figure 2.5.
D'après l'étape précédente, on a :

$$\int_{T_1} |v(x)|^2\,dx \leq C_1 \left[\|v\|^2_{L^1(T_1)} + \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_1}} |v_{a,+} - v_{a,-}|\, l(a\cap T_1)\right)^2\right] \tag{2.36}$$

où C_1 ne dépend que de T_1.
Et :

$$\int_{T_2} |v(x)|^2\,dx \leq C_2 \left[\|v\|^2_{L^1(T_2)} + \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_2}} |v_{a,+} - v_{a,-}|\, l(a\cap T_2)\right)^2\right] \tag{2.37}$$

où C_2 ne dépend que de T_2.
Donc :

$$\begin{aligned}\int_T |v(x)|^2\,dx &= \int_{T_1} |v(x)|^2\,dx + \int_{T_2} |v(x)|^2\,dx \\ &\leq C_1 \left[\|v\|^2_{L^1(T_1)} + \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_1}} |v_{a,+} - v_{a,-}|\, l(a\cap T_1)\right)^2\right] \\ &\quad + C_2 \left[\|v\|^2_{L^1(T_2)} + \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T_2}} |v_{a,+} - v_{a,-}|\, l(a\cap T_2)\right)^2\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_T |v(x)|^2\,dx \leq \max(C_1, C_2) \left[\|v\|^2_{L^1(T)} + \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int,T}} |v_{a,+} - v_{a,-}|\, l(a\cap T)\right)^2\right]$$

où C_1 ne dépend que de T_1 et C_2 que de T_2.
Ce qui termine l'étape 3.

Etape 4 :

On étend ce résultat à une union finie de triangles, et donc à n'importe quel domaine polygonal de $I\!R^2$, en utilisant le même raisonnement que dans l'étape précédente. Ceci termine la démonstration du lemme 2.3.

On va maintenant démontrer (2.33) qui donne l'injection discrète de $H^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $+\infty > r \geq 1$ (car on est en dimension 2).

Démonstration du lemme 2.4 :

Remarquons tout d'abord que si $2 > r \geq 1$, alors il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} &\leq m(\Omega)^{(2-r)/(2r)}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^2\right)^{1/2}\\ &\leq (1+m(\Omega))^{1/2}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{2.38}$$

Montrons alors ce résultat lorsque $+\infty > r > 2$.
On applique l'estimation (2.32) à $v = |e|^{j-1}\,e$ avec $j > 1$:

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{2j}\right)^{1/2} \leq C\left[\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \Big||e_{a,+}|^{j-1}\,e_{a,+} - |e_{a,-}|^{j-1}\,e_{a,-}\Big|\,l(a) + \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{j-1}\,|e_p|\right]$$

où C ne dépend que de Ω, et donc :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{2j}\right)^{1/2} \leq C\left[j\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \max\Big(|e_{a,+}|^{j-1}, |e_{a,-}|^{j-1}\Big)\,\Big|e_{a,+} - e_{a,-}\Big|\,l(a) + \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{j-1}\,|e_p|\right]$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a pour q tel que $+\infty > q > 1$ et q' tel que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{2j}\right)^{1/2} &\leq C\,j\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \max\Big(|e_{a,+}|^{j-1}, |e_{a,-}|^{j-1}\Big)^q\,l(a)\,d_{a,\mp}\right)^{1/q} \times\\ &\times\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\Big|e_{a,+} - e_{a,-}\Big|^{q'}}{(d_{a,\mp})^{q'-1}}\,l(a)\right)^{1/q'} + C\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{(j-1)\,q}\right)^{1/q}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)|e_p|^{q'}\right)^{1/q'}\end{aligned}$$

où $d_{a,\mp} = d(x_{p_{a,+}}, a)$ si $\max\Big(|e_{a,+}|^{j-1}, |e_{a,-}|^{j-1}\Big) = |e_{a,+}|^{j-1}$ et $d(x_{p_{a,-}}, a)$ sinon. On rappelle que $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$ sont les deux mailles situées de part et d'autre de $a \in \mathcal{A}_{int}$. Comme :

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \max\Big(|e_{a,+}|^{j-1}, |e_{a,-}|^{j-1}\Big)^q\, l(a)\, d_{a,\mp} \le 2 \sum_{p\in\mathcal{T}} e_p^{(j-1)\,q}\, m(p)$$

on a :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{2\,j}\right)^{1/2} \le C \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} e_p^{(j-1)\,q}\, m(p)\right)^{1/q} \left[2\,j \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\big|e_{a,+} - e_{a,-}\big|^{q'}}{(d_{a,\mp})^{q'-1}}\, l(a)\right)^{1/q'} + \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{q'}\right)^{1/q'}\right]$$

où C ne dépend que de Ω.
On choisit j tel que $2\,j = r$, on a donc bien $j > 1$ puisque $r > 2$, de plus on pose $(j-1)\,q = 2\,j$ donc $q = \dfrac{2\,j}{j-1} > 2$, on a alors $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$, et :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{r}\right)^{1/r} \le C\,r \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\big|e_{a,+} - e_{a,-}\big|^{q'}}{(d_{a,\mp})^{q'-1}}\, l(a)\right)^{1/q'} + C \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{q'}\right)^{1/q'}$$

On utilise à nouveau l'inégalité de Hölder avec $s = \dfrac{2}{q'}$ et donc $s' = \dfrac{2}{2-q'}$, il vient, pour tout $r > 2$:

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{r}\right)^{1/r} \le C \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{q'\,s}\right)^{1/(q'\,s)} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\right)^{1/(q'\,s')} + C\,r \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\big|e_{a,+} - e_{a,-}\big|^{q'\,s}}{(d_{a,\mp})}\, l(a)\right)^{1/(q'\,s)} \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} l(a)\, d_{a,\mp}^{s'\left(1-q'+\frac{1}{s}\right)}\right)^{1/(q'\,s')}$$

on a $q'\,s = 2$ donc $1 - q' + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2-q'}{2} = \dfrac{1}{s'}$ et $\dfrac{1}{q'\,s'} = \dfrac{2-q'}{2\,q'} = \dfrac{1}{r}$, donc :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{r}\right)^{1/r} \le C\,r\,\Big(m(\Omega)\Big)^{1/r} \left[\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\big|e_{a,+} - e_{a,-}\big|^{2}}{(d_{a,\mp})}\, l(a)\right)^{1/2} + \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^{2}\right)^{1/2}\right]$$

où C ne dépend que de Ω.

Puisque, d'après (2.7), il existe $C_1 > 0$, ne dépendant que de α et α_1, telle que $d_{a\mp} \geq C_1\, d_a$, il vient, pour tout $r > 2$:

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^r\right)^{1/r} \leq \Big(m(\Omega)+1\Big)\,C\,r\left[\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\left|e_{a,+}-e_{a,-}\right|^2}{d_a}\,l(a)\right)^{1/2} + \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|e_p|^2\right)^{1/2}\right]$$

où C ne dépend que de α, α_1 et de Ω.
Ce qui termine la démonstration du lemme 2.4 et donc du théorème 2.2 puisque :

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} \frac{\left|e_{a,+}-e_{a,-}\right|^2}{d_a}\,l(a) = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q-e_p|^2}{d_{pq}}\,l(\sigma_{pq})$$

2.4 Convergence du schéma pour l'équation hyperbolique

Dans cette section on montre la convergence de la solution de (2.15) vers la solution faible du problème (2.2), (2.4), (2.5), en établissant le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω qui satisfait la propriété (2.7) et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (2.10).*
Soit $u_{\mathcal{T},k}$ solution de (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15).
On note $P(\cdot)$ une solution de (2.1). On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9).

Alors, il existe $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ tels que :

$$\lim_{h\to 0} u_{\mathcal{T},k} = u$$

dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ pour la topologie faible $\star$, c'est à dire :

$$\lim_{h\to 0} \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$.

De plus u est la solution faible du problème (2.2), (2.4), (2.5), i.e. $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ vérifie :

$$\int_\Omega\int_{I\!R_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dx\,dt - \int_\Omega\int_{I\!R_+} u(x,t)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int_{\partial\Omega}\int_{I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\,\varphi(\tau,t)\,g^+(\tau)\,d\tau\,dt = 0$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+)$ avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$.

Afin de démontrer ce théorème, on établit des estimations sur la solution approchée. La première est une estimation L^∞ pour avoir de la compacité. La deuxième est une estimation faible, dite "BV faible", sur les variations de la solution approchée.

2.4.1 Estimation $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ sur la solution approchée

Lemme 2.5 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (2.7) et $k \in I\!R_+^\star$ un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (2.10).*
Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15). On note $P(\cdot)$ une solution de (2.1), (2.3). On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_\mathcal{T}$ satisfaisant (2.8) et (2.9).

Alors :

$$\|u_{\mathcal{T},k}\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+)} \leq \max\Big(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\overline{u}\|_{L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+)}\Big)$$

Démonstration du lemme 2.5

Soit $p \in \mathcal{T}$ et $n \in I\!N$, alors l'équation (2.15) peut encore s'écrire :

$$u_p^{n+1} = u_p^n \left[1 - \frac{k}{m(p)}\left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\,\frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,g_a^+\right)\right] + \frac{k}{m(p)}\left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\,\frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\,u_q^n + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,g_a^+\,\overline{u}_a^n\right)$$

donc :

$$u_p^{n+1} = b_p\,u_p^n + \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} b_{pq}\,u_q^n + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} b_{pa}\,\overline{u}_a^n$$

Ainsi u_p^{n+1} est combinaison linéaire des u_q^n, $q \in \mathcal{T}$ et $\overline{u}_a^n$ $a \in \mathcal{A}_{ext}$.

Remarquons alors que la somme des coefficients de cette combinaison est égale à 1 et que :

$$b_{pq} \geq 0 \text{ et } b_{pa} \geq 0 \qquad \text{pour tout } q \in N(p) \text{ tel que } P_q > P_p \text{ et tout } a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$$

De plus, d'après la condition de stabilité (2.10) :

$$\frac{k}{m(p)}\left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\,\frac{P_q - P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,g_a^+\right) \leq 1$$

et donc $b_p \geq 0$.

On a donc une combinaison convexe, et par récurrence sur n, il vient :

$$|u_p^{n+1}| \leq \max\Big(\sup_{p\in\mathcal{T}} |u_p^n|, \sup_{a\in\mathcal{A}_{ext}} |\overline{u}_a^n|\Big) \leq \ldots \leq \max\Big(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\overline{u}\|_{L^\infty(\partial\Omega^+\times I\!R_+)}\Big)$$

pour tout $n \in I\!N$ et tout $p \in \mathcal{T}$.
Ce qui termine la démonstration du lemme 2.5.

2.4.2 Estimation “BV faible”

Lemme 2.6 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω et $k \in I\!R_+^*$ satisfaisant la propriété (2.7) et la condition de stabilité (2.10).*
Soit $T > 0$, on définit N_T par $N_T = \max\big\{n \in I\!N \ ;\ (n-1)\,k \leq T\big\}$.
Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15). On note $P(\cdot)$ une solution de (2.1), (2.3). On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9).
On définit alors :

$$EF_{1h}(T) = k\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} h_p \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ |u_p^n - u_q^n| + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\ |u_p^n - \overline{u}_a^n|\right)$$

et

$$EF_{2h}(T) = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k\, m(p)\, |u_p^{n+1} - u_p^n|$$

Alors il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, η, g, P (solution exacte de (2.1), (2.3)), α, α_1, T, u_0 et $\overline{u}$, telle que :

$$EF_{1h}(T) \leq C\ h^{1/2} \qquad \textit{et} \qquad EF_{2h}(T) \leq C\ k^{1/2}$$

Démonstration du lemme 2.6

On commence par montrer la première inégalité.
Soit $n \in I\!N$, $p \in \mathcal{T}$, on multiplie (2.15) par u_p^n et on somme sur $n \in \big\{1, \ldots, N_T\big\}$ et $p \in \mathcal{T}$, il vient :
(2.39)
$$B_1 + B_2 = 0$$

avec :

$$B_1 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\left(u_p^{n+1} - u_p^n\right) u_p^n$$

et :

$$B_2 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq}) \, \frac{(P_q - P_p)}{d_{pq}} \, (u_p^n - u_q^n) \, u_p^n + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, (u_p^n - \overline{u}_a^n) \, u_p^n \right]$$

Remarquons alors que :

$$u_p^n \, (u_p^{n+1} - u_p^n) = -\frac{1}{2} \, (u_p^{n+1} - u_p^n)^2 - \frac{1}{2} \, (u_p^n)^2 + \frac{1}{2} \, (u_p^{n+1})^2$$

donc :

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \, (u_p^{n+1} - u_p^n)^2 - \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \, \left(u_p^0\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \, \left(u_p^{N_T+1}\right)^2$$

D'après le schéma sur l'équation hyperbolique (2.15), on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \, (u_p^{n+1} - u_p^n)^2 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{k^2}{m(p)} \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq}) \, \frac{(P_q - P_p)}{d_{pq}} \, (u_p^n - u_q^n) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, (u_p^n - \overline{u}_a^n) \right]^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$B_1 \geq -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left[\frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq}) \, \frac{(P_q - P_p)}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \right) \right] \times \left[k \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq}) \, \frac{(P_q - P_p)}{d_{pq}} \, (u_p^n - u_q^n)^2 + k \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, (u_p^n - \overline{u}_a^n)^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \, \left(u_p^0\right)^2 \tag{2.40}$$

Traitons alors le terme B_2, et pour cela remarquons que :

$$u_p^n \, (u_p^n - u_q^n) = \frac{1}{2}(u_p^n - u_q^n)^2 + \frac{1}{2}(u_p^n)^2 - \frac{1}{2}(u_q^n)^2$$

de même :

$$u_p^n \, (u_p^n - \overline{u}_a^n) = \frac{1}{2}(u_p^n - \overline{u}_a^n)^2 + \frac{1}{2}(u_p^n)^2 - \frac{1}{2}(\overline{u}_a^n)^2$$

donc :

$$B_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ (u_p^n-u_q^n)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\ (u_p^n-\overline{u}_a^n)^2 \right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\Big[(u_p^n)^2-(u_q^n)^2\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\Big[(u_p^n)^2-(\overline{u}_a^n)^2\Big]$$

or d'après le schéma sur l'équation elliptique (2.9) :

$$\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\Big[(u_p^n)^2-(u_q^n)^2\Big] = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ (u_p^n)^2$$
$$= -\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a (u_p^n)^2$$

ainsi :

$$B_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ (u_p^n-u_q^n)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\ (u_p^n-\overline{u}_a^n)^2 \right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big[l(a)\, g_a^-(u_p^n)^2 - l(a)\, g_a^+(\overline{u}_a^n)^2\Big]$$

En reportant ce résultat ainsi que (2.40) dans (2.39), il vient :

$$\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[1 - \frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right)\right] \times$$
$$\times \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ (u_p^n-u_q^n)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\ (u_p^n-\overline{u}_a^n)^2 \right)$$
$$\le \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(u_p^0)^2 + k\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, g_a^+\ (\overline{u}_a^n)^2$$

On utilise alors la condition de stabilité (2.10) :

$$\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_q-P_p)}{d_{pq}}\ (u_p^n-u_q^n)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\ (u_p^n-\overline{u}_a^n)^2 \right)$$
$$\le \frac{1}{\eta}\left(\|u_0\|_\infty^2\, m(\Omega) + \|\overline{u}\|_\infty^2\, T \int_{\partial\Omega} g^+(\tau)\, d\tau \right) = \frac{K}{\eta} \tag{2.41}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et l'inégalité précédente, on a :

$$EF_{1h}(T) \leq h^{1/2} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} h_p\, l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_p - P_q)}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} h_p\, l(a)\, g_a^+ \right)\right]^{1/2}$$

Mais :

$$k \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} h_p\, l(a)\, g_a^+ \leq T\, h \int_{\partial\Omega} g^+(\tau)\ d\tau$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} h_p\, l(\sigma_{pq})\ \frac{(P_p - P_q)}{d_{pq}} \leq \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} h_p^2\, \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} \right)^{1/2} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}}\ (P_p - P_q)^2 \right)^{1/2}$$

De plus, d'après (2.7) :

$$(2.42)\, d_{pq} = d(x_p, \sigma_{pq}) + d(x_q, \sigma_{pq}) \geq \alpha\, h_p + \alpha\, h_q \geq \alpha\, h_p + \alpha\, \alpha_1\, l(\sigma_{pq}) \geq \alpha\, (\alpha_1 + 1) h_p$$

ainsi :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} h_p^2\, \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} \leq \frac{1}{\alpha_1\, \alpha^2\, (\alpha_1+1)^2} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\, d_{pq} \leq \frac{2}{\alpha_1\, \alpha^2\, (\alpha_1+1)^2}\ m(\Omega)$$

Pour compléter la démonstration du lemme 2.6, on montre qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de g, α, α_1, Ω et de P (solution exacte de (2.1), (2.3)), telle que :

$$(2.43) \qquad \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}}\ (P_p - P_q)^2 \leq C$$

Ce résultat sera démontré en quatre étapes (une autre démonstration est possible, en utilisant l'estimation d'erreur (2.18), voir remarque 2.5) :

Etape 1 :

On montre qu'il existe $C_1 > 0$, ne dépendant que de g et de Ω, telle que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_p - P_q)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \leq C_1 \left(\sum_{p\in\mathcal{T}_{ext}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(P_p)^2 \right)^{1/2} \tag{2.44}$$

En multipliant le schéma sur l'équation elliptique (2.9) par P_p et en sommant sur $p \in \mathcal{T}$, on obtient :

$$\left| \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{(P_q\ P_p - (P_p)^2)}{d_{pq}} \right| = \left| \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a\ P_p \right|$$

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{(P_q\ P_p - (P_p)^2)}{d_{pq}} \right| \leq \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\,|g_a|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}_{ext}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(P_p)^2 \right)^{1/2}$$

De plus on a :

$$\left| \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} (P_q\ P_p - (P_p)^2) \right| = \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} (P_p - P_q)^2$$

et donc :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} (P_p - P_q)^2 \leq 2\ \ ||g||_{L^2(\partial\Omega)} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}_{ext}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(P_p)^2 \right)^{1/2}$$

Etape 2 :

On montre qu'il existe $C_2 > 0$, ne dépendant que de α, α_1 et de Ω, telle que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{ext}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(P_p)^2 \leq C_2 \left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{l(\sigma_{pq})}{d_{pq}} (P_q - P_p)^2 + \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\ (P_p)^2 \right) \tag{2.45}$$

Ω est un ouvert borné polygonal de $I\!R^2$, tout d'abord Ω sera supposé convexe. Dans ce cas, on choisit deux directions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ orthogonales et on décompose la frontière de Ω en quatre parties, non nécessairement disjointes comme sur la figure 2.6. On note η_1 un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ dont la norme euclidienne est plus grande grande que le diamètre de Ω.

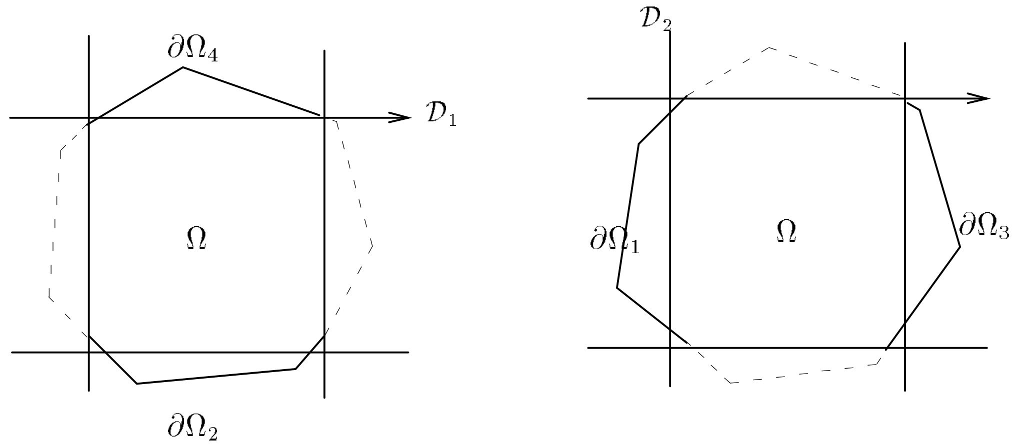

FIG. 2.6 -

On note $\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}$ (respectivement $\mathcal{T}_{\partial\Omega_2}$, $\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}$, $\mathcal{T}_{\partial\Omega_4}$) l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}$ qui ont au moins un côté sur $\partial\Omega_1$ (respectivement sur $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$, $\partial\Omega_4$).

Soit $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tel que $\forall\, x \in \Omega,\ 0 \leq \psi(x) \leq 1,\ \psi(x) = 1\ \forall\, x \in \partial\Omega_1$, et $\psi(x) = 0$ $\forall\, x \in \partial\Omega_3$, on note $\psi_p = \psi(x_p)$, pour tout $p \in \mathcal{T}$.
Soit $p \in \mathcal{T}_{\partial\Omega_1}$ et $x \in \partial p \cap \mathcal{T}_{\partial\Omega_1}$, alors:

$$\Big(P_{\mathcal{T}}(x)\Big)^2 = (P_p)^2 \leq |(P_p)^2 - (P_p\,\psi_p)^2| + \sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} |(P_{a,+}\,\psi_{p_{a,+}})^2 - (P_{a,-}\,\psi_{p_{a,-}})^2|\,\varphi_a(x, x+\eta_1) + (P_{p_{3x}}\,\psi_{p_{3x}})^2$$

où p_{3x} est l'élément de $\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}$ tel que $[x, x+\eta_1] \cap \partial\Omega_3 \in p_{3x}$, on rappelle de plus que pour tout $a \in \mathcal{A}_{int}$, on note :

- $\varphi_a(x,z)$ pour tout $x, z \in I\!R^2$, la fonction qui vaut 1 si le segment $[x,z]$ coupe a en un point, 0 sinon.
- $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$ les deux mailles situées de part et d'autre de a,
- $P_{a,+}$ et $P_{a,-}$ les valeurs de $P_{\mathcal{T}}$ sur les mailles $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$,
- d_a la distance entre $x_{p_{a,+}}$ et $x_{p_{a,-}}$, où $x_{p_{a,+}}$ et $x_{p_{a,-}}$ sont définis en (2.7)

On intègre sur $\partial\Omega_1$ par rapport à x, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\Big(P_p\Big)^2 \leq \sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,|(P_p)^2 - (P_p\,\psi_p)^2| + \sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} |(P_{a,+}\,\psi_{p_{a,+}})^2 - (P_{a,-}\,\psi_{p_{a,-}})^2|\,l(a) + \sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(P_p\,\psi_p)^2$$

ce qui s'écrit encore : :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(P_p\right)^2 \leq \sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,|(P_p)^2-(P_p\,\psi_p)^2|$$
$$+\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}}\left(\left|(P_{a,+}\,\psi_{p_{a,+}})^2-(P_{a,-}\,\psi_{p_{a,+}})^2\right|+\left|(P_{a,-}\,\psi_{p_{a,+}})^2-(P_{a,-}\,\psi_{p_{a,-}})^2\right|\right) l(a)$$
$$+\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,|(P_p\,\psi_p)^2-(P_p\times 0)^2|$$

Mais, comme $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega},[0,1])$:

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(P_p\right)^2 \leq \sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,d(x_p,a)\,\|\psi'\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\,(P_p)^2$$
$$+\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}}\left|(P_{a,+})^2-(P_{a,-})^2\right| l(a)+\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} d_a\,\|\psi'\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\,(P_{a,-})^2\,l(a)$$
$$+\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,d(x_p,a)\,\|\psi'\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\,(P_p\,\psi_p)^2$$

D'après l'inégalité de Young, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(P_p\right)^2 \leq 2\sum_{p\in\mathcal{T}}\|\psi'\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\,m(p)\,(P_p)^2+\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}} d_a\,\|\psi'\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}\,(P_{a,-})^2\,l(a)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}}\frac{(P_{a,+}-P_{a,-})^2}{d_a}\,l(a)+\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}}\left|(P_{a,+})^2+(P_{a,-})^2\right| l(a)\,d_a$$

Remarquons alors que, d'après (2.7), pour tout $a\in\mathcal{A}_{int}$:

$$d_a \leq h_{p_{a,+}}+h_{p_{a,-}} \leq \frac{2}{\alpha_1}\;l(a) \leq \frac{2}{\alpha\,\alpha_1}\;d_{a,\mp}$$

ainsi, il existe C, ne dépendant que de α, α_1, de Ω et de ψ telle que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(P_p\right)^2 \leq C\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{int}}\frac{(P_{a,+}-P_{a,-})^2}{d_a}\,l(a)+\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(P_p)^2\right)$$

et donc :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}_{\partial\Omega_1}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\left(P_p\right)^2 \leq C\left(\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)}\frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\,l(\sigma_{pq})+\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(P_p)^2\right)$$

De la même façon, on montrerait ce résultat pour $\mathcal{T}_{\partial\Omega_2}$, $\mathcal{T}_{\partial\Omega_3}$ et $\mathcal{T}_{\partial\Omega_4}$. Et en sommant ces inégalités, on obtient (2.45), ce qui termine la seconde étape lorsque Ω est convexe.

Si Ω n'est pas convexe alors on décompose sa frontière $\partial\Omega$ en r parties $(\partial\Omega_i)_{1\leq i\leq r}$ disjointes et pour tout $i=1,\ldots,r$, on définit $\partial\Omega_i^{'}$ comme sur la figure 2.7.
On définit alors pour tout $i=1,\ldots,r$, $\psi^{(i)}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ tel que $\forall\, x\in\Omega$, $0\leq\psi^{(i)}(x)\leq 1$, $\psi^{(i)}(\tau)=1$ si $\tau\in\partial\Omega_i$ et $\psi^{(i)}(\tau)=0$ si $\tau\in\partial\Omega_i^{'}$. Alors comme dans le cas convexe, on montre (2.45).

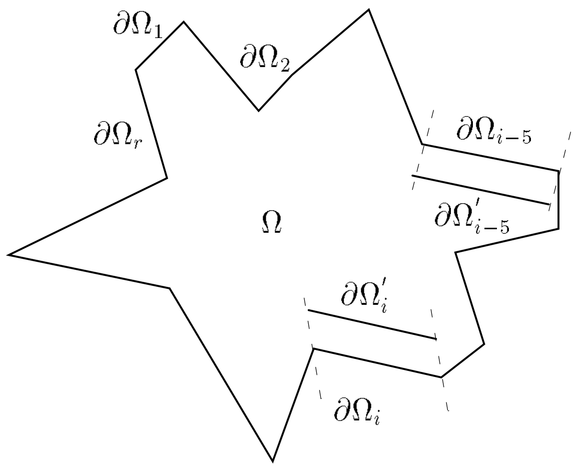

Fig. 2.7 -

Etape 3 :

On montre qu'il existe $C_3 > 0$, ne dépendant que de P (solution exacte de (2.1), (2.3)) et de Ω, telle que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(P_p)^2 \le C_3 \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q - P_p)^2}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) + 1 \right) \tag{2.46}$$

Pour cela remarquons tout d'abord que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(P_p)^2 \le 2 \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|P_p - \mathrm{moy}_\Omega(P_\mathcal{T})|^2 + 2\,m(\Omega)\left(\mathrm{moy}_\Omega(P_\mathcal{T})\right)^2$$

où :

$$\mathrm{moy}_\Omega(P_\mathcal{T}) = \frac{1}{m(\Omega)} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P_p$$

or, par hypothèse :

$$\mathrm{moy}_\Omega(P_\mathcal{T}) = \frac{1}{m(\Omega)} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P(x_p)$$

De plus d'après le lemme 2.2 page 26, il existe C, ne dépendant que de Ω, telle que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|P_p - \mathrm{moy}_\Omega(P_\mathcal{T})|^2 \le C \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q - P_p)^2}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})$$

et comme $H^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $C(\overline{\Omega})$, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(P_p)^2 \le 2\,C_1 \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q - P_p)^2}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) + 2\,C_2\,\|P\|_{H^2(\Omega)}$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de Ω.
Ce qui termine l'étape 3.

Etape 4 :

On conclut, en remarquant que, d'après (2.44), (2.45) et (2.46) :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \le C_1 \left((C_2+C_3) \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + C_3 \right)^{1/2}$$

où C_1 ne dépend que de g et de Ω, C_2 que de α, α_1 et de Ω et C_3 que de P et de Ω.
D'après l'inégalité de Young, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \le \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \frac{1}{2}\left(C_1^2\,(C_2+C_3)\right) + C_3$$

et donc :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{(P_q-P_p)^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \le C$$

où C ne dépend que de g, α, α_1, Ω et de P.
Ceci termine la démonstration de l'inégalité (2.43) et donc de la première inégalité du lemme 2.6.

Etablissons alors la deuxième inégalité de ce lemme. Pour cela remarquons que d'après le schéma sur l'équation hyperbolique (2.15), on a :

$$EF_{2h} = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k\, m(p)\, |u_p^{n+1}-u_p^n| \le \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k^2 \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\, |u_p^n-u_q^n|\, \frac{P_q-P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, |u_p^n-\overline{u}_a^n|\, g_a^+ \right)$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$EF_{2h} \le k^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q-P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right) \right]^{1/2} \times$$
$$\left[\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} k \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\, |u_p^n-u_q^n|^2\, \frac{P_q-P_p}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, |u_p^n-\overline{u}_a^n|^2\, g_a^+ \right) \right]^{1/2}$$

et donc d'après la condition de stabilité (2.10) et l'inégalité (2.41), il vient :

$$EF_{2h} \le k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(1-\eta) \right)^{1/2} \left(\frac{K}{\eta} \right)^{1/2}$$

ainsi :

$$EF_{2h} \leq k^{1/2} \left(T\, m(\Omega)\, (1-\eta)\, \frac{K}{\eta} \right)^{1/2}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2.6.

Remarque 2.5 *Comme P est supposé dans $C^2(\overline{\Omega})$, l'estimation (2.43) peut être aussi donnée par l'estimation d'erreur en norme H_0^1 discrète (2.18), mais la démonstration précédente n'utilise pas la propriété $P \in C^2(\overline{\Omega})$ et peut donc être étendue à des cas plus complexes.*

2.4.3 Convergence du schéma numérique

On montre dans ce paragraphe le théorème de convergence pour le schéma numérique appliqué à l'équation hyperbolique, c'est à dire le théorème 2.3.
Pour cela, on établit tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.7 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω et $k \in I\!R_+^*$ satisfaisant la propriété (2.7) et la condition de stabilité (2.10). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ solution de (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15). On note $P(\cdot)$ une solution de (2.1), (2.3). On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (2.8) et (2.9).*

Alors $u_{\mathcal{T},k}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\Big(\varphi_t(x,t) - \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx$$
$$+ \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt = \mathcal{E}(k,h)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$, avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$, où $\mathcal{E}(k,h)$ ne dépend que de h, k, φ, Ω, u_0, $\overline{u}$, P, g, α, α_1 et de η.
De plus pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$:

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{E}(k,h) = 0$$

Démonstration du lemme 2.7 :

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+)$, on définit T tel que, $\forall\, x \in \Omega^+$, $supp(\varphi(x,.)) \subset [0,T]$. On note alors $N_T = \max\Big\{n \in I\!N\ ;\ (n-1)\,k \leq T\Big\}$.
On multiplie alors le schéma sur l'équation hyperbolique (2.15) par

$$\frac{1}{k\,m(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt$$

et on somme sur $p \in \mathcal{T}$ et $n \in \Big\{0,\dots,N_T\Big\}$, on obtient :

$$E_1 + E_2 = 0 \tag{2.47}$$

avec :

$$E_1 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} (u_p^{n+1} - u_p^n) \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \varphi(x,t)\, dx\, dt$$

et

$$E_2 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} l(\sigma_{pq})\,(u_p^n - u_q^n)\, \frac{(P_q - P_p)}{d_{pq}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,(u_p^n - \overline{u}_a^n)\, g_a^+ \right) \times \frac{1}{m(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \varphi(x,t)\, dx\, dt$$

De plus, on note :

$$E_{10} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx$$

et

$$E_{20} = -\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\, \nabla P(x,t).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt + \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

On va alors comparer E_1 et E_{10} ainsi que E_2 et E_{20} afin d'établir le résultat cherché.

Comparaison de E_1 et E_{10} :

Remarquons que E_{10} s'écrit encore :

$$E_{10} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} u_p^n \int_p \Big(\varphi(x,t^{n+1}) - \varphi(x,t^n) \Big)\, dx$$

et donc en reportant les différences sur $u_{\mathcal{T},k}$, il vient :

$$E_{10} = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} (u_p^{n+1} - u_p^n) \int_p \varphi(x,t^{n+1})\, dx - \sum_{p\in\mathcal{T}} u_p^0 \int_p \varphi(x,0)\, dx$$

Ainsi :

$$|E_1 + E_{10}| \leq \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1} - u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p |\varphi_t(x,t)|\, dx\, dt + \int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0 - u_0(x)|\, |\varphi(x,0)|\, dx$$

où

$$u_{\mathcal{T}}^0(x) = u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x)\, dx \qquad \text{pour tout } x\in p,\ p\in\mathcal{T}$$

Comme $u_0 \in L^\infty(\Omega)$:

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0(x) - u_0(x)|\, |\varphi(x,0)|\, dx = 0 \tag{2.48}$$

En effet, comme Ω est borné, il existe $(u_j)_{j\in I\!N} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{j\to+\infty} \|u_j - u_0\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

Alors :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx \le \int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u^j_{\mathcal{T}}(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx$$
$$+ \int_\Omega |u^j_{\mathcal{T}}(x) - u_j(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx + \int_\Omega |u_j(x) - u_0(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx$$

pour tout $j \in I\!N$ et où $u^j_{\mathcal{T}}(x) = \dfrac{1}{m(p)} \displaystyle\int_p u_j(y)\,dy$ si $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.

Or :

$$\int_\Omega |u^j_{\mathcal{T}}(x) - u_j(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx \le \|\varphi\|_\infty \sup_{x\in\Omega} |\nabla u_j(x)|\,m(\Omega)\,h$$

et

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u^j_{\mathcal{T}}(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx \le \|\varphi\|_\infty\, m(\Omega)\,\|u_j - u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in I\!N$ tel que :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi\|_\infty \sup_{x\in\Omega} |\nabla u_J(x)|\,m(\Omega)\,h$$

Ainsi, $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe $H > 0$, ne dépendant que de J, φ, Ω et de ε, tel que pour tout $h \le H$:

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx \le \varepsilon$$

Ce qui termine la démonstration de (2.48).

De plus, d'après le lemme 2.6

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1} - u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p |\varphi_t(x,t)|\,dx\,dt \le \|\varphi_t\|_{L^\infty(\overline{\Omega}\times I\!R_+)}\, C\, k^{1/2}$$

où C ne dépend que de Ω, η, g, P, α, α_1, T, u_0 et $\overline{u}$.

Comme dans [16] (démonstration du théorème 7.1), on montre que k tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Remarquons tout d'abord que si $g \equiv 0$ alors, d'après le schéma sur l'équation elliptique (2.9), on a :

$$\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{P_q - P_p}{d_{pq}} = 0$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$.

Ainsi en choisissant tout d'abord p_0 tel que $P_{p_0} = \min_{p\in\mathcal{T}} P_p$ et en utilisant la connexité de Ω, on obtient :

$$P_q = P_p \qquad \text{pour tout } p,\, q \in \mathcal{T}$$

et donc :

$$u_p^{n+1} = u_p^n = u_p^0 \qquad \text{pour tout } p \in \mathcal{T} \text{ et tout } n \in I\!N$$

et d'après (2.48), $u_{\mathcal{T},k}$ converge vers u_0 dans L^∞ faible $\star$, u_0 étant dans ce cas l'unique solution faible de (2.2), (2.4), (2.5). Ainsi lorsque $g \equiv 0$ la démonstration du théorème 2.3 est terminée.

On peut donc supposer $g \not\equiv 0$. Soit $y \in I\!R^d \setminus \{0\}$ et $\overline{w} \subset \Omega$, $\overline{w}$ compact tel que $d(\overline{w}, \Omega^c) \geq y$ où Ω^c est le complémentaire de Ω. On montre alors, voir [16] (démonstration du théorème 7.1), que :

$$\|P_{\mathcal{T}}(.+y) - P_{\mathcal{T}}(.)\|_{L^1(\overline{w})} \leq |y| \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{q \in N(p)} l(\sigma_{pq})\, |P_q - P_p|$$

Remarquons que, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\|P_{\mathcal{T}} - P\|_{L^1(\Omega)} \leq \left(m(\Omega) \sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^2 \right)^{1/2} + \sum_{p \in \mathcal{T}} \int_p |P(x_p) - P(x)|\, dx$$

ainsi d'après la régularité de P et d'après le théorème 2.1, il vient :

$$\lim_{h \to 0} \|P_{\mathcal{T}} - P\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

Donc, si

$$\lim_{h \to 0} \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{q \in N(p)} l(\sigma_{pq})\, |P_q - P_p| = 0$$

on a :

$$\|P(.+y) - P(.)\|_{L^1(\overline{w})} \leq 0$$

et ainsi $\nabla P \equiv 0$, ce qui n'est pas possible puisque $g \not\equiv 0$. Alors il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$2 \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_q > P_p}} l(\sigma_{pq})\, (P_q - P_p) = \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{q \in N(p)} l(\sigma_{pq})\, |P_q - P_p| \geq A$$

Et donc, il existe $p \in \mathcal{T}$ tel que :

$$\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_q > P_p}} l(\sigma_{pq})\, (P_q - P_p) \geq \frac{m(p)\, A}{2\, m(\Omega)}$$

Comme $d_{pq} \leq 2\, h$, il vient :

$$\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_q > P_p}} l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \geq \frac{m(p)\, A}{4\, h\, m(\Omega)}$$

D'après (2.10), on obtient :

(2.49) $$k \leq \frac{4\, h\, m(\Omega)}{A}$$

Ce qui montre que k tend vers 0 lorsque h tend 0.
Ainsi

(2.50) $$\lim_{h \to 0} |E_1 + E_{10}| = 0$$

Traitons alors la différence entre E_2 et E_{20}.

Comparaison entre E_2 ***et*** E_{20} ***:***

On introduit pour cela le terme E_{21} défini par :

$$E_{21} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\substack{q\in N(P)\\ P_q>P_p}} (u_p^n - u_q^n)\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (u_p^n - \overline{u}_a^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \varphi(\tau,t)\, g(\tau)\, d\tau\, dt \right)$$

alors :

$$|E_2 - E_{21}| \le \sup_{(x,t)\in\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)| \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} h_p \left(\sum_{\substack{q\in N(P)\\ P_q>P_p}} |u_p^n - u_q^n|\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \right.$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} |u_p^n - \overline{u}_a^n|\, g_a^+\, l(a) \right)$$

Ainsi d'après le lemme 2.6 :

$$|E_2 - E_{21}| \le \sup_{(x,t)\in\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)|\, C\, h^{1/2} \tag{2.51}$$

où C ne dépend que de Ω, η, g, P, α, α_1, T, u_0 et $\overline{u}$.
Comparons alors les termes E_{21} et E_{20}, et pour cela remarquons que E_{21} s'écrit encore :

$$E_{21} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\sum_{q\in N(p)} u_p^n\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (u_p^n - \overline{u}_a^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \varphi(\tau,t)\, g(\tau)\, d\tau\, dt \right)$$

de même :

$$E_{20} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(-u_p^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \overline{u}(\tau,t)\, g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right)$$

Comme P est solution de (2.1), (2.3), on obtient :

$$E_{20} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(- \sum_{q\in N(p)} u_p^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \Big(u_p^n - \overline{u}(\tau,t)\Big)\, g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right)$$

Ainsi :

$$|E_{20} + E_{21}| \leq \mathcal{E}_1(h,k) + \mathcal{E}_2(h,k)$$

avec :

$$\mathcal{E}_1(h,k) = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} u_p^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \left(\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \right) \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right|$$

et

$$\mathcal{E}_2(h,k) = \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \Big| \overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,t) \Big| g_a^+(\tau)\, |\varphi(\tau,t)|\, d\tau\, dt$$

où $\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) = \overline{u}_a^n$ si $\tau \in a$, $a \in \mathcal{A}_{ext}$, et $t \in [t^n, t^{n+1}[$, $n \in I\!N$.

Comme $\overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$, en utilisant un raisonnement analogue à celui utilisé pour (2.48), on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{E}_2(h,k) = \lim_{h\to 0} \|\varphi\|_{L^\infty(\overline{\Omega}\times I\!R_+)} \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+)} \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \Big| \overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,t) \Big|\, d\tau\, dt = 0$$

Remarquons alors que, comme P est solution de (2.1), (2.3) et que $P_\mathcal{T}$ est solution de (2.9), on a pour tout $p \in \mathcal{T}$:

$$\sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}(\tau)\, d\tau = \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq}) \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_1(h,k) = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} u_p^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \left(\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \right) \right.$$
$$\left. \Big(\varphi(\tau,t) - \varphi(x_p,t)\Big)\, d\tau\, dt \right|$$

Alors, d'après la régularité de φ et l'inégalité (2.42), il vient :

$$\mathcal{E}_1(h,k) \leq T \sup_{(x,t)\in\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)| \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)$$
$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} d_{pq}\, l(\sigma_{pq}) \left(|R_{p,q}(P)| - \frac{|e_q - e_p|}{d_{pq}} \right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$\mathcal{E}_1(h,k) \leq T \sup_{(x,t)\in\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)| \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big) \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} d_{pq}\, l(\sigma_{pq}) \right)^{1/2} \times$$
$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} d_{pq}\, l(\sigma_{pq}) \left(|R_{p,q}(P)|^2 - \frac{|e_q - e_p|^2}{(d_{pq})^2} \right) \right)^{1/2}$$

Ainsi à l'aide du théorème 2.1 et du lemme 2.1, on obtient :

$$\mathcal{E}_1(h,k) \leq T \sup_{(x,t)\in\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)| \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)\, m(\Omega)\, C\, h$$

où C ne dépend que de α, α_1, des dérivées secondes de P et de Ω.
Et donc :

$$\lim_{h\to 0} |E_{20} + E_{21}| = 0 \tag{2.52}$$

On conclut alors à l'aide de (2.47), (2.50), (2.51) et (2.52) :

$$E_{10}+E_{20} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\Big(\varphi_t(x,t) - \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\, dx\, dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\, dx$$
$$+ \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt = E_{10} + E_1 + E_{20} + E_{21} + E_2 - E_{21} = \mathcal{E}(k,h)$$

où $\mathcal{E}(k,h)$ ne dépend que de h, k, φ, Ω, u_0, $\overline{u}$, P, g, α, α_1 et de η.
De plus pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$:

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{E}(k,h) = 0$$

Démonstration du théorème 2.3 :

D'après le lemme 2.5, la suite $(u_{\mathcal{T},k})_{h>0}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$. Ainsi d'après la relative séquentielle compacité des bornés de L^∞ pour la topologie faible $\star$, il existe une sous-suite, notée $(u_{\mathcal{T}_i,k_i})_{i\in I\!N}$, et il existe $u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ tels que :

$$\lim_{(\max_{p\in\mathcal{T}_i} h_p)\to 0} u_{\mathcal{T}_i,k_i} = u \tag{2.53}$$

dans $L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ faible $\star$.
C'est à dire, que pour tout $\varphi \in L^1(\Omega\times I\!R_+)$

$$\lim_{(\max_{p\in\mathcal{T}_i} h_p)\to 0} \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_i,k_i}(x,t)\,\varphi(x,t)\, dx\, dt = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u(x,t)\,\varphi(x,t)\, dx\, dt$$

De plus d'après le lemme 2.7, pour tout $i \in I\!N$, on a :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_i,k_i}(x,t)\Big(\varphi_t(x,t) - \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\, dx\, dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\, dx$$
$$+ \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt = \mathcal{E}(k_i,h_i)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$, et où :

$$\lim_{(\max_{p\in\mathcal{T}_i} h_p)\to 0} \mathcal{E}(k_i,h_i) = 0$$

En utilisant (2.53), on passe à la limite dans l'inégalité précédente, ainsi $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ vérifie :

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dx\,dt - \int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\ + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int_{\partial\Omega}\int_{I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\,\varphi(\tau,t)\,g^+(\tau)\,d\tau\,dt = 0$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+)$.

Donc u est solution faible du problème (2.2), (2.4), (2.5).
Comme $P \in C^2(\overline{\Omega})$ alors l'unicité de la solution faible est un résultat classique, c'est une conséquence du théorème de Cauchy - Lipschitz. On montre alors que toute la suite $(u_{\mathcal{T},k})_{h>0}$ converge vers u L^∞ faible $\star$.
En effet, supposons que $u_{\mathcal{T},k}$ ne tend pas vers u dans L^∞ faible $\star$, alors il existe une sous suite, notée $(u_{\mathcal{T}_i,k_i})_{i\in I\!N}$, $\varphi \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$ et $C > 0$ tels que

$$\int_{\Omega\times I\!R_+} \Big(u(x,t) - u_{\mathcal{T}_i,k_i}(x,t)\Big)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt \geq C \tag{2.54}$$

Mais cette sous suite est bornée dans L^∞, il existe donc une sous suite, encore notée $(u_{\mathcal{T}_i,k_i})_{i\in I\!N}$ et il existe $v \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ tels que $u_{\mathcal{T}_i,k_i}$ tend vers v dans L^∞ faible $\star$. En utilisant le même raisonnement que précédemment on montre alors que v est l'unique solution faible de (2.2), (2.4), (2.5). Donc $u = v$ p.p., ce qui contredit (2.54).
Ce qui termine la démonstration de la convergence du schéma numérique.

3. Schéma volumes finis sur double maillage pour un écoulement diphasique en milieu poreux

Ce travail a été réalisé en collaboration avec S. Verdière ((anciennement en thèse à l'Institut Français du Pétrole, aujourd'hui ingénieur chez Elf). Il a donné lieu à un article qui est soumis (voir [40]).

3.1 Introduction

On s'intéresse à la résolution d'un problème issu de la modélisation d'un écoulement diphasique en milieu poreux. La pression capillaire ainsi que la gravité sont négligées. On suppose que deux phases sont en présences, une phase eau (notée w) et une phase pétrole (notée o). On cherche alors à déterminer la saturation u de la phase eau et la pression du fluide P sur un domaine borné Ω de $I\!R^2$, solutions du système suivant :

$$\text{div}\Big(K(x)\, M(u(x,t))\, \nabla P(x,t)\Big) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in I\!R_+, \tag{3.1}$$

$$u_t(x,t) - \text{div}\left(K(x)\ \frac{K_{rw}(u(x,t))}{\mu_w} \nabla P(x,t)\right) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in I\!R_+, \tag{3.2}$$

avec des conditions aux limites et une condition initiale qui conduisent à un système bien posé. K est le tenseur de perméabilité absolu, $K_{r\varphi}$ (respectivement μ_φ) est la perméabilité relative (respectivement la viscosité) de la phase φ, pour $\varphi = o$ ou w. De plus, M est la mobilité totale telle que :

$$M(u) = \frac{K_{rw}(u)}{\mu_w} + \frac{K_{ro}(u)}{\mu_o}.$$

Les paramètres pétrophysiques, c'est à dire la perméabilité absolue et les perméabilités relatives, sont donnés par les géophysiciens comme des fonctions constantes sur une grille fine, qui peut être composée de millions de cellules. La discrétisation du problème elliptique conduit à un système linéaire de la taille de cette grille fine. Ce système étant trop grand pour les capacités machines, il est alors nécessaire de réduire le nombre de cellules afin de pouvoir effectuer des tests numériques. En général ces paramètres sont homogénéisés afin d'obtenir l'information sur une grille grossière. Ainsi, les méthodes classiquement utilisées résolvent l'équation de pression

(3.1) et l'équation de saturation (3.2) sur un même maillage, le maillage grossier. Toutefois, cette condensation des résultats peut parfois conduire à des raisonnements trop "globaux" (voir [22]).

La méthode de double maillage, proposée dans [38] et dans [39] permet d'éviter ces problèmes en résolvant l'équation en pression (3.1) sur le maillage grossier et l'équation en saturation (3.2) sur le maillage fin.

L'étape principale de l'algorithme de cette méthode est la reconstruction des flux $(K\nabla P)$ sur le maillage fin à partir des valeurs connues sur le maillage grossier.

On expose ici deux méthodes de reconstruction. La première, proposée par T. Gallouët, consiste à interpoler les flux à l'aide des valeurs sur les côtés du maillage grossier.

L'idée de la deuxième méthode, proposée par D. Guérillot, J.M. Thomas et S. Verdière (voir [38] et [39]) est de résoudre une succession de problèmes indépendants localement dans les mailles grossières.

Dans une première partie, on donne des résultats de convergence pour un problème simplifié. On considère un cas homogène avec une mobilité totale égale à un, ce qui conduit à un système elliptique - hyperbolique linéaire. On utilise des schémas volumes finis pour discrétiser ce problème sur des maillages rectangulaires : un schéma à cinq points pour l'équation elliptique, un schéma décentré vers l'amont de l'écoulement pour l'équation hyperbolique. On présente alors les deux méthodes de reconstruction des flux, puis on établit la convergence de la solution approchée, donnée par le schéma numérique, vers la solution exacte du problème.

On considère tout d'abord le problème simplifié pour lequel les deux méthodes de reconstruction sont utilisées. La première méthode (par interpolation) est moins chère en coût calcul, mais nous n'avons pas réussi à la généraliser à des cas plus complexes. On présente alors un cas test physique avec des hétérogénéités et une mobilité totale non constante. On n'utilise dans ce cas que la deuxième méthode de reconstruction des flux (méthode de résolution de problèmes locaux). Ces résultats numériques confirment la validité de la méthode de double maillage même dans le cas d'un milieu poreux hétérogène et d'un problème non linéaire.

3.2 Résultats de convergence sur un problème simplifié

Le problème que l'on traite dans cette partie est le suivant.

Soit Ω un ouvert polygonal de $I\!R^2$ que l'on peut mailler par des rectangles, on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω, on considère alors le problème elliptique-hyperbolique suivant :

$$\Delta P(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$u_t(x,t) - \operatorname{div}\Big(\nabla P(x)\, u(x,t)\Big) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in I\!R_+, \tag{3.4}$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale suivantes :

$$\nabla P(\tau).n(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in \partial\Omega, \tag{3.5}$$

$$u(\tau,t) = \overline{u}(\tau,t), \quad (\tau,t) \in \partial\Omega^+ \times I\!R^+, \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.7}$$

où $\partial\Omega^+ = \{\tau \in \partial\Omega \ ; \ g(\tau) > 0\}$ et où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω. On suppose que :

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+). \\ \bullet \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega), \text{telle que } P \in H^2(\Omega) \\ \text{et} \quad \displaystyle\int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Remarque 3.1 *Si Ω est convexe, alors $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ suffit pour que $P \in H^2(\Omega)$ (voir [20]).*

Plus précisément, on cherche P dans $H^2(\Omega)$ solution de (3.3), (3.5) au sens variationnel, i.e. telle que :

$$\int_\Omega \nabla P(x).\nabla\psi(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} g(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0 \qquad \text{pour tout } \psi \in H^1(\Omega), \tag{3.9}$$

et u dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ solution de (3.4), (3.6), (3.7) au sens faible :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\varphi_t(x,t)\, dx\, dt - \int_\Omega \int_{I\!R_+} u(x,t)\, \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \\ &\quad + \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx + \int_{\partial\Omega^+} \int_{I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, \varphi(\tau,t)\, g^+(\tau)\, d\tau\, dt = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$ avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$.

3.2.1 Discrétisation de l'équation elliptique

3.2.1.1 Hypothèses sur le maillage grossier

On considère donc un maillage grossier, noté $\mathcal{T}_H$. On fait les hypothèses de régularité suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \text{ Toute maille } Q \in \mathcal{T}_H \text{ est un rectangle.} \\ \bullet \text{ L'intersection entre deux mailles de } \mathcal{T}_H \text{ est soit un point soit un} \\ \text{segment, ce segment est alors un côté de chacune de ces deux mailles.} \\ \bullet \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ et } H > 0 \text{ tels que pour tout côté } \sigma \text{ du maillage } \mathcal{T}_H \\ \text{on ait } \alpha H \leq l(\sigma) \leq H. \end{cases} \tag{3.11}$$

où $l(\sigma)$ est la longueur de σ.
Quelques notations seront utiles pour la description du schéma numérique :
pour tout Q dans $\mathcal{T}_H$, on note :

$N(Q)$ l'ensemble des voisins de Q, i.e l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}_H$ qui ont une interface commune avec Q,

$\mathcal{A}_{ext}(Q)$ l'ensemble des côtés de Q situés sur le bord de Ω,

x_Q le centre de Q,

$m(Q)$ l'aire de Q,

n_Q la normale unitaire à ∂Q extérieure à Q.

Pour tout $Q_v \in N(Q)$:

σ_{QQ_v} l'interface entre Q et Q_v,
n_{QQ_v} la normale unitaire à σ_{QQ_v} extérieure à Q,
d_{QQ_v} la distance entre x_Q et x_{Q_v}.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)$:

$g_\sigma = \frac{1}{l(\sigma)} \int_\sigma g(\tau)\, d\tau$.

3.2.1.2 Equation discrétisée pour l'équation elliptique

On définit la solution approchée sur le maillage grossier par

$$P_{\mathcal{T}_H}(x) = P_Q \quad \text{si } x \in Q,\ Q \in \mathcal{T}_H. \tag{3.12}$$

On discrétise alors (3.3) sur $\mathcal{T}_H$, et pour cela on utilise un schéma volumes finis à cinq points ; Le principe des schémas volumes finis, voir [16], est d'intégrer les équations sur chaque volume de contrôle, ici les mailles, on obtient alors :

$$\sum_{Q_v \in N(Q)} \int_{\sigma_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_{QQ_v}(\tau)\; d\tau + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} \int_\sigma g(\tau)\, d\tau = 0 \quad \text{pour tout } Q \in \mathcal{T}_H.$$

On approche le flux de pression $\frac{1}{l(\sigma_{QQ_v})} \int_{\sigma_{QQ_v}} \nabla P(\tau)\, n_{QQ_v}\, d\tau$ à travers un côté σ_{QQ_v} par : $(P_{Q_v} - P_Q)/d_{QQ_v}$.
L'équation discrétisée est ainsi donnée par :

$$\sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{(P_{Q_v} - P_Q)}{d_{QQ_v}} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} l(\sigma)\, g_\sigma = 0 \quad \text{pour tout } Q \in \mathcal{T}_H. \tag{3.13}$$

3.2.2 Discrétisation de l'équation hyperbolique

3.2.2.1 Hypothèses sur le maillage fin

On veut discrétiser (3.4) sur un maillage plus fin que $\mathcal{T}_H$, on définit donc $\mathcal{T}_h$ un maillage de Ω vérifiant les hypothèses de régularité suivantes :

(3.14)
- Toute maille $q \in \mathcal{T}_h$ est un rectangle.
- L'intersection entre deux mailles de $\mathcal{T}_h$ est soit un point soit un segment, ce segment est alors un côté de chacune de ces deux mailles.
- Il existe $\beta > 0$ et $h > 0$ tels que pour tout côté c du maillage $\mathcal{T}_h$ on ait $\beta h \leq l(c) \leq h$.
- Pour tout $q \in \mathcal{T}_h$, il existe $Q \in \mathcal{T}_H$ tel que $q \subset Q$

Remarquons que la dernière hypothèse assure qu'une maille de $\mathcal{T}_h$ ne soit pas à cheval sur deux mailles de $\mathcal{T}_H$.

Il faut alors reconstruire le flux de pression sur chaque côté du maillage fin $\mathcal{T}_h$ à partir des valeurs connues sur le maillage grossier $\mathcal{T}_H$.
Nous présentons ici deux approches possibles :

1. La première, proposée par T. Gallouët, donne les flux approchés à travers un côté c de $\mathcal{T}_h$ en utilisant une moyenne pondérée des flux approchés à travers les côtés du maillage grossier $\mathcal{T}_H$ situés de chaque côtés de c.
2. La seconde méthode, proposée par D. Guérillot et S. Verdière (voir [22]) consiste à résoudre des problèmes localement dans les mailles de $\mathcal{T}_H$.

Quelques notations seront utiles à la description des méthodes de reconstruction des flux ainsi qu'à celle du schéma numérique pour l'équation de saturation :
Soit $q \in \mathcal{T}_h$, on note alors :

x_q le centre de q,

Q_q l'élément de $\mathcal{T}_H$ tel que $q \subset Q_q$,

$N(q)$ l'ensemble des voisins de q, i.e l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}_h$ ayant une interface commune avec q,

$N_{int}(q)$ l'ensemble des voisins de q situés à l'intérieur de Q_q,

$N_{ext}(q)$ l'ensemble des voisins de q situés à l'extérieur de Q_q,

$\mathcal{A}_{ext}(q)$ l'ensemble des côtés de q situés sur le bord de Ω.

Pour tout $q_v \in N(q)$:

d_{qq_v} la distance entre x_q et x_{q_v},

c_{qq_v} l'interface entre q et q_v,

n_{qq_v} la normale unitaire à c_{qq_v} extérieure à q,

F_{qq_v} le flux de pression approché sur c_{qq_v} allant de q vers q_v,

$\overline{F}_{qq_v}$ le flux de pression exact sur c_{qq_v} allant de q vers q_v, i.e.

$$\overline{F}_{qq_v} = \frac{1}{l(c_{qq_v})} \int_{c_{qq_v}} \nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau)\, d\tau. \tag{3.15}$$

Pour tout $c \in \mathcal{A}_{ext}(q)$:

σ_c le côté de Q_q qui contient c,

F_c le flux de pression approché sur c extérieur à Ω,

$\overline{F}_c$ le flux de pression exact sur c extérieur à Ω, i.e.

$$\overline{F}_c = \frac{1}{l(c)} \int_c g(\tau)\, d\tau.$$

3.2.2.2 Reconstruction des flux approchés de pression par interpolation

Cette méthode consiste à interpoler les flux sur les côtés des mailles grossières situées de part et d'autre du côté considéré du maillage fin.
Supposons donc que q_1 et q_2 soient deux mailles de $\mathcal{T}_h$ incluses dans une maille grossière Q_2. On note Q_1 et Q_3 deux des voisins de Q_2 et L_1 (respectivement L_2) la distance de $c_{q_1q_2}$ à $\sigma_{Q_1Q_2}$ (respectivement de $c_{q_1q_2}$ à $\sigma_{Q_2Q_3}$), voir figure 3.1.

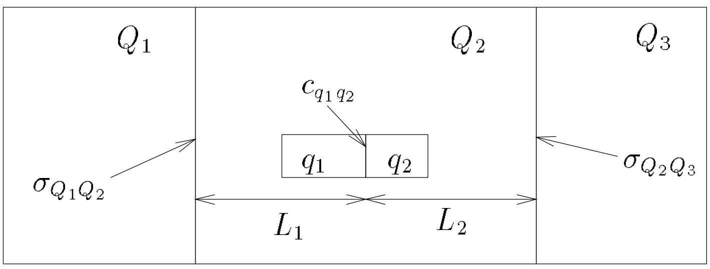

FIG. 3.1 -

On approche alors le flux sur l'interface entre q_1 et q_2 dans la direction de q_1 vers q_2 par :

$$F_{q_1q_2} = \frac{L_2\, F_{Q_1Q_2} + L_1\, F_{Q_2Q_3}}{L_1 + L_2}$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme suivante, pour tout $q \in \mathcal{T}_h$ et $q_v \in N(q)$:

$$\begin{aligned} F_{qq_v} = & \sum_{Q_v \in N(Q_q)} n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v} \frac{P_{Q_v} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_v}} \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma_{Q_qQ_v})}{H_{qq_v}} \right) \\ & + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q_q)} n_{qq_v}.n_\sigma \; g_\sigma \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma)}{H_{qq_v}} \right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

où $d(\cdot,\cdot)$ est la distance euclidienne de $I\!R^2$ et où

$$H_{qq_v} = \begin{cases} L_{Q_q} & \text{si } \vec{\sigma}_{qq_v}.\vec{L}_{Q_q} = 0 \\ l_{Q_q} & \text{sinon} \end{cases}$$

L_{Q_q} étant la longueur de Q_q et l_{Q_q} sa largeur et n_σ est la normale à σ extérieur à Ω. Remarquons que F_{qq_v} est bien une moyenne pondérée des flux sur les côtés de $\mathcal{T}_H$ situés de part et d'autre de c_{qq_v} puisque :

$$\begin{aligned} & \sum_{Q_v \in N(Q_q)} |n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}| \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma_{Q_qQ_v})}{H_{qq_v}} \right) \\ & + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q_q)} |n_{qq_v}.n_\sigma| \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma)}{H_{qq_v}} \right) = 1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pour les côtés $c \in \mathcal{A}_{ext}(q)$ situés sur le bord du domaine, on choisit l'approximation suivante :

$$F_c = g_{\sigma_c}$$

Remarque 3.2

1. *Conservativité des flux*

   Cette reconstruction vérifie bien le principe de conservativité, i.e. pour tout $q \in \mathcal{T}_h$ et tout $q_v \in N(q)$

   $$F_{qq_v} = -F_{q_vq}$$

2. *Conservation*

   Comme on veut que l'équation $\int_q \Delta P(x)\,dx = 0$, où P est la solution du problème elliptique, soit bien approchée sur le maillage fin, on veut que la reconstruction des flux vérifie la propriété suivante :

   $$B_q = \sum_{q_v \in N(q)} l(c_{qq_v})\, F_{qq_v} + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} l(c)\, F_c = 0 \tag{3.18}$$

   pour tout $q \in \mathcal{T}_h$.

   Montrons que la reconstruction qui est donnée par (3.16) vérifie bien cette équation.

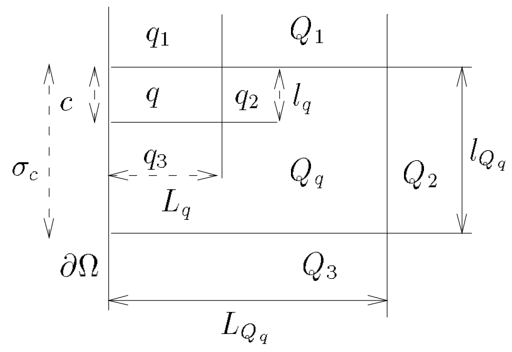

FIG. *3.2* -

Soit $q \in \mathcal{T}_h$, on se place dans la configuration de la figure 3.2 afin de détailler l'expression des flux de pression sur chacun des côtés de q.

Dans ce cas les flux sont donnés par:

$$F_{qq_1} = F_{Q_qQ_1}$$

$$F_{qq_2} = \frac{L_q}{L_{Q_q}}\ F_{Q_qQ_2} - \frac{L_{Q_q} - L_q}{L_{Q_q}}\ g_{\sigma_c}$$

$$F_c = g_{\sigma_c}$$

$$F_{qq_3} = \frac{l_q}{l_{Q_q}}\ F_{Q_qQ_3} + \frac{l_{Q_q} - l_q}{l_{Q_q}}\ F_{Q_1Q_q}$$

Ainsi:

$$B_q = \frac{l_q\,L_q}{l_{Q_q}\,L_{Q_q}}\Big(L_{Q_q}\ F_{Q_qQ_1} + l_{Q_q}\ F_{Q_qQ_2} + L_{Q_q}\ F_{Q_qQ_3} + l_{Q_q}\ g_{\sigma_c}\Big)$$

et donc d'après (3.13):

$$B_q = 0$$

Il est facile de vérifier que les autres cas de figure possibles donnent le même résultat.

3.2.2.3 Reconstruction des flux approchés de pression par résolution de problèmes locaux

Cette méthode consiste à chercher une pression approchée sur le maillage fin pour reconstruire le flux.
Pour cela, on résout des problèmes découplés localement dans chaque maille $Q \in \mathcal{T}_H$. Tout d'abord, on a besoin d'une reconstruction des flux de pression sur les côtés de $\mathcal{T}_h$ inclus dans les côtés du maillage grossier $\mathcal{T}_H$. Ces reconstructions correspondent aux conditions aux limites des problèmes locaux cités précédemment.
Soit $q \in \mathcal{T}_h$ et $q_v \in N_{ext}(q)$, on rappelle que $q \subset Q_q$ ($Q_q \in \mathcal{T}_H$) et $q_v \subset Q_{q_v}$ ($Q_{q_v} \in \mathcal{T}_H$) avec $Q_q \neq Q_{q_v}$. On approche alors le flux F_{qq_v} à travers c_{qq_v} par le flux $F_{Q_qQ_{q_v}}$ à travers $\sigma_{Q_qQ_{q_v}}$, on a donc :

$$F_{qq_v} = F_{Q_qQ_{q_v}} = \frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}}$$

Pour les côtés c situés sur le bord du domaine on prend le flux exact :

$$F_c = g_c = \frac{1}{l(c)} \int_c g(\tau)\, d\tau$$

Il ne reste donc plus qu'à reconstruire les flux de pression sur les côtés de $\mathcal{T}_h$ situés à l'intérieur d'une maille de $\mathcal{T}_H$.
Pour cela on cherche une approximation de la pression à l'intérieur de chaque grosse maille. Cette reconstruction est cherchée sous la forme d'une fonction constante sur les mailles de $\mathcal{T}_h$, c'est à dire que l'on cherche la solution approchée sous la forme

$$p_{\mathcal{T}_h}(x) = p_q \quad \text{si } x \in q,\ q \in \mathcal{T}_h. \tag{3.19}$$

On veut que $p_{\mathcal{T}_h}$ soit une "bonne" approximation de la solution du problème (3.3), (3.5), or nous verrons plus tard que $P_{\mathcal{T}_H}$ approche "bien" cette dernière. On construit donc $p_{\mathcal{T}_h}$ de la façon suivante, on considère chaque $Q \in \mathcal{T}_H$ comme un sous domaine de Ω maillé par les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui sont inclus dans Q, on discrétise alors (3.3) sur Q de la même façon que dans le paragraphe précédent. On intègre (3.3) sur $q \in \mathcal{T}_h$, on obtient à l'aide de la formule de Green :

$$\sum_{q_v \in N_{int}(q)} \int_{c_{qq_v}} \nabla P(\tau)\, n_{qq_v}\, d\tau + \sum_{q_v \in N_{ext}(q)} \int_{c_{qq_v}} \nabla P(\tau)\, n_{qq_v}\, d\tau + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \int_c g(\tau)\, d\tau = 0$$

On considére alors le flux de pression connu sur le bord de Q, c'est à dire sur toutes interfaces c_{qq_v} oú $q_v \in N_{ext}(q)$. Sa valeur est :

$$\frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}}$$

Pour les côtés c_{qq_v} tels que $q_v \in N_{int}(q)$, on utilise le schéma à cinq points déja utilisé sur la grille grossière. On approche alors le flux sur une interface de ce type par :

$$\frac{p_{q_v} - p_q}{d_{qq_v}}$$

Ainsi $p_{\mathcal{T}_h}$, défini par (3.19), est solution du problème suivant :

$$\sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v}) \, \frac{p_{q_v} - p_q}{d_{qq_v}} + \sum_{q_v \in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v}) \, \frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_q Q_{q_v}}} + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} l(c) \, g_c = 0 \tag{3.20}$$

pour tout $q \in \mathcal{T}_h$.

Cette équation permet de construire le flux de pression approché sur chaque interface entre deux mailles voisines q et q_v telles que $Q_q = Q_{q_v}$, on pose :

$$F_{qq_v} = \frac{p_{q_v} - p_q}{d_{qq_v}}$$

Remarque 3.3

1. *L'équation (3.20) conduit à n_H problèmes linéaires indépendants, où n_H est le nombre de mailles de $\mathcal{T}_H$.*

2. *Cette reconstruction vérifie bien le principe de conservativité des flux ainsi que celui de la conservation (voir remarque 3.2).*

3.2.2.4 Equation discrétisée associée à l'équation hyperbolique

Avant de discrétiser (3.4), il reste encore à se définir un pas de temps k. Soient donc $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω, satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et $\eta \in]0,1[$, alors on choisit $k \in I\!R_+^*$ qui satisfait la condition de stabilité suivante :

$$\frac{k}{m(q)} \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} F_{qq_v} \, l(c_{qq_v}) + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} l(c) \, F_c^+ \right) \leq 1 - \eta \qquad \text{pour tout } q \in \mathcal{T}_h. \tag{3.21}$$

où F_c^+ est défini par 3.25.
On note $t^n = n \; k$ pour tout $n \in I\!N$.

Discrétisons tout d'abord la condition initiale et la condition aux limites ; On définit pour tout $q \in \mathcal{T}_h$:

$$u_q^0 = \frac{1}{m(q)} \int_q u_0(x) \; dx \tag{3.22}$$

et pour tout $q \in \mathcal{T}_h$, tout $c \in \mathcal{A}_{ext}(q)$ et tout $n \in I\!N$

$$\overline{u}_c^n = \frac{1}{k \, l(c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \overline{u}(\tau, t) \, d\tau \, dt \tag{3.23}$$

Pour discrétiser l'équation de saturation on utilise un schéma d'Euler explicite en temps et volumes finis en espace décentré vers l'amont de l'écoulement. On approche alors u par $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ avec

$$u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t) = u_q^n \quad \text{si } x \in q \text{ et } t \in [t^n, t^{n+1}[, \; q \in \mathcal{T}_h \text{ et } n \in I\!N. \tag{3.24}$$

Le principe des schéma volumes finis est d'intégrer l'équation à discrétiser sur chaque pas de temps et chaque maille. La discrétisation de cette équation se fait alors comme dans le chapitre 2. L'équation discrétisée est donc la suivante :

$$m(q)\,\frac{(u_q^{n+1}-u_q^n)}{k}-\sum_{q_v\in N(q)} u_{qq_v}^n\; l(c_{qq_v})\; F_{qq_v}-\sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} l(c)\,\left(\overline{u}_c^n\,F_c^+-u_q^n\,F_c^-\right)=0$$

pour tout $q\in\mathcal{T}_h$ et tout $n\in I\!N$, où

$$u_{qq_v}^n=\begin{cases} u_{q_v}^n & \text{si } F_{qq_v}>0\\ \\ u_q^n & \text{sinon}\end{cases}$$

et où F_c^+ et F_c^- sont définis de la façon suivante :

$$(3.25)\begin{cases}\text{- si les flux sont reconstruits par interpolation :}\\ F_c^+=\dfrac{1}{l(\sigma_c)}\displaystyle\int_{\sigma_c}\max(g(\tau),0)\,d\tau \quad \text{et} \quad F_c^-=\dfrac{1}{l(\sigma_c)}\displaystyle\int_{\sigma_c}\max(-g(\tau),0)\,d\tau\\ \\ \text{- si les flux sont reconstruits par résolution de problèmes locaux :}\\ F_c^+=\dfrac{1}{l(c)}\displaystyle\int_c\max(g(\tau),0)\,d\tau \quad \text{et} \quad F_c^-=\dfrac{1}{l(c)}\displaystyle\int_c\max(-g(\tau),0)\,d\tau\end{cases}$$

En utilisant (3.18) ou (3.20), ce schéma peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$m(q)\,\frac{(u_q^{n+1}-u_q^n)}{k}-\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v}\,(u_{q_v}^n-u_q^n)\,l(c_{qq_v})-\sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} l(c)\,\left(\overline{u}_c^n-u_q^n\right)\,F_c^+=0$$

(3.26)

3.2.3 Estimations d'erreur pour le problème elliptique discrétisé sur le maillage grossier

On établit dans ce paragraphe l'existence et l'unicité à une constante près des solutions de (3.12) et (3.13). Puis on montre la convergence de la solution approchée vers la solution de (3.9) en établissant des estimations d'erreur en norme H^1 discrète. Cette démonstration généralise les résultats donnés dans [23] et [41]. En effet dans [23], R. Herbin considère un problème de diffusion convection avec une condition aux limites de Dirichlet, dans [41] le problème elliptique est le même que celui considéré ici. Mais dans ces deux articles la solution exacte du problème est supposée régulière $(C^2(\overline{\Omega}))$, alors qu'ici, on ne suppose cette dernière que $H^2(\Omega)$. Des estimations d'erreur en norme H^1 discrète, sont également établies dans [27] lorsque la solution exacte est H^m $(3/2<m\leq 2)$ pour un problème de diffusion convection avec une condition aux limites de type Dirichlet homogène sur un maillage de carrés. Ici les résultats sont

montrés pour un maillage de rectangles de tailles variables (nécessaire seulement pour la méthode de double maillage) et se généralisent à des maillages plus complexes (voir remarque 3.4). Dans [36] les auteurs établissent la convergence d'un schéma volumes finis en utilisant la théorie des éléments finis mixtes pour une équation de diffusion avec une condition de Dirichlet homogène sur un maillage rectangulaire. Ils établissent des estimations d'erreur en supposant la solution exacte dans $H^2(\Omega)$. Dans [11] les auteurs s'intéressent à la convergence d'un schéma volumes finis mailles diamants pour un problème de diffusion convection.

Proposition 3.1 *Soient $\mathcal{T}_H$ un maillage de Ω satisfaisant les hypothèses de régularité (3.11), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0$. Alors il existe une unique solution à une constante près $P_{\mathcal{T}_H}$ du problème (3.12) et (3.13).*

Nous ne faisons pas cette démonstration ici, elle est identique à celles données dans [31] ou [32] ou celle de la proposition 2.1 page 22.
On montre alors le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit $\mathcal{T}_H$ un maillage de Ω satisfaisant les hypothèses de régularité (3.11). Soit g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\, d\tau = 0$. On note $P(.)$ la solution exacte du problème (3.3), (3.5) telle que $\int_\Omega P(x)\, dx = 0$. On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13) et telle que $\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q) P_Q = \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q) P(x_Q)$. On définit l'erreur sur la maille Q, pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$, par $E_Q = P_Q - P(x_Q)$.*
Alors il existe C, ne dépendant que de Ω, α et de la norme H^2 de P, telle que

$$\left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{Q_v\in N(Q)} \frac{(E_{Q_v}-E_Q)^2}{d_{QQ_v}}\, l(\sigma_{QQ_v})\right)^{1/2} \le C\, H$$

$$et \qquad \left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\, |E_Q|^2\right)^{1/2} \le C\, H$$

Pour établir ce résultat, on commence par montrer la consistance du schéma au sens volumes finis.

Consistance du schéma :

Remarquons tout d'abord que pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$, $P(x_Q)$ a bien un sens car $H^2(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C(\overline{\Omega})$.
Soit $Q \in \mathcal{T}_H$ et $Q_v \in N(Q)$, on définit l'erreur de consistance $R_{QQ_v}(P)$ sur l'interface entre Q et Q_v par :

$$R_{QQ_v}(P) = \frac{P(x_{Q_v}) - P(x_Q)}{d_{QQ_v}} - \frac{1}{l(\sigma_{QQ_v})}\int_{\sigma_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_{QQ_v}\, d\tau$$

Sur le bord l'erreur de consistance est nulle puisqu'on connaît le flux exact qui est g. Définissons un maillage dual comme le montre la figure 3.3. Pour toute maille $Q \in \mathcal{T}_H$ et tout $Q_v \in N(Q)$, on définit la maille duale $\mathcal{V}_{QQ_v}$ qui est le quadrangle qui a pour sommet x_Q, x_{Q_v} et les deux sommets de σ_{QQ_v}.

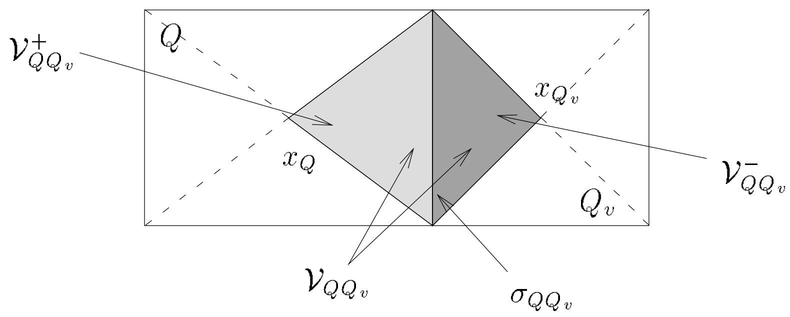

Fig. 3.3 -

On peut alors considérer que l'erreur de consistance est une fonction $R_H(P)$ constante sur chaque maille duale $\mathcal{V}_{QQ_v}$. Remarquons de plus que l'aire de la maille duale $\mathcal{V}_{QQ_v}$ construite autour de l'interface σ_{QQ_v} ($Q \in \mathcal{T}_H$ et $Q_v \in N(Q)$) est égale à $(d_{QQ_v}\, l(\sigma_{QQ_v}))/2$ ainsi la norme L^2 de l'erreur de consistance est définie par :

$$\|R_H(P)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\frac{1}{2}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{Q_v\in N(Q)} d_{QQ_v}\, l(\sigma_{QQ_v}) R^2_{QQ_v}(P)\right)^{1/2}$$

On va montrer que le schéma est consistant au sens volumes finis (voir [16]).

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.1, on montre qu'il existe C, ne dépendant que de α et de Ω, telle que :*

$$\|R_H(P)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \|P\|_{H^2(\Omega)}\, H$$

Démonstration du lemme 3.1 :

Pour montrer cela, on commence par supposer que $P \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Soit $Q \in \mathcal{T}_H$ et $Q_v \in N(Q)$, plaçons nous alors dans le repère orthonormé (noté $\mathcal{C}^{QQ_v}$) qui a pour origine x_Q et dont l'axe des abscisses est $(x_Q x_{Q_v})$ (voir figure 3.4). Notons de plus a et b ($a < b$) les ordonnées des deux sommets de σ_{QQ_v}, d_Q la distance entre x_Q et σ_{QQ_v} et d_{Q_v} la distance entre x_{Q_v} et σ_{QQ_v}, on a alors $d_Q + d_{Q_v} = d_{QQ_v}$ et $R_{QQ_v}(P)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$R_{QQ_v}(P) = -\frac{1}{l(\sigma_{QQ_v})}\int_a^b \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_Q, x_2)\, dx_2 + \frac{P(d_{QQ_v},0) - P(0,0)}{d_{QQ_v}}$$

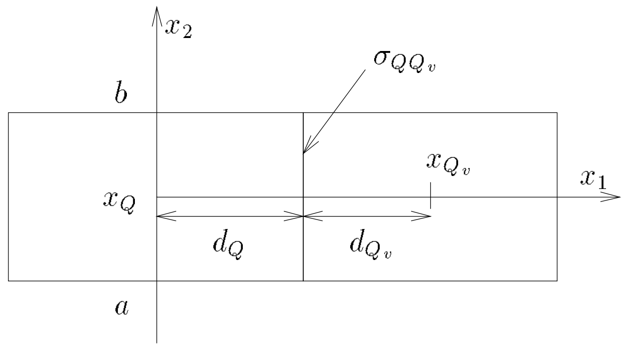

FIG. 3.4 -

Notons

$$\overline{P}_{QQ_v} = \frac{1}{l(\sigma_{QQ_v})} \int_{\sigma_{QQ_v}} P(\tau)\, d\tau$$

en utilisant un développement de Taylor avec reste intégrale on obtient :

$$l(\sigma_{QQ_v}) \left(\overline{P}_{QQ_v} - P(0,0)\right) = \int_a^b \nabla P(d_Q, x_2). \begin{pmatrix} d_Q \\ x_2 \end{pmatrix} dx_2 - \int_{\sigma_{QQ_v}} \int_0^1 t\, D^2 P(\tau\, t)\, \tau.\tau\, dt\, d\tau$$

de même :

$$l(\sigma_{QQ_v}) \left(\overline{P}_{QQ_v} - P(d_{QQ_v}, 0)\right) = \int_a^b \nabla P(d_Q, x_2). \begin{pmatrix} -d_{Q_v} \\ x_2 \end{pmatrix} dx_2$$
$$- \int_{\sigma_{QQ_v}} \int_0^1 t\, D^2 P(\tau\, t + (1-t)\, x_{Q_v})\, (\tau - x_{Q_v}).(\tau - x_{Q_v})\, dt\, d\tau$$

ainsi :

$$|R_{QQ_v}(P)| \leq \frac{H^2}{l(\sigma_{QQ_v})\, d_{QQ_v}} \left(\int_a^b \int_0^1 t\, |D^2 P|(d_Q\, t, x_2\, t)\, dt\, dx_2 \right.$$
$$\left. + \int_a^b \int_0^1 t\, |D^2 P|(d_Q\, t + (1-t) d_{QQ_v}, x_2\, t)\, dt\, dx_2 \right)$$

où $|D^2 P| = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right|$.

En effectuant un changement de variables dans chaque intégrale on obtient :

$$|R_{QQ_v}(P)| \leq \frac{H^2}{l(\sigma_{QQ_v})\, d_{QQ_v}} \left(\frac{1}{d_Q} \int_{\mathcal{V}^+_{QQ_v}} |D^2 P(z)|\, dz + \frac{1}{d_{Q_v}} \int_{\mathcal{V}^-_{QQ_v}} |D^2 P(z)|\, dz \right)$$

où $\mathcal{V}^+_{QQ_v} = \mathcal{V}_{QQ_v} \cap Q$ et $\mathcal{V}^-_{QQ_v} = \mathcal{V}_{QQ_v} \cap Q_v$.

Ainsi d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et les hypothèses (3.11), on a :

$$|R_{QQ_v}(P)| \leq \frac{H\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{l(\sigma_{QQ_v})\,d_{QQ_v}}}\|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{QQ_v})}$$

$$= \frac{H\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{l(\sigma_{QQ_v})\,d_{QQ_v}}}\left(\int_{\mathcal{V}_{QQ_v}}\Big(|P|^2+|\nabla P|^2+|D^2P|^2\Big)(z)\,dz\right)^{1/2} \tag{3.27}$$

et donc :

$$\|R_H(P)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{Q_v\in N(Q)} d_{QQ_v}\,l(\sigma_{QQ_v})R^2_{QQ_v} \leq \frac{H^2}{\alpha^2}\|P\|^2_{H^2(\Omega)} \tag{3.28}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.1 dans le cas où $P\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Plaçons nous alors dans le cas où $P\in H^2(\Omega)$ alors (voir [29]) il existe $(P_j)_{j\in I\!N}$, $P_j\in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour tout $j\in I\!N$, telle que :

$$\lim_{j\to\infty}\|P_j-P\|_{H^2(\Omega)}=0$$

De plus comme $H^2(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C(\overline{\Omega})$, il existe C, ne dépendant que de Ω telle que :

$$\|P_j-P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,\|P_j-P\|_{H^2(\Omega)} \tag{3.29}$$

D'après (3.28), on a :

$$\|R_H(P_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{H}{\alpha}\|P_j\|_{H^2(\Omega)} \tag{3.30}$$

On va montrer qu'il existe C, ne dépendant que de α et de H telle que :

$$\|R_H(P_j)-R_H(P)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|P_j-P\|_{H^2(\Omega)}$$

En effet :

$$|R_{QQ_v}(P)-R_{QQ_v}(P_j)| \leq \frac{1}{\sqrt{l(\sigma_{QQ_v})}}\left(\int_{\sigma_{QQ_v}}\Big(\nabla P(\tau)-\nabla P_j(\tau)\Big)^2\right)^{1/2} + \\ +\frac{2}{d_{QQ_v}}\|P-P_j\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On utilise alors le lemme suivant que l'on démontrera par la suite.

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω (non nécessairement rectangulaire). On suppose que l'intersection entre deux mailles de $\mathcal{T}$ est soit un point soit un segment, ce segment est alors un côté de chacune de ces deux mailles. On note $N(p)$ l'ensemble des voisins de $p\in\mathcal{T}$. On suppose qu'il existe une famille de points $(x_p)_{p\in\mathcal{T}}$ telle que pour tout $p\in\mathcal{T}$, $x_p\in p$ et pour tout $p\in\mathcal{T}$ et tout $q\in N(p)$, $[x_p,x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p,x_q]\cap\sigma_{pq}\neq\emptyset$.*

Soient alors $p \in \mathcal{T}$, $q \in N(p)$ et $u \in H^1(\mathcal{V}_{pq})$, (voir figure 3.3 pour la définition de $\mathcal{V}_{pq}$).
Alors, la trace de u sur σ_{pq} existe, c'est un élément de $L^2(\sigma_{pq})$. De plus, il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{L^2(\sigma_{pq})} \leq \frac{C}{\sqrt{d(x_p, x_q)}} \|u\|_{H^1(\mathcal{V}_{pq})} \tag{3.31}$$

Ainsi d'après le lemme 3.2 et l'inégalité (3.29)

$$|R_{QQ_v}(P) - R_{QQ_v}(P_j)| \leq \frac{2}{\alpha \sqrt{l(\sigma_{QQ_v})\, d_{QQ_v}}} \|P_j - P\|_{H^2(\mathcal{V}_{QQ_v})} + \frac{2\,C}{\alpha\, H} \|P - P_j\|_{H^2(\Omega)}$$

où C ne dépend que de Ω et donc :

$$\|R_H(P_j) - R_H(P)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4\,C\,\sqrt{m(\Omega)}}{\alpha\, H} \right) \|P_j - P\|_{H^2(\Omega)}$$

où C ne dépend que de Ω.
En passant à la limite sur (3.30), on termine la démonstration du lemme 3.1.

Montrons alors le lemme 3.2.

Démonstration du lemme 3.2 :

Tout d'abord, remarquons que cette inégalité est vraie sur un triangle rectangle par exemple celui noté $\tilde{T}$ sur la figure 3.5.

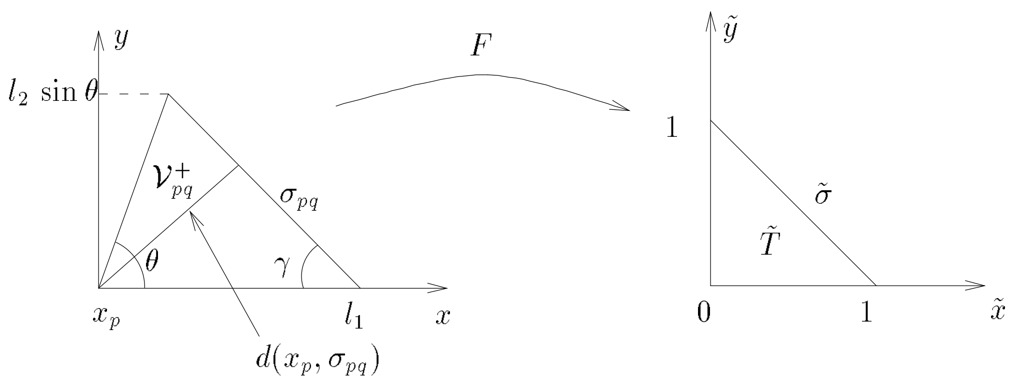

FIG. 3.5 -

Donc si $\tilde{u} \in H^1\left(\tilde{T}\right)$, il existe une constante C telle que :

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\sigma})} \leq C \|\tilde{u}\|_{H^1(\tilde{T})} \tag{3.32}$$

où $\tilde{\sigma}$ est défini en figure 3.5.

Soit $p \in \mathcal{T}$, $q \in N(p)$ et $u \in H^1(\mathcal{V}_{pq})$. On se place dans le repère donné par la figure 3.5. On note F l'application linéaire qui transforme $\mathcal{V}_{pq}^+$ en $\tilde{T}$, elle est définie par :

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) = \dfrac{x}{l_1} - \dfrac{y}{l_1 \tan\theta} \\ \\ F_2(x,y) = \dfrac{y}{l_2 \sin\theta} \end{pmatrix}$$

où l_1, l_2 et θ sont définis en figure 3.5.
On définit $\tilde{u} \in H^1(\tilde{T})$ par $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) = u\Big(F^{-1}(\tilde{x},\tilde{y})\Big)$, pour tout $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \tilde{T}$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_{pq}} u^2(\tau)\,d\tau &= \int_0^{l_2 \sin\theta} u^2\left(\frac{l_2\cos\theta - l_1}{l_2 \sin\theta}\,y + l_1, y\right)\frac{l(\sigma_{pq})}{l_2 \sin\theta}\,dy \\ &= \int_0^1 \tilde{u}^2\,(-\tilde{y}+1,\tilde{y})\,l(\sigma_{pq})\,d\tilde{y} = \frac{l(\sigma_{pq})}{\sqrt{2}}\int_{\tilde{\sigma}} \tilde{u}^2(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

donc d'après (3.32) il existe une constante C telle que :

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_{pq})} \le C\,l(\sigma_{pq})\,\|\overline{u}\|^2_{H^1(\tilde{T})} = C\int_{\mathcal{V}_{pq}^+} u(x,y)\,\frac{l(\sigma_{pq})}{l_1\,l_2\,\sin\theta}\,dx\,dy$$

Remarquons alors que $\sin\gamma = l_2\,\sin\theta / l(\sigma_{pq})$ et que $l_1\,\sin\gamma = d(x_p,\sigma_{pq})$, ainsi :

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_{pq})} \le \frac{C}{d(x_p,\sigma_{pq})}\|u\|^2_{H^1(\mathcal{V}_{pq}^+)}$$

de la même façon :

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_{pq})} \le \frac{C}{d(x_q,\sigma_{pq})}\|u\|^2_{H^1(\mathcal{V}_{pq}^-)}$$

et donc, il existe une constante C telle que :

$$\|u\|^2_{L^2(\sigma_{pq})} \le \frac{C}{d_{pq}}\|u\|^2_{H^1(\mathcal{V}_{pq})}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.2 ainsi que celle de la consistance du schéma, montrons alors les estimations d'erreurs du théorème 3.1.

Démonstration du théorème 3.1 :

Comme $P \in H^2(\Omega)$ est solution de (3.9) :

$$\Delta P(x) = 0 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega \tag{3.33}$$

et :

$$\nabla P(\tau).n(\tau) = g(\tau) \qquad \text{p.p. } \tau\partial\Omega$$

Ainsi en intégrant (3.33) sur $Q \in \mathcal{T}$, il vient :

$$\sum_{Q_v \in N(Q)} \int_{\sigma_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_{QQ_v}\, d\tau + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} \int_\sigma g(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.34}$$

On soustrait alors (3.13) à (3.34), on multiplie par E_Q, on utilise la conservativité des flux exacts et approchés (pour plus de détails voir le paragraphe 2.3.2 page 23), on obtient :

$$\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{\left(E_{Q_v} - E_Q\right)^2}{d_{QQ_v}} = \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\, R_{QQ_v}(P) \left(E_{Q_v} - E_Q\right)$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{\left(E_{Q_v} - E_Q\right)^2}{d_{QQ_v}}\right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\, d_{QQ_v}\, R^2_{QQ_v}(P)\right)^{1/2} \\ &\leq C\, \|P\|_{H^2(\Omega)}\, H\end{aligned}$$

où C ne dépend que de α et de Ω.
On termine la démonstration du théorème 3.1 en utilisant l'inégalité de Poincaré moyenne discrète démontrée dans le lemme 2.2 page 26, qui donne :

$$\left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} m(Q)\, |E_Q|^2\right)^{1/2} \leq C_1 \left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{\left(E_{Q_v} - E_Q\right)^2}{d_{QQ_v}}\right)^{1/2} \leq C_2\, H$$

où C_1 ne dépend que de Ω et C_2 que de α, Ω et de la norme H^2 de P.

Remarque 3.4 *Cette démonstration se généralise à des maillages plus complexes, il suffit qu'ils vérifient les propriétés (2.7) page 17. On peut choisir par exemple un maillage triangulaire (voir remarque 2.2.1 page 17).*
De plus, en utilisant le lemme 2.4 page 36 ainsi que le théorème 3.1 page 72, on a :

$$\left(\sum_{Q \in \mathcal{T}_H} m(Q)\, |E_Q|^r\right)^{1/r} \leq C\, r\, H$$

pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$ et où C ne dépend que de α, Ω et de la norme H^2 de P.
On en déduit une estimation en norme infinie (comme dans le théorème 2.2 page 35) :

$$\max_{Q \in \mathcal{T}_H} |E_Q| \leq C\, H\, \ln(H)$$

où C ne dépend que de α, Ω et de la norme H^2 de P.

3.2.4 Estimations d'erreurs pour la reconstruction des flux approchés de pression

Afin de montrer la convergence de la saturation approchée on a besoin d'estimations d'erreur sur les flux approchés de pression reconstruits sur les côtés du maillage fin. Dans le cas de la méthode de résolution de problèmes locaux, il faut de plus s'assurer que la reconstruction existe toujours.

Proposition 3.2 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. On note $P(.)$ la solution de (3.9) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13) et telle que $\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\,P_Q = \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\,P(x_Q)$.*

Alors il existe $p_{\mathcal{T}_h}$ solution de (3.19) et (3.20).
De plus soient deux solutions de ce problème $p^{(1)}_{\mathcal{T}_h}$ et $p^{(2)}_{\mathcal{T}_h}$, alors pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$, il existe C_Q ne dépendant que de Q telle que :

$$p^{(2)}_{\mathcal{T}_h}(x) = p^{(1)}_{\mathcal{T}_h}(x) + C_Q \qquad \textit{pour tout } x \in Q.$$

Démonstration de la proposition 3.2 :

Comme on l'a déja remarqué, (3.20) définit n_H problèmes linéaires indépendants, où n_H est le nombre de mailles de $\mathcal{T}_H$.
Soit donc $Q \in \mathcal{T}_H$, on va montrer qu'il existe une solution $(p_q)_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}}$ unique à une constante près de (3.20).
Par un raisonnement semblable à celui effectué dans la démonstration de la proposition 2.1 page 22, on montre que si :

$$\sum_{q_v\in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{P_{Q_{q_v}} - P_Q}{d_{QQ_{q_v}}} + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_c g(\tau)\,d\tau = 0$$

pour tout $q \in \mathcal{T}_h$, $q \subset Q$, alors :

$$p_q = p_{q_v} \qquad \text{pour tout } q \in \mathcal{T}_h,\ q \subset Q \text{ et tout } q_v \in N_{int}(q) \tag{3.35}$$

Il reste à établir l'existence de ces solutions, supposons donc qu'il existe une solution et sommons alors les équations de (3.20), on obtient :

$$\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} \sum_{q_v\in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{P_{Q_{q_v}} - P_Q}{d_{Q_qQ_{q_v}}} + \sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_c g(\tau)\,d\tau = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{Q_v\in N(Q)} \frac{P_{Q_v} - P_Q}{d_{QQ_v}}\,l(\sigma_{QQ_v}) + \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \int_\sigma g(\tau)\,d\tau = 0$$

Or $(P_Q)_{Q\in\mathcal{T}_H}$ vérifient (3.13), il y a donc existence de solutions de (3.20). De plus d'après (3.35) on a bien le résultat suivant :

Soient deux solutions de (3.19) et (3.20), $p^{(1)}_{\mathcal{T}_h}$ et $p^{(2)}_{\mathcal{T}_h}$, alors d'après (3.35) pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$, il existe C_Q ne dépendant que de Q telle que :

$$p^{(2)}_{\mathcal{T}_h}(x) = p^{(1)}_{\mathcal{T}_h}(x) + C_Q \qquad \text{pour tout } x \in Q$$

On montre alors le résultat suivant qui donne des estimations en norme L^2 sur les flux reconstruits.

Proposition 3.3 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. On note $P(.)$ une solution de (3.9). On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13).*
Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ satisfaisant (3.19) et (3.20). Notons

$$A_h = \left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left(F_{qq_v} - \overline{F}_{qq_v}\right)^2 \right)^{1/2}$$

où l'on rappelle que F_{qq_v} est le flux approché sur l'interface entre q et q_v, il est défini en section 3.2.2.2 si les flux sont reconstruits par interpolation et en section 3.2.2.3 si les flux sont reconstruits par résolution de problèmes locaux. On rappelle également que $\overline{F}_{qq_v}$ est le flux exact défini par (3.15). Alors il existe C_1 et C_2, ne dépendant que de Ω, β, α et P, telles que

$$A_h \le C_1 \sqrt{H}$$

si les flux sont reconstruits par résolution de problèmes locaux,

$$A_h \le C_2\, H$$

si les flux sont reconstruits par interpolation.

Démonstration de la proposition 3.3 :

Flux reconstruits par interpolation :

D'après la définition des flux interpolés, on a :

$$F_{qq_v} = \sum_{Q_v\in N(Q_q)} (n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}) \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma_{Q_qQ_v})}{H_{qq_v}}\right) \frac{P_{Q_v} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_v}} + \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q_q)} (n_{qq_v}.n_\sigma) \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma)}{H_{qq_v}}\right) g_\sigma$$

et

$$\sum_{Q_v\in N(Q_q)} |n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}| \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma_{Q_qQ_v})}{H_{qq_v}}\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q_q)} |n_{qq_v}.n_\sigma| \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma)}{H_{qq_v}}\right) = 1$$

alors :

$$A_h = \left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left[\sum_{Q_v\in N(Q_q)} \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma_{Q_qQ_v})}{H_{qq_v}}\right) \left(\frac{P_{Q_v} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_v}}(n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}) - \overline{F}_{qq_v}\, |n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}|\right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q_q)} \left(\frac{H_{qq_v} - d(c_{qq_v}, \sigma)}{H_{qq_v}}\right)\left((n_{qq_v}.n_\sigma)\, g_\sigma - |n_{qq_v}.n_\sigma|\, \overline{F}_{qq_v}\right)\right]^2\right)^{1/2}$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$A_h \leq 4\Big(A_{3h} + A_{4h}\Big)$$

où :

$$A_{3h} = \left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)}\sum_{Q_v\in N(Q_q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \times \left| n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v} \frac{P_{Q_v} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_v}} - |n_{qq_v}.n_{Q_qQ_v}|\, \overline{F}_{qq_v}\right|^2\right)^{1/2}$$

et

$$A_{4h} = \left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q_q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v}\, |n_{qq_v}.n_\sigma| \left|\overline{F}_\sigma - \overline{F}_{qq_v}\Big(n_{qq_v}.n_\sigma\Big)\right|^2\right)^{1/2}$$

Ainsi d'après (3.14), et en intervertissant les sommes sur le maillage fin et sur le maillage grossier, on obtient :

$$A_{3h} \leq \left(h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{Q_v\in N(Q)}\sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} l(c) \left| n_c.n_{QQ_v} \frac{P_{Q_v} - P_Q}{d_{QQ_v}} - |n_c.n_{QQ_v}|\, \overline{F}_c\right|^2\right)^{1/2}$$

où $\mathcal{A}_h(Q)$ est l'ensemble des côtés c de $\mathcal{T}_h$ tels que $c \cap \overline{Q} \neq \emptyset$ et où n_c est l'une des deux normale à c, de même :

$$A_{4h} \leq \left(h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} |n_c.n_\sigma|\, l(c) \left| \frac{1}{l(\sigma)}\int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma(\tau)\, d\tau - \frac{1}{l(c)}\int_c \nabla P(\tau).n_c(\tau)\, d\tau\, \Big(n_c.n_\sigma\Big)\right|^2\right)^{1/2} \tag{3.36}$$

Traitons tout d'abord A_{3h}. Pour cela, on note, pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$, $Q_v \in N(Q)$ et $c \in \mathcal{A}_h(Q)$, $c^{\perp}_{QQ_v}$ le projeté orthogonal de c sur σ_{QQ_v}, alors :

$$A_{3h} \leq \Bigg[3\,h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} \sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} l(c) \Bigg(|n_c.n_{QQ_v}| \left| \frac{E_{Q_v}-E_Q}{d_{QQ_v}} \right|^2 + \\ + |n_c.n_{QQ_v}| \left| \frac{P(x_{Q_v})-P(x_Q)}{d_{QQ_v}} - \frac{1}{l(c^{\perp}_{QQ_v})} \int_{c^{\perp}_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_{QQ_v}\, d\tau \right|^2 + \\ + |n_c.n_{QQ_v}| \left| \frac{1}{l(c^{\perp}_{QQ_v})} \int_{c^{\perp}_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c\, d\tau - \frac{1}{l(c)} \int_c \nabla P(\tau).n_c\, d\tau \right|^2 \Bigg) \Bigg]^{1/2}$$

Remarquons, que si $c \subset \sigma_{QQ_v}$ alors le dernier terme de l'inégalité précédente est nul. Soit $Q \in \mathcal{T}_H$, $Q_v \in N(Q)$ et $c \subset \sigma_{QQ_v}$ un côté du maillage fin. On note alors $\mathcal{N}(c)$ l'ensemble des côtés a de $\mathcal{A}_h(Q)$ tels que c est le projeté orthogonal de a sur σ_{QQ_v}. On note de plus $\mathcal{V}_c$ le volume défini par la figure 3.6.

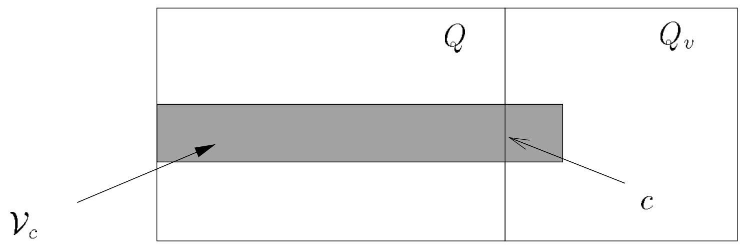

FIG. 3.6 -

Alors d'après (3.11) et (3.14) :

$$\sum_{a\in\mathcal{N}(c)} \beta^2 h^2 \leq m\big(\mathcal{V}_c\big) \leq (H+h)\, l(c) \leq (H+h)\, h$$

ainsi :

$$\sum_{a\in\mathcal{N}(c)} 1 \leq \frac{2\,H}{\beta^2\, h} \tag{3.37}$$

On a alors :

$$A_{3h} \leq \Bigg[\frac{6\,H}{\beta^2} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} \sum_{c\subset\sigma_{QQ_v}} l(c) \Bigg(\left| \frac{E_{Q_v}-E_Q}{d_{QQ_v}} \right|^2 \\ + \left| \frac{P(x_{Q_v})-P(x_Q)}{d_{QQ_v}} - \frac{1}{l(c)} \int_c \nabla P(\tau).n_{QQ_v}\, d\tau \right|^2 \Bigg) \\ + 3\,h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} \sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} \frac{|n_c.n_{QQ_v}|}{l(c)} \left| \int_{c^{\perp}_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c\, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c\, d\tau \right|^2 \Bigg]^{1/2}$$

et donc :

$$
\begin{aligned}
A_{3h} \leq \Bigg[& \frac{6}{\alpha\beta^2} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{|E_{Q_v}-E_Q|^2}{d_{QQ_v}} \\
& \qquad\qquad + \frac{6}{\alpha\beta^2} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{Q_qQ_{q_v}}\, |B_{qq_v}|^2 \\
& + 3\,h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} \sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} \frac{|n_c.n_{QQ_v}|}{l(c)} \left| \int_{c^{\perp}_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c\, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c\, d\tau \right|^2 \Bigg]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

où l'on rappelle que pour tout $q\in\mathcal{T}_h$, Q_q est l'élément de $\mathcal{T}_H$ tel que $q\subset Q_q$, $N_{ext}(q)$ est l'ensemble des voisins q_v de q tels que $q_v \not\subset Q_q$.
On montre alors le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. On note $P(.)$ la solution de (3.9) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$.*
Alors, il existe C, ne dépendant que de α, β et de la norme H^2 de P, telle que :

$$
\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N_{ext}(q)} d_{Q_qQ_{q_v}}\, l(c_{qq_v})\, B^2_{qq_v} \right)^{1/2} \leq C\,H
$$

où B_{qq_v} est défini par :

$$
B_{qq_v} = \frac{P(x_{Q_{q_v}}) - P(x_{Q_q})}{d_{Q_qQ_{q_v}}} - \overline{F}_{qq_v} \tag{3.39}
$$

Démonstration du lemme 3.3 :

On suppose tout d'abord que $P\in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Notons $D^+_{qq_v}$ (respectivement $D^-_{qq_v}$) le triangle défini par x_{Q_q} (respectivement $x_{Q_{q_v}}$) et les deux sommets de c_{qq_v}, et d_{Q_q} (respectivement $d_{Q_{q_v}}$) la distance entre x_{Q_q} (respectivement $x_{Q_{q_v}}$) et σ_{QQ_v} (voir figure 3.7).
Remarquons que $m(D^+_{qq_v}) = \big(d_{Q_q}\, l(c_{qq_v})\big)/2$ et que $m(D^-_{qq_v}) = \big(d_{Q_{q_v}}\, l(c_{qq_v})\big)/2$.
Notons :

$$
\overline{P}_{qq_v} = \frac{1}{l(c_{qq_v})} \int_{c_{qq_v}} P(\tau)\,d\tau
$$

et plaçons nous dans le repère orthonormé ayant pour origine x_{Q_q} et dont l'axe des abscisses est $(x_{Q_q}x_{Q_{q_v}})$. Notons de plus a et b ($a<b$) les ordonnées des sommets de c_{qq_v} (leur abscisse étant égale à d_{Q_q}).

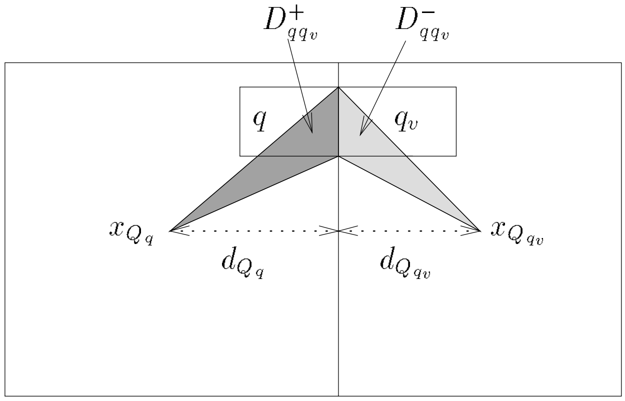

FIG. 3.7 -

Alors :

$$B_{qq_v} = \frac{P(d_{Q_qQ_{qv}}, 0) - P(0,0)}{d_{Q_qQ_{qv}}} - \frac{1}{l(c_{qq_v})} \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{Q_q}, x_2)\, dx_2$$

En utilisant un développement de Taylor avec reste intégrale, il vient :

$$l(c_{qq_v}) \left(\overline{P}_{qq_v} - P(0,0)\right) = \int_a^b \nabla P(d_{Q_q}, x_2). \begin{pmatrix} d_{Q_q} \\ x_2 \end{pmatrix} dx_2 - \int_{c_{qq_v}} \int_0^1 t\, D^2 P(\tau\, t)\, \tau.\tau \, dt\, d\tau$$

et :

$$l(c_{qq_v}) \left(\overline{P}_{qq_v} - P(d_{Q_qQ_{qv}}, 0)\right) = \int_a^b \nabla P(d_{Q_q}, x_2). \begin{pmatrix} -d_{Q_{qv}} \\ x_2 \end{pmatrix} dx_2$$
$$- \int_{c_{qq_v}} \int_0^1 t\, D^2 P(\tau\, t + (1-t)\, x_{Q_v})\, (\tau - x_{Q_{qv}}).(\tau - x_{Q_{qv}})\, dt\, d\tau$$

ainsi en effectuant un changement de variables, on obtient :

$$|B_{qq_v}| \leq \frac{H}{l(c_{qq_v})\, \alpha} \left(\frac{1}{d_{Q_q}} \int_{D^+_{qq_v}} |D^2 P|(z)\, dz + \frac{1}{d_{Q_{qv}}} \int_{D^-_{qq_v}} |D^2 P|(z)\, dz \right)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|B_{qq_v}| \leq \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{l(c_{qq_v})}\, \alpha^2} \left(\int_{D_{qq_v}} |D^2 P|^2(z)\, dz \right)^{1/2} \tag{3.40}$$

où $D_{qq_v} = D^+_{qq_v} \cup D^-_{qq_v}$.
On en déduit que :

$$\left(\sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{ext}(q)} d_{Q_qQ_{qv}}\, l(c_{qq_v})\, B^2_{qq_v} \right)^{1/2} \leq \frac{\|P\|_{H^2(\Omega)}}{\alpha^2\, \beta}\, H$$

On utilise alors comme dans la démonstration du lemme 3.1 la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^2(\Omega)$ pour conclure. Ce qui termine la démonstration du lemme 3.3.

On revient à la démonstartion de la proposition 3.3. On traite alors le dernier terme de (3.38).
Soit $Q \in \mathcal{T}_H$, $Q_v \in N(Q)$ et $c \in \mathcal{A}_h(Q)$ tel que $n_c.n_{QQ_v} \neq 0$. Plaçons nous alors dans le repère orthonormé qui a pour origine l'un des sommets de c, et dont l'axe des ordonnés est parallèle à σ_{QQ_v}. On note l la distance entre c et σ_{QQ_v} et l_Q la longueur du côté de Q qui est orthogonal à σ_{QQ_v}. On a :

$$\left| \int_{c^\perp_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c \, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c \, d\tau \right| \leq \int_0^{l(c)} \int_0^l \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}(t, x_2) \right| dt \, dx_2$$

et d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$\left| \int_{c^\perp_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c \, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c \, d\tau \right| \leq \sqrt{l_Q \, l(c)} \, \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_c \cap Q)} \tag{3.41}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 3\, h \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} \sum_{c \in \mathcal{A}_h(Q)} \frac{|n_c.n_{QQ_v}|}{l(c)} \left| \int_{c^\perp_{QQ_v}} \nabla P(\tau).n_c \, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c \, d\tau \right|^2 \\ \leq \frac{3\, H^2}{\beta^2} \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} \sum_{c \subset \sigma_{QQ_v}} \|P\|^2_{H^2(\mathcal{V}_c \cap Q)} \leq \frac{12\, H^2}{\beta^2} \, \|P\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.42}$$

On utilise alors (3.38), l'inégalité précédente, le théorème 3.1 et le lemme 3.3, on obtient :

$$A_{3h} \leq C\, H \tag{3.43}$$

où C ne dépend que de P, β, α et de Ω.
Traitons alors A_{4h}. On rappelle que d'après (3.36) :

$$\begin{aligned} A_{4h} \leq \Bigg(h \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c \in \mathcal{A}_h(Q)} |n_c.n_\sigma| \, l(c) \Bigg| \frac{1}{l(\sigma)} \int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma(\tau) \, d\tau \\ - \frac{1}{l(c)} \int_c \nabla P(\tau).n_c(\tau) \, d\tau \left(n_c.n_\sigma\right) \Bigg|^2 \Bigg)^{1/2} \end{aligned}$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)$ on note σ_Q le côté de Q opposé à σ (i.e le côté de Q tel que $|n_\sigma.n_{\sigma_Q}| = 1$, où n_{σ_Q} est l'une des deux normales de σ_Q). On note de plus Q_σ le voisin de Q ayant pour côté σ_Q. Pour tout $c \in \mathcal{A}_h(Q)$, on définit comme précédemment $c^\perp_{QQ_\sigma}$ le projeté orthogonal de c sur $\sigma_Q = \partial Q \cap \partial Q_\sigma$ (voir figure 3.8).

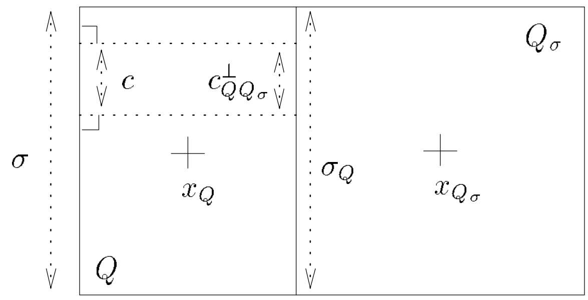

FIG. 3.8 -

On décompose alors A_{4h} sous la forme suivante :

$$A_{4h} \leq \Bigg[4\,h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} l(c) \left| n_c.n_\sigma \right| \Bigg(\frac{1}{l(\sigma)^2} \left| \int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma\, d\tau - \int_{\sigma_Q} \nabla P(\tau).n_\sigma\, d\tau \right|^2 + \left| \frac{1}{l(\sigma_Q)} \int_{\sigma_Q} \nabla P(\tau).n_{QQ_\sigma}\, d\tau - \frac{P(x_{Q_\sigma}) - P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}} \right|^2 + \left| \frac{P(x_{Q_\sigma}) - P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}} - \frac{1}{l(c^{\perp}_{QQ_\sigma})} \int_{c^{\perp}_{QQ_\sigma}} \nabla P(\tau).n_{QQ_\sigma}\, d\tau \right|^2 + \frac{1}{l(c)^2} \left| \int_{c^{\perp}_{QQ_\sigma}} \nabla P(\tau).n_c\, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c\, d\tau \right|^2 \Bigg) \Bigg]^{1/2}$$

En utilisant (3.37), ceci s'écrit encore :

$$A_{4h} \leq \Bigg[\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)\,8\,H}{\beta^2\, l(\sigma)^2} \left| \int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma\, d\tau - \int_{\sigma_Q} \nabla P(\tau).n_\sigma\, d\tau \right|^2 + \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma_Q} \frac{l(c)\,8\,H}{\beta^2} \left| \frac{1}{l(\sigma_Q)} \int_{\sigma_Q} \nabla P(\tau).n_{QQ_\sigma}\, d\tau - \frac{P(x_{Q_\sigma}) - P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}} \right|^2 + \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma_Q} \frac{l(c)\,8\,H}{\beta^2} \left| \frac{P(x_{Q_\sigma}) - P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}} - \frac{1}{l(c)} \int_c \nabla P(\tau).n_{QQ_\sigma}\, d\tau \right|^2 + 4\,h \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\in\mathcal{A}_h(Q)} \frac{\left| n_c.n_\sigma \right|}{l(c)} \left| \int_{c^{\perp}_{QQ_\sigma}} \nabla P(\tau).n_c\, d\tau - \int_c \nabla P(\tau).n_c\, d\tau \right|^2 \Bigg]^{1/2}$$

D'après (3.11) et (3.42), il vient :

$$A_{4h} \leq \Bigg[\frac{8}{\beta^2\,\alpha} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{Q_qQ_{q_v}}\, B^2_{qq_v} + \frac{16\,H^2}{\beta^2}\, \|P\|^2_{H^2(\Omega)}$$

$$+\frac{8}{\beta^2\,\alpha}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\left(\left|\int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma\,d\tau-\int_{\sigma_Q}\nabla P(\tau).n_\sigma\,d\tau\right|^2\right.$$
$$\left.\left.+l(\sigma_Q)\,d_{QQ_\sigma}R^2_{QQ_\sigma}(P)\right)\right]^{1/2}$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour établir (3.41), on montre que pour tout $Q\in\mathcal{T}_H$ et tout $\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)$, on a :

$$\left|\int_\sigma \nabla P(\tau).n_\sigma\,d\tau-\int_{\sigma_Q}\nabla P(\tau).n_\sigma\,d\tau\right|\le\sqrt{m(Q)}\,\|P\|_{H^2(Q)} \tag{3.44}$$

On conclut à l'aide de l'inégalité précédente ainsi qu'avec les lemmes 3.1 et 3.3 :

$$A_{4h}\le C\,H \tag{3.45}$$

où C ne dépend que de α, β, Ω et de la norme H^2 de P.

On a donc bien, d'après (3.43) et (3.45) :

$$A_h\le 4\,(A_{3h}+A_{4h})\le C\,H$$

où C ne dépend que de α, β, Ω et de la norme H^2 de P.

Flux reconstruits par résolution de problèmes locaux :

On montre alors l'estimation pour les flux reconstruits par résolution de problèmes locaux. Pour cela on établit tout d'abord le lemme suivant. La première estimation de ce lemme renseigne sur la qualité des flux approchés sur les côtés de $\mathcal{T}_h$ situés à l'intérieur des mailles de $\mathcal{T}_H$. C'est une estimation en norme H^1_0 discrète, c'est à dire une estimation sur la norme L^2 du gradient discret. La deuxième estimation est une estimation en norme L^2 de l'erreur de pression sur le maillage fin.

Lemme 3.4 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega}g(\tau)\,d\tau=0$. On note $P(.)$ la solution de (3.9) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx=0$. On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13) et telle que $\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}m(Q)\,P_Q=\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}m(Q)\,P(x_Q)$. Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ solution de (3.19) et (3.20) et telle que pour tout $Q\in\mathcal{T}_H$ $\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}}m(q)\,p_q=\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}}m(q)\,P(x_q)$.*
On définit l'erreur sur la maille q, pour tout $q\in\mathcal{T}_h$, par $e_q=p_q-P(x_q)$.
Alors il existe C, ne dépendant que de Ω, β, α et P, telle que

$$\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)}\frac{(e_{q_v}-e_q)^2}{d_{qq_v}}\,l(c_{qq_v})\right)^{1/2}\le C\,\sqrt{H}$$

$$\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}m(q)\,|e_q|^2\right)^{1/2}\le C\,\sqrt{H}$$

Démonstration du lemme 3.4 :

On montre tout d'abord la consistance des flux approchés sur les côtés de $\mathcal{T}_h$ situés à l'intérieur des mailles grossières.

Lemme 3.5 *Sous les hypothèses du lemme 3.4, il existe C ne dépendant que de β telle que :*

$$\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v}\, R^2_{qq_v}(P)\right)^{1/2} \leq C\,\|P\|_{H^2(\Omega)}\,h$$

où :

(3.46) $$R_{qq_v}(P) = \frac{P(x_{q_v}) - P(x_q)}{d_{qq_v}} - \overline{F}_{qq_v}$$

Ce lemme se démontre comme le lemme 3.1.

On peut alors montrer la première estimation d'erreur du lemme 3.4.
Comme $P \in H^2(\Omega)$ est solution de (3.9), on a :

(3.47) $$\Delta P = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega$$

et

$$\nabla P.n = g \qquad \text{p.p. sur } \partial\Omega$$

Soit $q \in \mathcal{T}_h$, on intègre (3.47) sur q, d'après la formule de Green, il vient :

(3.48) $$\sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\,\overline{F}_{qq_v} + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_c g(\tau)\,d\tau = 0$$

On soustrait cette équation à (3.20), on obtient :

$$\sum_{q_v\in N_{int}(q)} \left(\frac{p_{q_v} - p_q}{d_{qq_v}} - \overline{F}_{qq_v}\right) l(c_{qq_v}) + \sum_{q_v\in N_{ext}(q)} \left(\frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}} - \overline{F}_{qq_v}\right) l(c_{qq_v}) = 0$$

On multiplie cette équation par e_q et on somme sur $q \in \mathcal{T}_h$. En utilisant (3.46), on obtient :

$$\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\,e_q\,\frac{e_{q_v} - e_q}{d_{qq_v}} + \sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} R_{qq_v}(P)\,l(c_{qq_v})\,e_q$$
$$+ \sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)} \left(\frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}} - \overline{F}_{qq_v}\right) l(c_{qq_v})\,e_q = 0$$

D'après la conservativité des flux exacts et approchés, il vient :

$$-\frac{1}{2}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{(e_{q_v} - e_q)^2}{d_{qq_v}} = -\frac{1}{2}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} R_{qq_v}(P)\,l(c_{qq_v})\,(e_q - e_{q_v}) - B_1$$

où

$$B_1 = \sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)} \left(\frac{P_{Q_{q_v}} - P_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}} - \overline{F}_{qq_v}\right) l(c_{qq_v})\,e_q$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et le lemme 3.5, on obtient :

$$\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{(e_{q_v}-e_q)^2}{d_{qq_v}} \leq 2\,B_1$$

$$+C_\beta\,\|P\|_{H^2(\Omega)}\,h\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{(e_{q_v}-e_q)^2}{d_{qq_v}}\right)^{1/2} \tag{3.49}$$

Traitons alors B_1, celui ci peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$B_1=\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)}\left(\frac{E_{Q_{q_v}}-E_{Q_q}}{d_{Q_qQ_{q_v}}}+\frac{P(x_{Q_{q_v}})-P(x_{Q_q})}{d_{Q_qQ_{q_v}}}-\overline{F}_{qq_v}\right)\,l(c_{qq_v})\,e_q$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$B_1\leq\frac{1}{\sqrt{\alpha\,H}}\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\,|e_q|^2\right)^{1/2}\times\left[\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)} d_{Q_qQ_{q_v}}\,l(c_{qq_v})\,B^2_{qq_v}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{Q_v\in N(Q)}\frac{(E_{Q_v}-E_Q)^2}{d_{QQ_v}}\,l(\sigma_{QQ_v})\right)^{1/2}\right]$$

On utilise alors le lemme 3.3 et le théorème 3.1, on obtient :

$$B_1\leq C\,\sqrt{H}\left(\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} l(\partial q\cap\partial Q)\,|e_q|^2\right)^{1/2}$$

où C ne dépend que Ω, α, β et de la norme H^2 de P.

D'après l'inégalité (2.45) page 48, il existe C, ne dépendant que de β et de Ω, telle que pour tout $Q\in\mathcal{T}_H$:

$$\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} l(\partial q\cap\partial Q)\,|e_q|^2\leq C\left(\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}}\sum_{q_v\in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\,\frac{(e_{q_v}-e_q)^2}{d_{qq_v}}+\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} m(q)|e_q|^2\right)$$

On utilise également le lemme 2.2 page 26, qui donne l'existence de C, ne dépendant que de Ω, telle que :

$$\sum_{q\in\mathcal{T}_h} m(q)\,|e_q-\mathrm{moy}_\Omega(e)|^2\leq C\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)}\frac{(e_{q_v}-e_q)^2}{d_{qq_v}}\,l(c_{qq_v})$$

où $moy_\Omega(e)=\dfrac{1}{m(\Omega)}\displaystyle\sum_{q\in\mathcal{T}_h} m(q)\,e_q$.

On peut alors terminer la démonstration du lemme 3.4. Comme on a supposé que les moyennes discrètes de la solution exacte et de la solution approchée $p_{\mathcal{T}}$ étaient égales sur chaque $Q \in \mathcal{T}_H$, on a :

$$\sum_{q \in \mathcal{T}_h} m(q)\, e_q = 0$$

donc :

$$B_1 \leq C\,\sqrt{H} \left(\sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\, \frac{(e_{q_v} - e_q)^2}{d_{qq_v}} \right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de Ω, α, β et de la norme H^2 de P.

Ainsi en reportant ce résultat dans (3.49), on obtient :

$$\left(\sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\, \frac{(e_{q_v} - e_q)^2}{d_{qq_v}} \right)^{1/2} \leq C\,\sqrt{H}$$

où C ne dépend que de Ω, β, α et de la norme H^2 de P.
On termine alors la démonstration de l'estimation de la proposition 3.3 pour les flux reconstruits par résolution de problèmes locaux :
Remarquons tout d'abord que l'on a :

$$A_h \leq A_{1h} + A_{2h} \tag{3.50}$$

où

$$A_{1h} = \left(\sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left| \frac{P_{Q_{qv}} - P_{Q_q}}{d_{Q_q Q_{qv}}} - \overline{F}_{qq_v} \right|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$A_{2h} = \left(\sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left| \frac{p_{q_v} - p_q}{d_{qq_v}} - \overline{F}_{qq_v} \right|^2 \right)^{1/2}$$

On obtient alors :

$$A_{1h} \leq \left(2 \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{ext}(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left| \frac{P(x_{Q_{qv}}) - P(x_{Q_q})}{d_{Q_q Q_{qv}}} - \overline{F}_{qq_v} \right|^2 \right.$$
$$\left. + 2 \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{Q_v \in N(Q)} \left(\sum_{c \subset \sigma_{QQ_v}} l(c)\, d_c \right) \left| \frac{E_{Q_v} - E_Q}{d_{QQ_v}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

Mais $\sum_{c \subset \sigma_{QQ_v}} l(c)\, d_c \leq \left(\sum_{c \subset \sigma_{QQ_v}} l(c) \right) \left(\sum_{c \subset \sigma_{QQ_v}} d_c \right) \leq l(\sigma_{QQ_v})\, h\, 2\, H/(\beta^2\, h)$.
On conclut alors à l'aide du théorème 3.1 et du lemme 3.3 :

$$A_{1h} \leq C\, H \tag{3.51}$$

où C ne dépend que de α, β, Ω et de la norme H^2 de P.

De la même façon on a :

$$A_{2h} \leq \left(2 \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v}) d_{qq_v} R^2_{qq_v}(P)\right)^{1/2} + \left(2 \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N_{int}(q)} l(c_{qq_v}) \frac{(e_{q_v} - e_q)^2}{d_{qq_v}}\right)^{1/2}$$

ainsi, d'après les lemmes 3.4 et 3.5, on a :

$$A_{2h} \leq C\sqrt{H} \tag{3.52}$$

où C ne dépend que de α, β, Ω et de la norme H^2 de P. En reportant (3.51) et (3.52) dans (3.50), on obtient le résultat cherché.
Ce qui termine la démonstration de la proposition 3.3.

3.2.5 Convergence de la saturation approchée vers la solution faible du problème hyperbolique

L'objectif de ce paragraphe est d'établir la convergence de la saturation approchée vers la solution faible de (3.4), (3.6) et (3.7). On utilise une technique introduite par R. Eymard et T. Gallouët dans [14] pour le même problème que celui qui est considéré ici mais en utilisant un schéma couplé volumes finis - éléments finis. Ces résultat ont été étendus à un schéma complètement volumes finis dans [41].
On montre donc dans ce paragraphe le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. On note $P(.)$ une solution de (3.9). On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13). Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ solution de (3.19) et (3.20). Soit de plus $k \in I\!R_+^*$ vérifiant la condition de stabilité (3.21). On note $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ la solution de (3.22), (3.23), (3.24) et (3.26).*
Alors, il existe une sous suite, encore notée $(u_{\mathcal{T}_h,H,k})_{h \in I\!R}$, et il existe $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ telles que :

$$\lim_{H \to 0} u_{\mathcal{T}_h,H,k} = u$$

dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$, pour la topologie faible $\star$, de plus u est la solution faible du problème (3.4), (3.6), (3.7), i.e. u vérifie (3.10).

Remarque 3.5 *Il n'est pas évident dans ce cas que la solution faible de l'équation hyperbolique soit unique. En effet, on ne peut plus utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme dans le chapitre précédent, puisque pour cela il faudrait que ∇P soit au moins Lipschitzien. Toutefois il est possible que ce résultat puisse se démontrer en adaptant la démonstration de R. J. DiPerna donnée dans [13].*

Afin de montrer ce théorème, on commence tout d'abord par établir les deux résultats suivants. Le premier donne une estimation L^∞ sur la solution approchée, et le second donne une estimation faible sur les variations de $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$.

Lemme 3.6 *Sous les hypothèses du théorème 3.2 :*

$$\|u_{\mathcal{T}_h,H,k}\|_\infty \leq U = \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)$$

Démonstration du lemme 3.6 :

Il suffit pour cela d'utiliser (3.26) et la condition de stabilité (3.21), pour remarquer que u_q^{n+1} est conbinaison convexe de u_q^n, $u_{q_v}^n$ $(q_v \in N(q))$, $\overline{u}_c^n$ $(c \in \mathcal{A}_{ext}(q))$. Et donc par récurrence on obtient :

$$|u_q^{n+1}| \leq \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)$$

pour tout $q \in \mathcal{T}_h$ et tout $n \in I\!N$ (pour plus de détails voir la démonstration du lemme 2.5 page 43).

Lemme 3.7 *Soient $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$ deux maillages de Ω satisfaisant respectivement (3.11) et (3.14), et g dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\int_{\partial\Omega} g(\tau)\,d\tau = 0$. On note $P(.)$ une solution de (3.9). On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13). Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ solution de (3.19) et (3.20). Soit de plus $k \in I\!R_+^*$ vérifiant la condition de stabilité (3.21). On note $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ solution de (3.22), (3.23), (3.24) et (3.26). Soit $T \in]0,+\infty[$, on note $N_T = \max\Big\{n \in I\!N\ ;\ (n-1)k \leq T\Big\}$, et on définit EF_{1h} et EF_{2h} par :*

$$EF_{1h} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} k \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} h\, F_{qq_v}\, |u_{q_v}^n - u_q^n|\, l(c_{qq_v}) + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} h \left|\overline{u}_c^n - u_q^n\right| l(c)\, F_c^+ \right)$$

$$EF_{2h} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} k \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} h\, F_{qq_v}\, |u_{q_v}^n - u_q^n|\, l(c_{qq_v}) + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} H \left|\overline{u}_c^n - u_q^n\right| l(c)\, F_c^+ \right)$$

et

$$EF_{3h} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} k\, m(q)\, |u_q^{n+1} - u_q^n|$$

Alors il existe C, ne dépendant que de u_0, $\overline{u}$, Ω, α, β, g, T, η et de la norme H^2 de P, telle que :

$$EF_{1h} \leq C\sqrt{h}$$

si les flux sont reconstruits par résolution de problèmes locaux,

$$EF_{2h} \leq C\left(\sqrt{h} + H\right)$$

si les flux sont reconstruits par interpolation, et

$$EF_{3h} \leq C\sqrt{k}$$

Démonstration du lemme 3.7 :

Comme dans la démonstration du lemme 2.6 page 44, on montre le résultat suivant :

$$(3.53)\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{q\in\mathcal{T}_h} k\left(\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v}\,|u^n_{q_v}-u^n_q|^2\, l(c_{qq_v}) + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)}\left|\overline{u}^n_c - u^n_q\right|^2 l(c)\,F^+_c\right) \le C_B$$

où $C_B = \dfrac{1}{\eta}\Big(\|u_0\|^2_\infty\, m(\Omega) + T\,\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\overline{u}\|^2_\infty\, l(\partial\Omega)^{1/2}\Big)$.
On en déduit que :

$$(3.54)\qquad EF_{1h} \le \sqrt{2\,C_B\,T}\,h\left(BV_1^{1/2} + \sqrt{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,l(\partial\Omega)^{1/2}}\right)$$

où :

$$BV_1 = \sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v}\,l(c_{qq_v})$$

de même :

$$(3.55)\qquad EF_{2h} \le \sqrt{2\,C_B\,T}\left(h\,BV_1^{1/2} + H\,\sqrt{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,l(\partial\Omega)^{1/2}}\right)$$

Il suffit alors de montrer que $BV_1 \le C/h$. Remarquons alors que :

$$BV_1 \le \frac{\sqrt{m(\Omega)}}{\beta\,h}A_h + \frac{\sqrt{m(\Omega)}}{\sqrt{\beta\,h}}\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)}\int_{c_{qq_v}}|\nabla P(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}$$

D'après le lemme (3.2), on a :

$$BV_1 \le \frac{\sqrt{m(\Omega)}}{\beta\,h}A_h + \frac{C}{h}\left(\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N(q)}\|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{qq_v})}\right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de β et de Ω.
Ainsi en utilisant la proposition 3.3 et en reportant l'inégalité précédente dans (3.54) et (3.55), on a :

$$EF_{1h} \le C\,\sqrt{h}$$

$$EF_{2h} \le C\left(\sqrt{h} + H\right)$$

où C ne dépend que de Ω, β, α et des normes $H^2(\Omega)$ de P et $L^2(\partial\Omega)$ de g.

Remarquons de plus, que d'après (3.26) et l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$EF_{3h} \leq \sqrt{k} \left(\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} k \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} F_{qq_v} \left| u_{q_v}^n - u_q^n \right|^2 l(c_{qq_v}) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \left| \overline{u}_c^n - u_q^n \right|^2 l(c)\, F_c^+ \right) \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{q \in \mathcal{T}_h} k \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} F_{qq_v}\, l(c_{qq_v}) + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} l(c)\, F_c^+ \right) \right)^{1/2}$$

Alors d'après (3.21) et (3.53), on obtient :

$$EF_{3h} \leq \sqrt{C_B\, k} \left(\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{q \in \mathcal{T}_h} m(p)\,(1-\eta) \right)$$

où C_B ne dépend que de η, u_0, Ω, T, g et de $\overline{u}$, ainsi :

$$EF_{3h} \leq \sqrt{C_B\, T\, m(\Omega)\,(1-\eta) k}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.7.

On établit alors le résultat suivant :

Lemme 3.8 *Sous les hypothèses du théorème 3.2, $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ vérifie :*

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t) \Big(\varphi_t(x,t) - \nabla P(x).\nabla \varphi(x,t) \Big)\, dx\, dt + \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx$$
$$+ \iint_{\partial\Omega^+ \times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt = \mathcal{E}(H,h,k)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$, avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$ et où $\mathcal{E}(H,h,k)$ ne dépend que de H, h, k, u_0, $\overline{u}$, φ, Ω, P, g, α, β et de η.

De plus pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$:

$$\lim_{H \to 0} \mathcal{E}(H,h,k) = 0$$

Démonstration du lemme 3.8 :

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R)$, on définit T tel que, pour tout $x \in \Omega^+$, $supp(\varphi(x,\cdot)) \subset [0,T]$. On note $N_T = \max\Big\{n \in I\!N \,;\, (n-1)\,k \leq T\Big\}$.

On multiplie alors (3.26) par $\dfrac{1}{m(q)}\displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt$, et on somme sur $n \in I\!N$ et $q \in \mathcal{T}_h$, on obtient :

$$E_1 + E_2 = 0 \tag{3.56}$$

avec :

$$E_1 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}(u_q^{n+1} - u_q^n)\frac{1}{k}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt$$

et

$$E_2 = -\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\left(\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v}\,(u_{q_v}^n - u_q^n)\,l(c_{qq_v})\,\frac{1}{m(q)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)}\Big(\overline{u}_c^n - u_q^n\Big)\,l(c)\,F_c^+\,\frac{1}{m(q)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt\right)$$

De plus on note :

$$E_{10} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t)\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx$$

et

$$E_{20} = -\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t)\,\nabla P(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt$$
$$+\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+}\overline{u}(\tau,t)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

On va alors comparer E_1 et E_{10} ainsi que E_2 et E_{20}, cette comparaison fera apparaître les termes d'erreur.

En exploitant la définition de $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ et en reportant les différences sur $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ (pour plus de détails voir démonstration du lemme 2.7 page 53), on montre que :

$$E_{10} = -\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}(u_q^{n+1} - u_q^n)\int_q \varphi(x,t^{n+1})\,dx - \sum_{q\in\mathcal{T}_h} u_q^0\int_q \varphi(x,0)\,dx$$

Ainsi :

$$|E_1 + E_{10}| \leq \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{q\in\mathcal{T}_h}|u_q^{n+1} - u_q^n|\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q|\varphi_t(x,t)|\,dx\,dt + \int_\Omega |u_{\mathcal{T}_h}^0 - u_0(x)|\,|\varphi(x,0)|\,dx$$

où

$$u_{\mathcal{T}_h}^0(x) = u_q^0 = \frac{1}{m(q)}\int_q u_0(x)\,dx \qquad \text{pour tout } x\in q,\ q\in\mathcal{T}_h$$

Montrons tout d'abord que k tend vers 0 lorsque H tend vers 0. Pour cela on procède comme dans [16] (démonstration du théorème 7.1).
Remarquons tout d'abord que si $g \equiv 0$ alors

$$F_{qq_v} = 0 \qquad \text{pour tout } q \in \mathcal{T},\ q_v \in N(q)$$

et donc :

$$u_q^{n+1} = u_q^n = u_q^0 \qquad \text{pour tout } q \in \mathcal{T} \text{ et tout } n \in I\!N$$

et d'après (2.48), $u_{\mathcal{T}_h,H,k}$ converge vers u_0 dans L^∞ faible $\star$, u_0 étant dans ce cas solution faible de (3.4), (3.6), (3.7). Ainsi lorsque $g \equiv 0$ la démonstration du théorème 3.2 est terminée.

On peut donc supposer $g \not\equiv 0$. Soit $y \in I\!R^d \setminus \{0\}$ et $\overline{w} \subset \Omega$, $\overline{w}$ compact tel que $d(\overline{w}, \Omega^c) \geq y$ où Ω^c est le complémentaire de Ω. On montre alors, voir [16] (démonstration du théorème 7.1), que :

$$\|P_{\mathcal{T}_H}(.+y) - P_{\mathcal{T}}(.)\|_{L^1(\overline{w})} \leq |y| \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\,|P_{Q_v} - P_Q|$$

Remarquons que, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\|P_{\mathcal{T}_H} - P\|_{L^1(\Omega)} \leq \left(m(\Omega) \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\,|E_Q|^2 \right)^{1/2} + \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \int_Q |P(x_Q) - P(x)|\,dx$$

ainsi d'après la régularité de P et d'après le théorème 3.1, il vient :

$$\lim_{H\to 0} \|P_{\mathcal{T}_H} - P\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

Donc, si

$$\lim_{H\to 0} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\,|P_{Q_v} - P_Q| = 0$$

on a :

$$\|P(.+y) - P(.)\|_{L^1(\overline{w})} \leq 0$$

et ainsi $\nabla P = 0$ p.p., ce qui n'est pas possible puisque $g \not\equiv 0$. Alors il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\,|P_{Q_v} - P_Q| \geq A$$

Comme $d_{QQ_v} \leq 2\,H$, on obtient :

$$\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{|P_{Q_v} - P_Q|}{d_{QQ_v}} \geq \frac{A}{2\,H}$$

Mais:

$$\sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\,|F_{qq_v}| \geq \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v}) \frac{|P_{Q_v} - P_Q|}{d_{QQ_v}}$$

puisque si $c_{qq_v} \subset \sigma_{QQ_v}$ alors $|F_{qq_v}| = \dfrac{|P_{Q_v} - P_Q|}{d_{QQ_v}}$. Ainsi :

$$2 \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} l(c_{qq_v}) \, |F_{qq_v}| = \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N(q)} l(c_{qq_v}) \, |F_{qq_v}| \geq \frac{A}{2\,H}$$

Alors il existe $q \in \mathcal{T}_h$ tel que :

$$\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} l(c_{qq_v}) \, |F_{qq_v}| \geq \frac{m(q)\,A}{4\,m(\Omega)}$$

D'après (3.21), on obtient :

$$k \leq \frac{4\,H\,m(\Omega)}{A} \tag{3.57}$$

Ce qui montre que k tend vers 0 lorsque H tend 0.
En utilisant le lemme 3.7, la régularité de u_0 ainsi que (3.57) (pour plus de détails voir démonstration de (2.48) page 54), on obtient :

$$\lim_{H \to 0} |E_1 + E_{10}| = 0 \tag{3.58}$$

Il ne reste donc plus qu'à comparer E_2 et E_{20}. Commençons par le faire pour les flux reconstruits par la méthode de résolution de problèmes locaux.

Flux approchés de pression reconstruits par résolution de problèmes locaux :

Introduisons E_{21} défini par :

$$E_{21} = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} F_{qq_v} \, (u^n_{q_v} - u^n_q) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \varphi(\tau, t) \, d\tau \, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \left(\overline{u}^n_c - u^n_q \right) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c g^+(\tau) \, \varphi(\tau, t) \, d\tau \, dt \right)$$

On va tout d'abord montrer que :

$$\lim_{H \to 0} |E_2 - E_{21}| = 0$$

En effet :

$$|E_2 - E_{21}| \leq \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \frac{1}{m(q)} \int_q g^+(\tau) \Big| \varphi(\tau, t) - \varphi(x, t) \Big| \, dx \, d\tau \, dt \, \Big| \overline{u}^n_c - u^n_q \Big| \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{q_v \in N(q) \\ F_{qq_v} > 0}} F_{qq_v} \, |u^n_{q_v} - u^n_q| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \frac{1}{m(q)} \int_q \Big| \varphi(\tau, t) - \varphi(x, t) \Big| \, dx \, d\tau \, dt \right]$$

et d'après la régularité de φ, on obtient :

$$|E_2 - E_{21}| \leq C\, EF_{1h}$$

où C ne dépend que des dérivées du premier ordre de φ.
Et donc d'après le lemme 3.7 il existe C, qui ne dépend que de φ, g, Ω, β, α, u_0, $\overline{u}$, T, η et des normes $H^2(\Omega)$ de P et $L^2(\partial\Omega)$ de g, telle que :

$$|E_2 - E_{21}| \leq C\sqrt{h} \tag{3.59}$$

On montre alors que la somme de E_{21} et de E_{20} tend vers 0 lorsque H tend vers 0. Remarquons tout d'abord que, d'après la conservativité des flux approchés, E_{21} peut encore s'écrire :

$$E_{21} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(\sum_{q_v\in N(q)} F_{qq_v}\, u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \left(u_q^n - \overline{u}_c^n\right) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right)$$

de même :

$$E_{20} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(-u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_q \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \overline{u}(\tau,t)\, g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right)$$

Comme $\nabla P.n = g$ p.p. sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$E_{20} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(- \sum_{q_v\in N(q)} u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \left(\overline{u}(\tau,t) - u_q^n\right) g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right) \tag{3.60}$$

Ainsi :

$$|E_{20} + E_{21}| \leq \mathcal{E}_1(H,h,k) + \mathcal{E}_2(h,k)$$

avec :

$$\mathcal{E}_1(H,h,k) = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \left(\nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau) - F_{qq_v}\right) \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right|$$

et

$$\mathcal{E}_2(h,k) = \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \left|\overline{u}_{\mathcal{T}_h,k}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,t)\right| g^+(\tau)\, |\varphi(\tau,t)|\, d\tau\, dt$$

où $\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) = \overline{u}_c^n$ si $\tau \in c$, $c \in \mathcal{A}_{ext}$, et $t \in [t^n, t^{n+1}[$, $n \in I\!N$.

Comme $\overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$:

$$\lim_{H\to 0} \mathcal{E}_2(h,k) = \lim_{H\to 0} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+)} \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+)} \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \left|\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,t)\right| d\tau\, dt = 0$$

Remarquons alors que d'après (3.20) et (3.48), on a :

$$\sum_{q_v\in N(q)} \int_{c_{qq_v}} \nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau)\, d\tau = \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, F_{qq_v}$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_1(H,h,k) = \left|\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} (\nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau) - F_{qq_v}) \times \right.$$
$$\left. \times \Big(\varphi(\tau,t) - \varphi(x_q,t)\Big)\, d\tau\, dt\right|$$

on obtient d'après la régularité de φ :

$$(3.61)\quad \mathcal{E}_1(H,h,k) \le M_\varphi\, h\, U\, T \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v}) \left|F_{qq_v} - \overline{F}_{qq_v}\right| \le \frac{M_\varphi\, U\, T\, \sqrt{m(\Omega)}}{\beta} A_h$$

où $M_\varphi = \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T]} |\nabla\varphi(x,t)|$ et où l'on rappelle que $U = \max(\|\overline{u}\|_\infty, \|u_0\|_\infty)$ et que $\|u_{\mathcal{T}_h,H,k}\|_\infty \le U$.
En utilisant la proposition 3.3, on obtient :

$$\mathcal{E}_1(H,h,k) \le C\sqrt{H}$$

où C ne dépend que de α, β, Ω, T, φ, u_0, $\overline{u}$ et de la norme H^2 de P.
Et donc :

$$(3.62)\qquad \lim_{H\to 0} |E_{21} + E_{20}| = \lim_{H\to 0} \Big(\mathcal{E}_1(H,h,k) + \mathcal{E}_2(h,k)\Big) = 0$$

On conclut alors à l'aide de (3.56), (3.58), (3.59) et (3.62) :

$$E_{10} + E_{20} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t)\Big(\varphi_t(x,t) - \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\, dx\, dt + \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\, dx$$
$$+ \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \overline{u}(\tau,t)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt = E_{10} + E_1 + E_{20} + E_{21} + E_2 - E_{21} = \mathcal{E}(H,h,k)$$

et

$$\lim_{H\to 0} \mathcal{E}(H,h,k) = 0$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.8 pour le cas où les flux de pression sont reconstruits par résolution de problèmes locaux.
Traitons alors le cas où la deuxième méthode de reconstruction des flux de pression est utilisée.

Reconstruction des flux par interpolation

Rappelons que dans ce cas E_2 est de la forme suivante :

$$E_2 = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v} \left(u_{q_v}^n - u_q^n\right) l(c_{qq_v}) \, \frac{1}{m(q)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \left(\overline{u}_c^n - u_q^n\right) \frac{l(c)}{l(\sigma_c)} \int_{\sigma_c} g^+(\tau)\,d\tau \, \frac{1}{m(q)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_q \varphi(x,t)\,dx\,dt \right)$$

Introduisons E_{22} défini par :

$$E_{22} = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(\sum_{\substack{q_v\in N(q)\\ F_{qq_v}>0}} F_{qq_v} \left(u_{q_v}^n - u_q^n\right) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \right.$$
$$\left. + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \left(\overline{u}_c^n - u_q^n\right) \frac{l(c)}{l(\sigma_c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_c} g^+(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \right)$$

Alors, de la même façon que pour la différence entre E_2 et E_{21} dans le paragraphe précédent, en utilisant la régularité de φ, on obtient :

$$|E_2 - E_{22}| \leq C_\varphi \, EF_{2h}$$

où C_φ ne dépend que des dérivées du premier ordre de φ. Et donc d'après le lemme 3.7, il existe C, qui ne dépend que de φ, Ω, β, α, u_0, $\overline{u}$, T, η et des normes $H^2(\Omega)$ de P et $L^2(\partial\Omega)$ de g, telle que :

$$|E_2 - E_{22}| \leq C\,(\sqrt{h} + H) \tag{3.63}$$

On va alors montrer que :

$$\lim_{H\to 0} |E_{20} + E_{22}| = 0$$

Remarquons tout d'abord que :

$$E_{22} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \left(\sum_{q_v\in N(q)} F_{qq_v} \, u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \right.$$
$$\left. - \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \left(\overline{u}_c^n - u_q^n\right) \frac{l(c)}{l(\sigma_c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_c} g^+(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \right)$$

ainsi en utilisant la formulation (3.60) de E_{20}, on obtient :

$$|E_{20} + E_{22}| \leq \mathcal{E}_3(H,h,k) + \mathcal{E}_4(H,h,k)$$

où :

$$\mathcal{E}_3(H,h,k) = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{q_v \in N(q)} u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \Big(F_{qq_v} - \nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau) \Big) \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \right|$$

et

$$\mathcal{E}_4(H,h,k) = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \left| \overline{u}_c^n - u_q^n \right| \frac{1}{l(\sigma_c)}$$
$$\left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \int_{\sigma_c} g^+(\tau)\, \varphi(\tau,t) - g^+(\gamma)\, \varphi(\gamma,t)\, d\gamma\, d\tau\, dt \right|$$

Traitons tout d'abord le terme $\mathcal{E}_4(H,h,k)$. Remarquons alors, que d'après la régularité de φ, on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \left| \overline{u}_c^n - u_q^n \right| \frac{1}{l(\sigma_c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \int_{\sigma_c} g^+(\tau) \left| \varphi(\tau,t) - \varphi(\gamma,t) \right| d\gamma\, d\tau\, dt$$
$$\leq 2\, U\, T\, M_\varphi \sqrt{l(\partial\Omega)}\, \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\, H$$

où on rappelle que $M_\varphi = \sup_{(x,t) \in \Omega \times [0,T]} |\nabla \varphi(x,t)|$.

De même :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \left| \overline{u}_c^n - u_q^n \right| \frac{1}{l(\sigma_c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \int_{\sigma_c} g^+(\gamma) \left| \varphi(\tau,t) - \varphi(\gamma,t) \right| d\gamma\, d\tau\, dt$$
$$\leq 2\, U\, T\, M_\varphi\, H \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} \frac{1}{\beta^2} \int_\sigma g^+(\gamma)\, d\gamma$$
$$\leq 2\, U\, T\, M_\varphi \sqrt{l(\partial\Omega)}\, \frac{1}{\beta^2}\, \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\, H$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_4(H,h,k) \leq 2\, U \sqrt{T\, l(\partial\Omega)} \left[M_\varphi \sqrt{T} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\, H + \mathcal{E}_5(H,h,k) \right]$$

où

$$\mathcal{E}_5(H,h,k) = \left(\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q \in \mathcal{T}_h} \sum_{c \in \mathcal{A}_{ext}(q)} \frac{1}{k\, l(c)\, l(\sigma_c)^2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \int_{\sigma_c} \Big(g(\tau)\, \varphi(\gamma,t) \right.\right.$$
$$\left.\left. - g(\gamma)\, \varphi(\tau,t) \Big)\, d\gamma\, d\tau\, dt \right)^2 \right)^{1/2}$$

Montrons alors que $\mathcal{E}_5(H,h,k)$ tend vers 0 lorsque H tend vers 0. $\mathcal{E}_5(H,h,k)$ s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_5(H,h,k) = \left(\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q \in \mathcal{T}_H} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c \subset \sigma} \frac{l(c)}{k} \left| \frac{1}{l(c)} \int_c \nabla P(\tau).n(\tau)\, d\tau \times \frac{1}{l(\sigma)} \right.\right.$$
$$\left.\left. \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \varphi(\gamma,t)\, d\gamma\, dt - \frac{1}{l(c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_c \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \times \frac{1}{l(\sigma)} \int_\sigma \nabla P(\gamma).n(\gamma)\, d\gamma \right|^2 \right)^{1/2}$$

Pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$ et tout $\sigma \in \mathcal{A}_{ext}(Q)$, on note σ_Q le côté de Q qui est opposé à σ (i.e. le côté de Q tel que $|n.n_{\sigma_Q}| = 1$) et Q_σ le voisin de Q tel que $\partial Q_\sigma \cap \partial Q = \sigma_Q$ (voir figure 3.8 page 86). On note de plus pour tout $c \subset \sigma$, $c^{\perp}_{QQ_\sigma}$ le projeté orthogonal de c sur $\sigma_Q = \partial Q \cap \partial Q_\sigma$. Alors, on a :

$$\mathcal{E}_5(H,h,k) = \left(5\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\sum_{c\subset\sigma}\frac{l(c)}{k}\left({\mathcal{E}_{1,\sigma,c}}^2+{\mathcal{E}_{2,\sigma,c}}^2+{\mathcal{E}_{3,\sigma,c}}^2+{\mathcal{E}_{4,\sigma,c}}^2+{\mathcal{E}_{5,\sigma,c}}^2\right)\right)^{1/2}$$

où :

$$\mathcal{E}_{1,\sigma,c} = \left|\frac{1}{l(\sigma)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\sigma \varphi(\gamma,t)\,d\gamma\,dt\,\frac{1}{l(c)}\left(\int_c \nabla P(\tau).n(\tau)\,d\tau - \int_{c^{\perp}_{QQ_\sigma}}\nabla P(\tau).n(\tau)\,d\tau\right)\right|$$

$$\mathcal{E}_{2,\sigma,c} = \left|\frac{1}{l(\sigma)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\sigma \varphi(\gamma,t)\,d\gamma\,dt\left(\frac{1}{l(c^{\perp}_{QQ_\sigma})}\int_{c^{\perp}_{QQ_\sigma}}\nabla P(\tau).n(\tau)\,d\tau - \frac{P(x_{Q_\sigma})-P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}}\right)\right|$$

$$\mathcal{E}_{3,\sigma,c} = \left|\frac{P(x_{Q_\sigma})-P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(\frac{1}{l(\sigma)}\int_\sigma\varphi(\gamma,t)\,d\gamma - \frac{1}{l(c)}\int_c\varphi(\tau,t)\,d\tau\right)\,dt\right|$$

$$\mathcal{E}_{4,\sigma,c} = \left|\frac{1}{l(c)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_c\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\left(\frac{P(x_{Q_\sigma})-P(x_Q)}{d_{QQ_\sigma}} - \frac{1}{l(\sigma_Q)}\int_{\sigma_Q}\nabla P(\gamma).n(\gamma)\,d\gamma\right)\right|$$

$$\mathcal{E}_{5,\sigma,c} = \left|\frac{1}{l(c)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_c\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\,\frac{1}{l(\sigma)}\left(\int_{\sigma_Q}\nabla P(\gamma).n(\gamma)\,d\gamma - \int_\sigma\nabla P(\gamma).n(\gamma)\,d\gamma\right)\right|$$

D'après la régularité de P, en utilisant (3.41), on a :

$$\mathcal{E}_{1,\sigma,c} \leq \|\varphi\|_\infty\,k\sqrt{\frac{H}{l(c)}}\,\|P\|_{H^2(\mathcal{V}_c\cap Q)}$$

où $\mathcal{V}_c$ est donné par la figure 3.6 page 82.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\sum_{c\subset\sigma}\frac{l(c)}{k}\,(\mathcal{E}_{1,\sigma,c})^2 &\leq T\,\|\varphi\|_\infty^2\,H\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\sum_{c\subset\sigma}\|P\|^2_{H^2(\mathcal{V}_c\cap Q)}\\ &\leq T\,\|\varphi\|_\infty^2\,H\,\|P\|^2_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Remarquons de plus que :

$$\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{Q\in\mathcal{T}_H}\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)}\sum_{c\subset\sigma}\frac{l(c)}{k}\,(\mathcal{E}_{2,\sigma,c})^2 \leq T\,\|\varphi\|_\infty^2\sum_{q\in\mathcal{T}_h}\sum_{q_v\in N_{ext}(q)}l(c_{qq_v})\,B^2_{qq_v}$$

où B_{qq_v} est défini par (3.39).

D'après le lemme 3.3, il vient :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{2,\sigma,c}\right)^2 \leq T\, \|\varphi\|_\infty^2\, \frac{1}{\alpha}\, C\, H$$

où C ne dépend que de α, β et de la norme H^2 de P.
D'après la régularité de φ on a :

$$\mathcal{E}_{3,\sigma,c} \leq \left| R_{QQ_\sigma}(P) - \frac{1}{l(\sigma_Q)} \int_{\sigma_Q} \nabla P(\tau)\, n_{QQ_\sigma}\, d\tau \right|\; M_\varphi\, H\, k$$

où $M_\varphi = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega\times[0,T]} |\nabla\varphi(x,t)|$.
Alors :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{3,\sigma,c}\right)^2 \leq T\, M_\varphi^2\, H^2 \times$$
$$\times \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \left(l(\sigma_Q)\, R_{QQ_\sigma}^2(P) - \int_{\sigma_Q} |\nabla P(\tau)|^2\, d\tau \right)$$

D'après le lemme 3.2 et les hypothèses (3.11), il vient :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{3,\sigma,c}\right)^2$$
$$\leq C\, H \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \left(l(\sigma_Q)\, d_{QQ_\sigma}\, R_{QQ_\sigma}^2(P) + \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{QQ_\sigma})}^2 \right)$$

où C ne dépend que de T, φ et α.

Ainsi d'après le lemme 3.1, on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{3,\sigma,c}\right)^2 \leq C\, H$$

où C ne dépend que de T, φ, α et de la norme H^2 de P.
De plus, d'après les hypothèses (3.11), on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{4,\sigma,c}\right)^2 \leq \frac{T\, \|\varphi\|_\infty^2}{\alpha\, H} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{Q_v\in N(Q)} l(\sigma_{QQ_v})\, d_{QQ_v}\, R_{QQ_v}^2(P)$$

En utilisant à nouveau le lemme 3.1, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{4,\sigma,c}\right)^2 \leq C\, H$$

où C ne dépend que de T, φ, α, Ω et de la norme H^2 de P.

Enfin d'après (3.44), on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \sum_{c\subset\sigma} \frac{l(c)}{k} \left(\mathcal{E}_{5,\sigma,c}\right)^2 \leq T\, \|\varphi\|_\infty^2 H \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_{ext}(Q)} \|P\|_{H^2(Q)}^2 \leq C\, H$$

où C ne dépend que de T, φ et de la norme H^2 de P.

Alors d'après les résultats précédents, il vient :

$$\mathcal{E}_5(H,h,k) \leq C\,\sqrt{H}$$

où C ne dépend que de α, β, T, φ et de la norme H^2 de P.
Et donc :

$$\mathcal{E}_4(H,h,k) \leq C\,\sqrt{H}$$

où C ne dépend que de α, β, Ω, U, g, T, φ et de la norme H^2 de P.

On traite alors le terme $\mathcal{E}_3(H,h,k)$. D'après (3.18) et (3.48), pour tout $q\in\mathcal{T}_h$ on a :

$$\sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, F_{qq_v} + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \frac{l(c)}{l(\sigma_c)} \int_{\sigma_c} g(\gamma)\, d\gamma = \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, \overline{F}_{qq_v} + \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \int_c g(\tau)\, d\tau$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_3(H,h,k) \leq & \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{c\in\mathcal{A}_{ext}(q)} \frac{|u_q^n|}{l(\sigma_c)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \varphi(x_q,t)\, dt \left| \int_c \int_{\sigma_c} \Big(g(\tau)-g(\gamma)\Big)\, d\gamma\, d\tau \right| + \\ & + \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} u_q^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{c_{qq_v}} \Big(F_{qq_v} - \nabla P(\tau).n_{qq_v}(\tau)\Big) \Big(\varphi(\tau,t)-\varphi(x_q,t)\Big)\, d\tau\, dt \right|\end{aligned}$$

En utilisant la régularité de φ et un argument similaire à celui utilisé pour $\mathcal{E}_4(H,h,k)$, on montre que :

$$\mathcal{E}_3(H,h,k) \leq C\,\sqrt{H} + \frac{T\,U\,C_\varphi}{\beta} \sum_{q\in\mathcal{T}_h} \sum_{q_v\in N(q)} l(c_{qq_v})\, d_{qq_v} \left| F_{qq_v} - \overline{F}_{qq_v} \right| \tag{3.64}$$

où C ne dépend que de α, β, T, U, φ, P et de g et où C_φ ne dépend que de φ.
En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et la proposition 3.3, on obtient :

$$\mathcal{E}_3(H,h,k) \leq C\,\sqrt{H} + \frac{T\,U\,C_\varphi \sqrt{2\,m(\Omega)}}{\beta} \mathcal{A}_h \leq C\left(H+\sqrt{H}\right) \leq C\,\sqrt{H}$$

où C ne dépend que de α, β, T, U, $\overline{u}$, φ, Ω, P et de g.
On alors :

$$|E_{20}+E_{22}| \leq \mathcal{E}_3(H,h,k) + \mathcal{E}_4(H,h,k) \leq C\,\sqrt{H} \tag{3.65}$$

où C ne dépend que de α, β, T, U, $\overline{u}$, φ, Ω, P et de g.

D'après (3.56), (3.58), (3.63) et (3.65), il vient :

$$E_{10}+E_{20}=\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t)\Big(\varphi_t(x,t)-\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\,dx\,dt+\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx$$

$$+\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+}\overline{u}(\tau,t)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt = E_{10}+E_1+E_{20}+E_{22}+E_2-E_{22}=\mathcal{E}(H,h,k)$$

et

$$\lim_{H\to 0}\mathcal{E}(H,h,k)=0$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.8. On établit alors le théorème 3.2.

Démonstration du théorème 3.2 :

D'après le lemme 3.6, $(u_{\mathcal{T}_h,H,k})_{h\in I\!R}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$, alors d'après la relative séquentielle compacité des bornés de L^∞ pour la topologie faible $\star$, il existe une sous suite, encore notée $(u_{\mathcal{T}_h,H,k})_{h\in I\!R}$, et il existe $u\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ tels que

$$\lim_{H\to 0} u_{\mathcal{T}_h,H,k}=u \tag{3.66}$$

dans $L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ pour la topologie faible $\star$, c'est à dire que :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} u_{\mathcal{T}_h,H,k}(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt=\iint_{\Omega\times I\!R_+} u(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

pour tout $\varphi\in L^1(\Omega\times I\!R_+)$.
En passant à la limite dans l'inégalité du lemme 3.8, on obtient :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} u(x,t)\Big(\varphi_t(x,t)-\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\Big)\,dx\,dt+\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx$$
$$+\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+}\overline{u}(\tau,t)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt=0$$

pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\Omega^+\times I\!R_+,I\!R)$.

3.3 Résultats numériques

Deux programmes ont été générés (un pour la résolution sur un maillage et un pour la méthode de double maillage) afin de résoudre un problème diphasique en milieu poreux hétérogène correspondant au problème (3.1), (3.2). Le même schéma volumes finis, celui décrit dans le paragraphe 3.2, est utilisé dans les deux cas. L'algorithme du programme de la méthode de double maillage est le suivant :

Etape 1 - Calcul des paramètres nécessaires pour résoudre l'équation de pression à l'aide d'une homogénéisation adaptée de la grille fine vers la grille grossière.

Etape 2 - Calcul de la pression sur la grille grossière.

Etape 3 - Reconstruction du flux de pression sur la grille fine en utilisant la pression sur la grille grossière.

Etape 4 - Résolution de l'équation de saturation sur la grille fine.

La vitesse de Darcy ($K\,\nabla P$) est reconstruite sur chaque interface du maillage. Le flux de pression est défini par le produit de la vitesse de Darcy et la longueur de l'interface considérée.
Il est possible et même conseillé d'avoir un pas de temps non constant. Pour plus de détails, voir [39]. L'étape d'homogénéisation (étape 1) nécessaire dans le programme pour la méthode de double maillage homogénéise le produit de la perméabilité absolue et de la mobilité totale (voir [22]). En effet, comme les paramètres sont donnés sur la grille fine, cette étape permet de déterminer les coefficients discrets de l'équation de pression lorsque le milieu est hétérogène (voir Cas-Tests 2 et 3) et la mobilité totale dépend de la saturation (voir Cas-Test 3). Dans le cas homogène avec une mobilité totale constante (voir Cas-Test 1), il n'y a pas d'étape d'omogénéisation. Ce test correspond au cas théorique. Des conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet sont utilisées.
Décrivons les différents cas tests utilisés. D'un point de vue physique, chacun correspond à un processus de récupération de pétrole à l'aide d'une injection d'eau dans la nappe.

3.3.1 Description des cas tests

Un test classique dans l'ingéniérie pétrolière est considéré : il concerne une géométrie de type "quart de five spot". La figure 3.9 représente la grille grossière. Celle ci est dessinée en 3 dimensions afin de justifier les m^3, mais les tests numériques sont faits en dimension 2. Sur $\partial\Omega_1$ on se donne une condition de Dirichlet en pression et sur $\partial\Omega_2$ une condition de Neumann en pression (voir figure 3.9).
Sur $\partial\Omega_3 = \partial\Omega/(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$, une condition de Neumann homogène est utilisée. Afin d'éviter des différences entre les tests numériques, dues aux problèmes d'indices de productivité, les termes sources sont pris en compte dans les conditions aux limites plutôt que dans les puits.
Plusieurs maillages ont été utilisés, ils sont tous rectangulaires et à pas constant. Ils diffèrent selon les simulations. Le nombre de cellules en x est égal au nombre de cellules en y. On introduit la notation (n_H, n_h) qui correspond à une résolution numérique du problème avec un maillage $n_H \times n_H$ pour l'équation en pression et un maillage $n_h \times n_h$ pour l'équation en saturation. Lorsque $n_H \neq n_h$, la méthode de double maillage est utilisée. On note alors mi (respectivement mlpb) la reconstruction par interpolation (respectivement par résolution de problèmes locaux). Lorsque le milieu est hétérogène, la méthode mlpb décrite dans le paragraphe 3.2 s'étend en interpolant chaque flux discret aux interfaces du maillage grossier (conditions aux

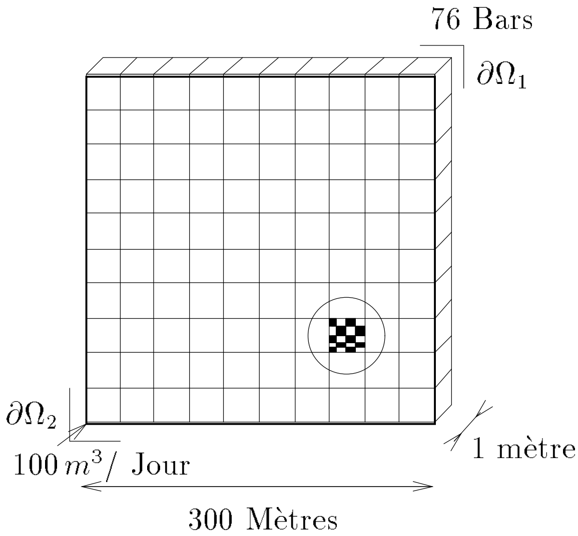

Fig. 3.9 - Caractéristiques Géométriques des Cas-Tests

limites des problèmes locaux) proportionnellement aux valeurs de la perméabilité absolue et de la mobilité totale sur le maillage fin (pour plus de détails, voir [39]).
Pour chaque cas test, la résolution sur le maillage le plus fin est considerée comme la référence.
A un temps donné, une estimation d'erreur en norme L^1 sur la saturation et en norme L^2 sur le flux de pression sont calculées pour chaque simulation. On définit alors : $\|e(u)\|_{L^1}$ (respectivement $\|e(F)\|_{L^2}$), la norme L^1 (respectivement L^2) de la différence entre le cas de référence et la résolution considérée pour la saturation (respectivement pour le flux de pression).
Pour tous les cas tests, et toutes les simulations, ces estimations d'erreurs sont calculées au temps : 2000 jours.

3.3.2 Validation sur le Cas Simplifié - Cas Test 1

On considère une simulation sur un cas homogène ($K = 100\,MD$) et avec une mobilité totale constante ($M = 1$). C'est le cas étudié dans le paragraphe 3.2 dans l'approche théorique.
Trois maillages différents sont choisis, donnant 8 simulations :
$(16,16)$, $(16,48)_{mi}$, $(16,48)_{mlpb}$, $(16,144)_{mi}$, $(16,144)_{mlpb}$, $(48,144)_{mi}$, $(48,144)_{mlpb}$ et $(144,144)$, la dernière étant la référence. Pour les cinq premières simulations, on fixe le maillage ($n_H \times n_H$) celui sur lequel l'équation en pression est résolue, et on cherche à déterminer l'influence de n_h (i.e. h) sur le flux de pression (voir tableau 3.1) et sur la saturation (voir figure 3.10). Pour les quatre dernières simulations, le maillage

$(n_h \times n_h)$ celui sur lequel l'équation en saturation est résolue est fixé, et on cherche à déterminer l'influence de n_H (i.e. H) sur le flux de pression (voir tableau 3.1) et sur la saturation (voir figure 3.10).

Simulations	Méthode de Reconstruction	$\|e(F)\|_{L^2}$
(16,16)		$3,19\ \ 10^{-1}$
(16,48)	mi	$2,12\ \ 10^{-2}$
(16,48)	mlpb	$1,94\ \ 10^{-2}$
(16,144)	mi	$2,80\ \ 10^{-4}$
(16,144)	mlpb	$2,67\ \ 10^{-4}$
(48,144)	mi	$4,82\ \ 10^{-5}$
(48,144)	mlpb	$4,70\ \ 10^{-5}$

TAB. 3.1 - Influence de n_H et de n_h sur $\|e(F)\|_{L^2}$ - Cas-Test 1

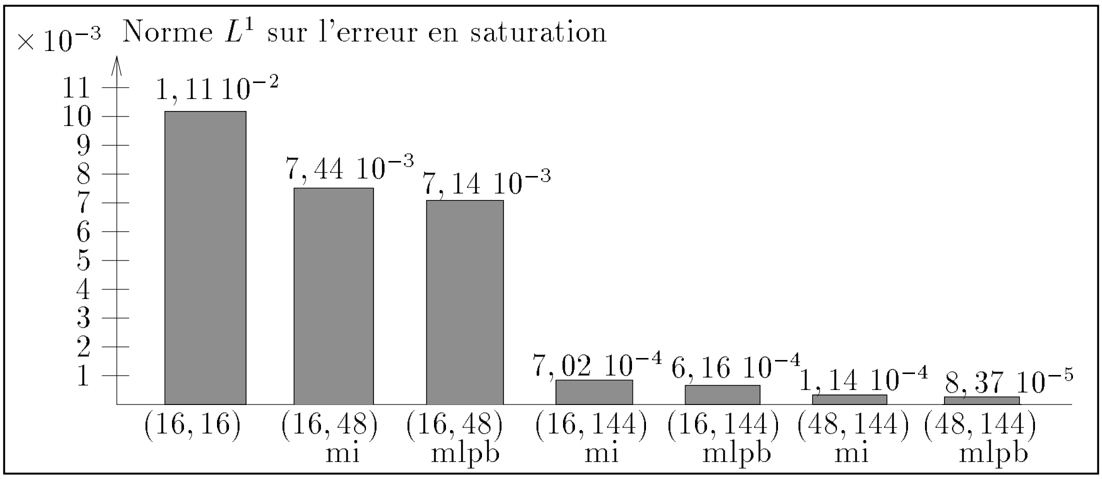

FIG. 3.10 - Influence de n_H et de n_h sur $\|e(u)\|_{L^1}$ - Cas-Test 1

Malheureusement, le nombre de simulations ne permet pas de déterminer l'influence de n_H et de n_h. On ne peut pas faire plus de simulations parce qu'entre deux simulations différentes, on est obligé de multiplier n_h au moins par 3, alors, la différence entre les erreurs est trop importante pour conclure sur l'influence de n_h. De plus, il est impossible de choisir un trop grand n_h (à cause des capacités des machines) et n_h doit être un multiple de n_H. Ceci dit, les résultats numériques montrent la convergence des solutions approchées comme il a été démontré dans l'approche théorique.

3.3.3 Un cas hétérogène avec une mobilité totale constante - Cas Test 2

Le simulateur est alors appliqué sur un cas hétérogène avec une mobilité totale toujours constante égale à 1. La matrice de perméabilité absolue est générée par une distribution lognormale avec une longueur de corrélation de 3 mètres en x et en y (voir figure 3.11 page 109). Pour ces choix, un estimateur algébrique (voir [21]) est

FIG. 3.11 - Matrice de Perméabilité (en MD) du Cas-Test 2

utilisé pour générer la matrice de perméabilité sur la grille la plus fine. La méthode mi basée sur une interpolation n'est plus utilisée. En effet, l'interpolé ne tient pas compte des hétérogénéités du milieu poreux sur le maillage fin.
Comme dans le Cas-Test 1, le tableau 3.2 page 112 et la figure 3.12 page 112 donnent les estimations d'erreurs sur le flux de pression et la saturation.
Les résultats observés pour la méthode mlpb sont du même ordre que ceux du Cas-Test 1. Toutefois, les erreurs sont un peu plus importantes dans ce cas, ceci est dû à la présence des hétérogénéités. Ainsi, même lorsque la reconstruction du flux de pression est plus délicate, la qualité des résultats est satisfaisante.

3.3.4 Un cas hétérogène avec une mobilité totale non constante - Cas Test 3

On étend la méthode de double maillage à un problème avec une mobilité totale non constante, c'est à dire dépendant de la saturation. Dans ce cas test, la méthode de

double maillage est appliquée à un cas système réellement couplé. Ainsi, l'équation en pression doit être résolue à chaque pas de temps, ce test montre l'intérêt de la méthode de double maillage en termes de précision et de temps CPU comparée aux résolutions sur un seul maillage.
Un milieu poreux hétérogène est généré par une distribution lognormale avec une longueur de corrélation égale à 25 mètres en x et en y (voir figure 3.13 page 113).
Les lois de perméabilités relatives utilisées sont du type Corey (voir [6]) comme suit :

$$k_{rw}(u) = k_{wm}\, u^{*n_w} \text{ et } k_{ro}(u) = k_{om}\,(1-u^*)^{n_o} \text{ avec } u^* = \frac{u-u_{wi}}{1-u_{wi}-u_{or}}$$

Un rapport de mobilités défavorable est choisi pour le Cas-Test 3

$$M = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \Big/ \frac{k_{ro}}{\mu_o} = 2$$

Le tableau 3.3 page 112 résume les différentes propriétés du fluide de ce Cas-Test. Six simulations sont considérées : $(10,10)$, $(10,30)_{mlpb}$, $(30,30)$, $(10,90)_{mlpb}$, $(30,90)_{mlpb}$ et $(90,90)$.
Les estimations d'erreurs sur le flux de pression et sur la saturation sont données dans le tableau 3.4 page 112 et la figure 3.14 page 113.
Ceux ci montrent que la convergence des solutions approchées est encore obtenue malgré le fait que le problème soit complexe de part ses hétérogénéités et sa non linéarité.
Les courbes du watercut (ou pourcentage d'eau), voir figure 3.15 page 114, sont très intéressantes pour l'ingéniérie du réservoir. Cela correspond au rapport entre le flux d'eau et le flux total au puits producteur (i.e. sur $\partial\Omega_1$). Il est très important d'avoir une bonne évaluation de la percée de l'eau au puits producteur. La comparaison du watercut (voir figure 3.15 page 114) pour chaque simulation montre que les résultats obtenus avec une simulation sur le maillage fin sont similaires à ceux obtenus avec la méthode de double maillage (mplb). On a considéré une résolution de l'équation en pression sur un maillage 10×10 et une résolution de l' équation en saturation sur la grille la plus fine (30×30 ou 90×90 selon le cas).
Le Tableau 3.5 page 114 montre les temps CPU pour les différentes simulations. On peut encore noter que la méthode de double maillage utilisée ici a également deux pas de temps différents. En effet, le pas de temps pour la pression est calculé comme si les équations en pression et en saturation étaient toutes deux calculées sur le maillage grossier. Ainsi, le pas de temps de la pression est calculé à l'aide d'un rapport entre les conditions de CFL pour l'équation en saturation sur les maillages fin et grossier (voir [22]). Le coût calcul en utilisant la méthode de double maillage (n_H, n_h) et deux pas de temps est presque du même ordre que celui pour la simulation (n_H, n_H), tandis que la simulation (n_h, n_h) demande un très long temps CPU. Ces résultats semblent naturels puisqu'au lieu de résoudre un système linéaire sur une grille fine $n_h \times n_h$ à chaque pas de temps, la méthode de double maillage (n_H, n_h) nécessite de résoudre

l'équation en pression que sur une grille $n_H \times n_H$ pour chaque pas de temps et de résoudre n_h problèmes locaux. Une parallélisation pourrait être un bon moyen pour résoudre l'équation en saturation, calculée avec un schéma explicite et donc pour diminuer le temps CPU.

Conclusion :

Dans ce chapitre, dans un cas homogène avec une mobilité totale constante, on a montré la convergence de la méthode de double maillage avec deux méthodes différentes de reconstruction des flux.
La première est moins chère d'un point de vue coût calcul mais la deuxième peut être étendue à des problèmes physiques plus complexes (cas hétérogène avec une mobilité totale non constante). Pour les deux méthodes, on a donné des estimations d'erreur pour les flux reconstruits, de l'ordre de H pour la méthode par interpolation et de l'ordre de $\sqrt{H}$ pour la méthode de résolution de problèmes locaux (résultats qui ne semblent pas optimaux pour la seconde méthode).
Ces résultats sont suffisants pour passer à la limite dans l'équation discrète associée à la saturation et ainsi on établit la convergence de la saturation approchée avec la méthode de double maillage vers la solution exacte.
On a utilisé la méthode de double maillage avec reconstruction des flux de pression par résolution de problèmes locaux dans un cas hétérogène avec une mobilité totale non constante. Le calcul des estimations d'erreurs pour différents cas tests montrent la convergence numérique de l'algorithme de la méthode de double maillage.
Enfin la méthode de double maillage a été validée par son efficacité d'un point de vue coût calcul en la comparant à des méthodes classiques (seulement un maillage).
Ainsi, il semble possible d'appliquer la méthode de double maillage à des simulations sur des cas réels.

Simulations	$\|e(F)\|_{L^2}$
$(16,16)$	$3,94\ \ 10^{-1}$
$(16,48)_{mlpb}$	$2,69\ \ 10^{-2}$
$(16,144)_{mlpb}$	$5,58\ \ 10^{-4}$

TAB. 3.2 - Influence de n_h sur $\|e(F)\|_{L^2}$ - Cas-Test 2

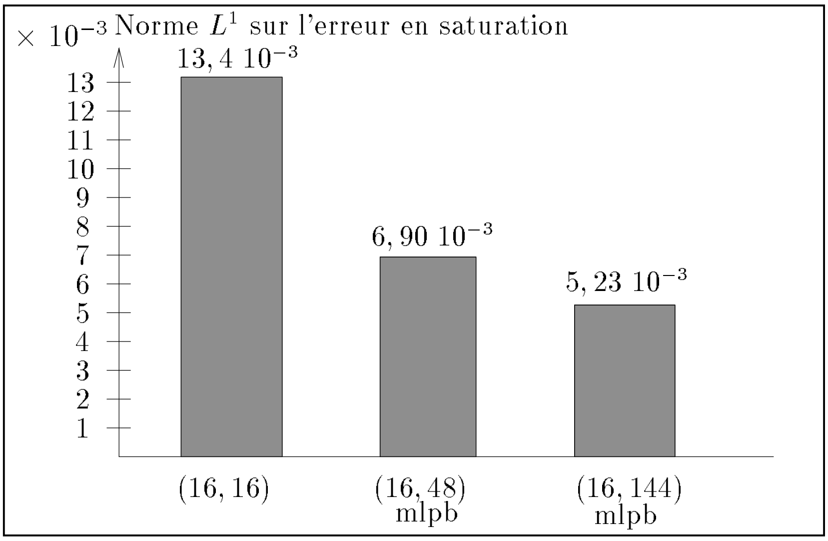

FIG. 3.12 - Influence de n_h sur $\|e(u)\|_{L^1}$ - Cas-Test 2

Rapport de mobilité	u_{wi}	u_{or}	n_w	n_o	k_{wm}	k_{om}	μ_w (c P)	μ_o (c P)
2	0.2	0.2	2	1.5	0.4	1	1	0.8

TAB. 3.3 - Propriétés du fluide du Cas-Test 3

Simulations	$\|e(F)\|_{L^2}$
$(10,10)$	$2,15\ \ 10^{-1}$
$(10,30)_{mlpb}$	$1,27\ \ 10^{-2}$
$(30,30)$	$1,27\ \ 10^{-2}$
$(10,90)_{mlpb}$	$2,18\ \ 10^{-4}$
$(30,90)_{mlpb}$	$3,38\ \ 10^{-5}$

TAB. 3.4 - Comparaison de $\|e(F)\|_{L^2}$ - Cas-Test 3

Fig. 3.13 - Matrice de perméabilité (en MD) du Cas Test 3

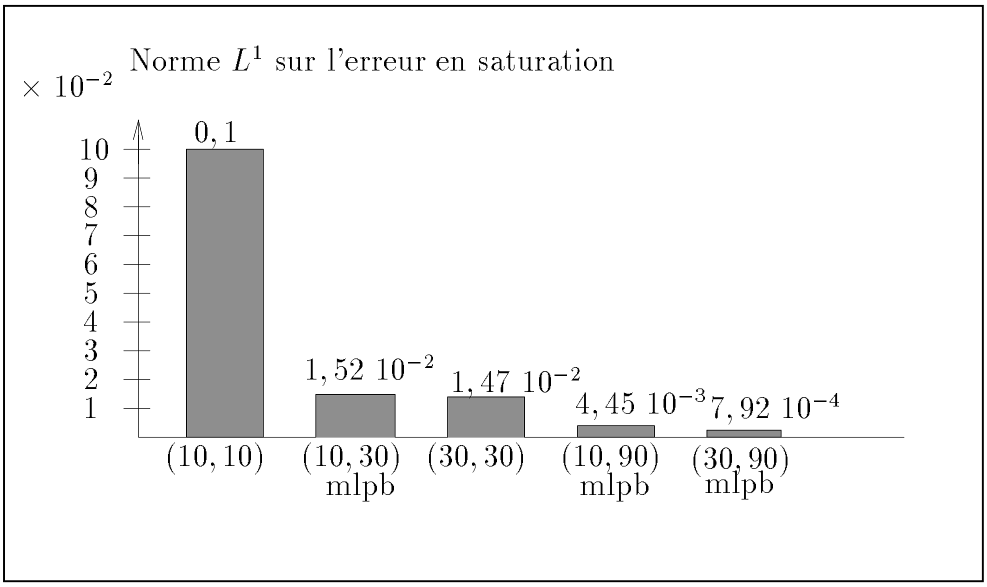

Fig. 3.14 - Influence de n_h sur $\|e(u)\|_{L^1}$ - Cas-Test 2

FIG. 3.15 - Comparaison du Watercut - Cas-Test 3

Maillage en Pression → Maillage en Saturation ↓	10×10	30×30	90×90
10×10	11	XXXX	XXXX
30×30	52	293	XXXX
90×90	797	1350	18052

TAB. 3.5 - Comparaison des temps CPU (s) - Cas-Test 3

4. Schéma volumes finis pour un problème elliptique avec une condition aux limites de type Fourier

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la convergence d'un schéma volumes finis pour une équation elliptique définie sur un ouvert polygonal connexe de $I\!R^2$ avec une condition aux limites de type Fourier. Le flux de pression sur le bord du domaine n'étant alors plus une donnée du problème comme dans les chapitres 2 et 3, on introduit des inconnues en plus sur le bord du domaine. On montre alors des estimations d'erreur en norme H^1 discrète du domaine ainsi qu'en norme L^2 discrète du bord. On établit de plus des estimations en norme L^r pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$.

Soit Ω un ouvert borné polygonal connexe de $I\!R^2$, on note $\partial\Omega$ le bord de Ω. Le problème considéré est le suivant :

$$(4.1) \qquad -\Delta P(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec la condition aux limites suivante :

$$(4.2) \qquad \nabla P(\tau).n(\tau) + \lambda\, P(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in \partial\Omega,$$

où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.
On suppose que

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \lambda \in I\!R^{\star}_{+}, \\ \\ f \in L^2(\Omega),\ g \in H^{3/2}(\partial\Omega) \text{ et tels que } P \in H^2(\Omega). \end{cases}$$

On cherche à déterminer P dans $H^2(\Omega)$ solution variationnelle de (4.1)-(4.2), i.e. vérifiant :

$$(4.4) \qquad \int_\Omega \nabla P(x).\nabla\psi(x)\,dx\,dt - \int_{\partial\Omega} \Big(g(\tau) - \lambda\, P(\tau)\Big)\,\psi(\tau)\,d\tau = \int_\Omega f(x)\,\psi(x)\,dx$$

pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$.

4.2 Discrétisation

4.2.1 Hypothèses sur le maillage

Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω. Soit $p \in \mathcal{T}$, on considère alors que p est un ouvert de $I\!R^2$. On note h_p le diamètre de p, $N(p)$ l'ensemble des voisins de p et σ_{pq} l'interface entre les mailles p et q où $q \in N(p)$. On suppose que $\mathcal{T}$ vérifie les même hypothèses de régularité que dans le chapitre précédent, on utilise de plus les même notations, que l'on rappelle toutefois :

- L'intersection entre deux éléments de $\mathcal{T}$ est soit un point soit un segment, ce segment est alors un côté de chacune des deux mailles considérées.
- Pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, il existe $x_a \in a$ tel que $[x_p, x_a]$ est orthogonal à a.
- Il existe une famille de points $(x_p)_{p\in\mathcal{T}}$ telle que pour tout $p \in \mathcal{T},\ x_p \in p$ et pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$.
- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $p \in \mathcal{T}$: $d(x_p, \partial p) \geq \alpha\, h_p$
- Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout côté a de p :
$$\alpha_1\, h_p \leq l(a) \leq h_p$$

(4.5)

où $l(a)$ est la longueur de a.

NOTATIONS

$h = \max_{p\in\mathcal{T}} h_p$,

$\mathcal{A}_{ext}$ l'ensemble des côtés du maillage qui sont inclus dans $\partial\Omega$,

$\mathcal{A}_{int}$ l'ensemble des côtés du maillage qui sont dans Ω.

Pour tout $p \in \mathcal{T}$, on note :

n_p la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω,

$\mathcal{A}_{ext}(p)$, l'ensemble des côtés de p situés dans le bord de Ω,

$N(p)$ l'ensemble des voisins de p, c'est à dire l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}$ ayant un côté commun avec p,

f_p la moyenne de f sur p, i.e.

$$f_p = \frac{1}{m(p)} \int_p f(x)\, dx.$$

Pour tout $q \in N(p)$, on note :

$d_{pq} = d(x_p, x_q)$, où $d(\cdot,\cdot)$ est la distance euclidienne de $I\!R^2$,

σ_{pq} l'interface entre p et q,

n_{pq} la normale unitaire à σ_{pq} dirigée de p vers q.

Pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, on note :

d_{pa} la distance de x_p à x_a,

$g_a = \dfrac{1}{l(a)} \displaystyle\int_a g(\tau)\ d\tau.$

4.2.2 Equation Discrétisée

Pour discrétiser (4.1), un schéma volumes finis est utilisé ; le principe des schémas volumes finis, comme on l'a déja vu dans les chapitres précédents, est d'intégrer l'équation continue sur chaque volume de contrôle (ici les mailles $p \in \mathcal{T}$ et les côtés $a \in \mathcal{A}_{ext}$).
Ainsi, d'après la formule de Green, on a, pour tout $p \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} -\int_{\partial p} \nabla P(\tau).n_p(\tau)\, d\tau = -\sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}(\tau)\, d\tau - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a \nabla P(\tau).n(\tau)\, d\tau \\ = \int_p f(x)\, dx \end{aligned}$$

Et, pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}$:

$$\int_a \nabla P(\tau).n(\tau)\, d\tau + \lambda \int_a P(\tau)\, d\tau = \int_a g(\tau)\, d\tau$$

On approche P par $P_{\mathcal{T}}$ avec

$$P_{\mathcal{T}}(x) = \begin{cases} P_p & \text{si } x \in p,\ p \in \mathcal{T}, \\ P_a & \text{si } x \in a,\ a \in \mathcal{A}_{ext}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Les équations discrétisées s'écrivent alors :

$$-\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, \frac{P_a - P_p}{d_{pa}} = m(p)\ f_p \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{T}, \tag{4.7}$$

et

$$l(a)\, \frac{P_a - P_p}{d_{pa}} + \lambda P_a\, l(a) = l(a)\, g_a \qquad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}_{ext}(p),\ p \in \mathcal{T}. \tag{4.8}$$

4.3 Convergence du schéma

4.3.1 Existence et unicité de la solution approchée

On montre tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution du problème discrétisé en établissant un principe du maximum discret.

Lemme 4.1 *On suppose les hypothèses (4.3) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant (4.5).*
Alors il existe une unique solution $P_{\mathcal{T}}$ de (4.6), (4.7) et (4.8).

Démonstration du lemme 4.1 :

Afin de démontrer ce lemme, on établit tout d'abord le lemme suivant qui donne un principe du maximum discret.

Lemme 4.2 *On suppose les hypothèses (4.3) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant (4.5). Soit $P_{\mathcal{T}}$ la solution de (4.6), (4.7) et (4.8). On suppose que pour tout $p \in \mathcal{T}$, $f_p \geq 0$ et pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}$, $g_a \geq 0$.*
Alors :

$$P_p \geq 0 \quad et \quad P_a \geq 0 \qquad pour\ tout\ p \in \mathcal{T}\ et\ tout\ a \in \mathcal{A}_{ext}.$$

Démonstration du lemme 4.2 :

On suppose que le minimum de $\left\{(P_p)_{p\in\mathcal{T}} \cup (P_a)_{a\in\mathcal{A}_{ext}}\right\}$ est atteint sur une maille intérieure au domaine c'est à dire en P_{p_0} où $p_0 \in \mathcal{T}$. Alors comme pour tout $p \in \mathcal{T}$, $f_p \geq 0$, d'après (4.7) :

$$\sum_{q\in N(p_0)} l(\sigma_{p_0 q}) \frac{P_q - P_{p_0}}{d_{p_0 q}} + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p_0)} l(a) \frac{P_a - P_{p_0}}{d_{p_0 a}} \leq 0$$

et donc :

$$P_q = P_{p_0} \text{ pour tout } q \in N(p_0) \text{ et } P_a = P_{p_0} \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}_{ext}(p_0)$$

Comme Ω est connexe, le minimum est atteint sur le bord.
Le minimum de $\left\{(P_p)_{p\in\mathcal{T}} \cup (P_a)_{a\in\mathcal{A}_{ext}}\right\}$ est donc P_{a_0} où $a_0 \in \mathcal{A}_{ext}$. Supposons de plus $P_{a_0} < 0$. Alors d'après (4.8), comme $\lambda > 0$:

$$P_{a_0} < 0 \Longrightarrow g_{a_0} < 0$$

Ce qui contredit les hypothèses, donc $P_{a_0} \geq 0$. Ceci termine la démonstration du lemme 4.2.

On termine alors la démonstration du lemme 4.1.

On suppose que pour tout $p \in \mathcal{T}$, $f_p = 0$ et pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}$, $g_a = 0$. Alors d'après le lemme 4.2, on a :

$$\Big(f_p \geq 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } g_a \geq 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big) \Longrightarrow \Big(P_p \geq 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } P_a \geq 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big)$$

$$\Big(f_p \leq 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } g_a \leq 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big) \Longrightarrow \Big(P_p \leq 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } P_a \leq 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big)$$

Ainsi :

$$\Big(f_p = 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } g_a = 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big) \Longrightarrow \Big(P_p = 0 \;\forall\, p \in \mathcal{T} \text{ et } P_a = 0 \;\forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}\Big)$$

Donc l'application linéaire définie par (4.7) et (4.8) est injective et donc bijective puisqu'on est en dimension finie.
Il existe alors une unique solution $P_{\mathcal{T}}$ de (4.6), (4.7) et (4.8).

4.3.2 Estimations d'erreur en norme $H^1(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$

On établit la convergence du schéma en montrant le résultat suivant qui donne une estimation d'erreur en norme $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$ discrète ainsi qu'une estimation d'erreur en norme $L^2(\Omega)$:

Théorème 4.1 *Soit P la solution exacte de (4.1) (4.2). On suppose les hypothèses (4.3) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant (4.5). Soit $P_{\mathcal{T}}$ la solution de (4.6), (4.7) (4.8). Pour tout $p \in \mathcal{T}$, on définit l'erreur sur la maille p par $e_p = P_p - P(x_p)$. On définit de plus, pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}$, l'erreur sur le côté a par $e_a = P_a - P(x_a)$. Alors il existe C, ne dépendant que de g, Ω, f, λ, α, α_1 et de la norme $H^2(\Omega)$ de P, telle que :*

$$\left[\sum_{p \in \mathcal{T}} \left(\sum_{q \in N(p)} l(\sigma_{pq}) \, \frac{(e_q - e_p)^2}{d_{pq}} + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, \frac{(e_a - e_p)^2}{d_{pa}} \right) + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}} l(a)\, |e_a|^2 \right]^{1/2} \leq C\, h \tag{4.9}$$

$$\left(\sum_{p \in \mathcal{T}} m(p) |e_p|^2 \right)^{1/2} \leq C\, h \tag{4.10}$$

Démonstration du théorème 4.1 :

On commence tout d'abord par définir l'erreur de consistance sur les flux sur chaque côté du maillage.

Soit $p \in \mathcal{T}$ et $q \in N(p)$, alors le flux exact sur le côté σ_{pq} dans la direction de p vers q est :

$$\overline{F}_{p,q}(P) = -\frac{1}{l(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau) . n_{pq}(\tau) \; d\tau$$

On définit l'erreur de consistance dans la direction de p vers q, notée $R_{p,q}(P)$, par :

$$R_{p,q}(P) = \overline{F}_{p,q}(P) + \frac{P(x_q) - P(x_p)}{d_{pq}}$$

De même, soit $p \in \mathcal{T}$ et $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, le flux exact sur le côté a dans la direction n est donné par :

$$\overline{F}_{p,a}(P) = -\frac{1}{l(a)} \int_a \nabla P(\tau).n(\tau)\, d\tau$$

On définit alors l'erreur de consistance, notée $R_{p,a}(P)$, par :

$$R_{p,a}(P) = \overline{F}_{p,a}(P) + \frac{P(x_a) - P(x_p)}{d_{pq}}$$

De plus lorsqu'on a discrétisé la condition aux limites on a également introduit une erreur de consistance qui est la suivante :

$$\tilde{R}_a(P) = P(x_a) - \frac{1}{l(a)} \int_a P(\tau)\, d\tau$$

On montre le résultat suivant qui donne la consistance du schéma au sens volumes finis (voir [16]) :

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du théorème 4.1, il existe constante C_1, ne dépendant que de la norme H^2 de P, de α et de α_1, et C_2, ne dépendant que de la norme H^2 de P, telle que :*

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, d_{pq}\, R_{p,q}(P)^2 + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, d_{pa}\, R_{p,a}(P)^2 \right)^{1/2} \leq C_1\, h \tag{4.11}$$

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, \tilde{R}_a(P)^2 \right)^{1/2} \leq C_2\, h \tag{4.12}$$

Démonstration du lemme 4.3

On montre tout d'abord le premier résultat qui donne la consistance des flux.

Démonstration de (4.11) :

Pour établir ce résultat, on commence par supposer $P \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Soit $p \in \mathcal{T}$ et $q \in N(p)$. Alors en utilisant un raisonnement analogue à celui utilisé pour établir (3.27) page 75, on montre que :

$$|R_{p,q}(P)| \leq \frac{C\, h}{\sqrt{l(\sigma_{pq})\, d_{pq}}} \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pq})} \tag{4.13}$$

où C ne dépend que α et α_1 et où $\mathcal{V}_{pq}$ est le quadrangle ayant pour sommet x_p, x_q et les deux sommets de σ_{pq} (voir figure 2.1 page 24). De plus, on note :

$$\|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pq})} = \left(\int_{\mathcal{V}_{pq}} \left(|P|^2 + |\nabla P|^2 + |D^2 P|^2\right)(z)\, dz\right)^{1/2}$$

et

$$|D^2 P|^2(z) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial^2 P(z)}{\partial x_i \partial x_j}\right|.$$

On traite alors les termes d'erreur de consistance sur les flux de bord comme le font R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin dans [16] pour une condition aux limites de type Dirichlet.
Soit $p \in \mathcal{T}$ tel que $\mathcal{A}_{ext}(p) \neq \emptyset$, et $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$. On choisit comme repère, que l'on note $\mathcal{C}^{pa}$, le repère direct qui a pour origine x_p et pour axe des abscisses (x_p, x_a). Notons de plus b et c, $c > b$ les ordonnés des deux sommets de a. On note I_{pa} le segment orthogonal à $[x_p, x_a]$ et tel que

$$d(I_{pa}, x_p) = d(I_{pa}, x_a) = \frac{1}{2}\, d(x_p, x_a) = \frac{1}{2}\, d_{pa}$$

On note e et f ($e < f$) les ordonnées des deux sommets de I_{pa}, leur abscisse étant égale à $d_{pa}/2$ (voir figure 4.1).

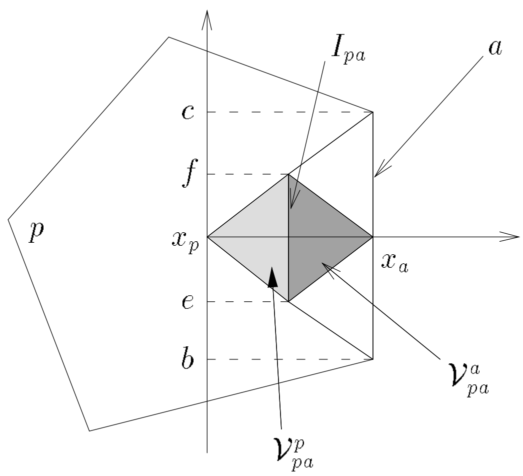

Fig. 4.1 -

Alors :

$$R_{pa}(P) = \frac{1}{l(a)} \int_b^c \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{pa}, s)\, ds - \frac{P(d_{pa}, 0) - \overline{P}_{pa} + \overline{P}_{pa} - P(0,0)}{d_{pa}}$$

où

$$\overline{P}_{pa} = \frac{1}{l(I_{pa})} \int I_{pa} P(\tau)\, d\tau = \frac{1}{l(I_{pa})} \int_e^f P(d_{pa}/2, s)\, ds$$

En utilisant un développement de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$\begin{aligned} |R_{pa}(P)| \leq & \left| \frac{1}{l(I_{pa})} \int_e^f P(d_{pa}/2, s)\, ds - \frac{1}{l(a)} \int_b^c \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{pa}, s)\, ds \right| \\ & + \frac{h_p^2}{l(I_{pa})\, d_{pa}} \left[\int_e^f \int_0^1 t\, |D^2 P| \left(\frac{d_{pa}}{2} t, s\, t \right) dt\, ds + \right. \\ & \left. \int_e^f \int_0^1 t\, |D^2 P| \left(\frac{d_{pa}}{2} t + (1-t)\, d_{pa}, s\, t \right) dt\, ds \right] \end{aligned}$$

En utilisant un changement de variables dans les deux dernières intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} |R_{pa}(P)| \leq & \left| \frac{1}{l(I_{pa})} \int_e^f P(d_{pa}/2, s)\, ds - \frac{1}{l(a)} \int_b^c \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{pa}, s)\, ds \right| \\ & + \frac{h_p^2}{l(I_{pa})\, d_{pa}} \left(\frac{2}{d_{pa}} \int_{\mathcal{V}_{pa}^p} |D^2 P|(z)\, dz + \frac{2}{d_{pa}} \int_{\mathcal{V}_{pa}^a} |D^2 P|(z)\, dz \right) \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}_{pa}^p$ est le triangle dont les sommets sont x_p et les deux sommets de I_{pa} et $\mathcal{V}_{pa}^a$ est celui dont les sommets sont x_a et les deux sommets de I_{pa} (voir figure 4.1).

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et en remarquant que $l(I_{pa}) = l(a)/2$ (puisque I_{pa} est l'image de a par l'homothétie de centre x_p et de rapport $1/2$), il vient :

$$\begin{aligned} |R_{pa}(P)| \leq & \left| \frac{1}{l(I_{pa})} \int_e^f P(d_{pa}/2, s)\, ds - \frac{1}{l(a)} \int_b^c \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{pa}, s)\, ds \right| \\ & + \frac{C\, h}{\sqrt{l(a)\, d_{pa}}} \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pa})} \end{aligned} \tag{4.14}$$

où C ne dépend que de α et α_1 et où $\mathcal{V}_{pa}$ est le triangle ayant pour sommets x_p et les deux sommets de a.

Il reste alors à traiter le terme suivant :

$$A = \left| \frac{1}{l(I_{pa})} \int_e^f P(d_{pa}/2, s)\, ds - \frac{1}{l(a)} \int_b^c \frac{\partial P}{\partial x_1}(d_{pa}, t)\, dt \right|$$

Remarquons pour cela, que d'après la régularité de P, on a :

$$A \leq \frac{h_p}{l(I_{pa})\, l(a)} \int_e^f \int_b^c \int_0^1 \left| \nabla \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \right| \left(\frac{d_{pa}}{2} \theta, \theta\, s + (1-\theta)\, t \right) d\theta\, dt\, ds$$

A s fixé, on utilise le changement de variables suivant, à (θ, t), on associe (x_1, x_2), tels que :

$$x_1 = \frac{d_{pa}\, \theta}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \theta\, s + (1-\theta)\, t$$

on obtient :

$$A \leq \frac{h_p}{l(I_{pa})\, l(a)} \int_e^f \int_0^{d_{pa}/2} \int_{\theta(x_1)\, s+(1-\theta(x_1))\, b}^{\theta(x_1)\, s+(1-\theta(x_1))\, c} |D^2 P|(x_1,x_2) \frac{2}{d_{pa}\,(1-\theta(x_1))}\, dx_2\, dx_1\, ds$$

Et donc, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$A \leq \frac{2\, h_p\, \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pa})}}{d_{pa}\, l(a)\, \sqrt{l(I_{pa})}} \left(\int_e^f \int_0^{d_{pa}/2} \int_{\theta(x_1)\, s+(1-\theta(x_1))\, b}^{\theta(x_1)\, s+(1-\theta(x_1))\, c} \frac{1}{(1-\theta(x_1))}\, dx_2\, dx_1\, ds \right)^{1/2}$$

Ainsi :

$$A \leq \frac{\sqrt{2}\, h_p}{\sqrt{d_{pa}\, l(a)}} \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pa})}$$

En reportant ce résultat dans (4.14), on obtient :

$$|R_{pa}(P)| \leq \frac{C\, h}{\sqrt{d_{pa}\, l(a)}} \|P\|_{H^2(\mathcal{V}_{pa})} \tag{4.15}$$

où C ne dépend que de α et α_1.

Alors en utilisant (4.13) et (4.15), on a :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, d_{pq}\, R_{p,q}(P)^2 + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, d_{pa}\, R_{p,a}(P)^2 \right)^{1/2} \leq C\, h$$

où C ne dépend que de α, α_1 et de la norme H^2 de P.

Ce qui termine la démonstration de l'inégalité (4.11) lorsque $P \in C^\infty(\overline{\Omega})$. On conclut en utilisant la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^2(\Omega)$ (voir [29]) comme dans la démonstration du lemme 3.1 page 73.

Démonstration de (4.12) :

Remarquons que comme $P \in H^2(\Omega)$ alors on peut définir la dérivée tangentielle de P sur le bord du domaine $\partial P(x(.), y(.))/\partial s$, elle est dans $L^2(\partial\Omega)$.

On procède alors de la même façon que précédemment. On montre tout d'abord le résultat pour $P \in C^\infty(\partial\Omega)$ puis on conclut par densité.

En utilisant un développement de Taylor avec reste intégrale ainsi que l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$\tilde{R}_a(P) \leq \sqrt{l(a)} \left(\int_0^{l(a)} \left(\frac{\partial P(x(s), y(s))}{\partial s} \right)^2 \right)^{1/2}$$

et donc :

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, \tilde{R}_a(P)^2 \right)^{1/2} \leq h\, \|P\|_{H^1(\partial\Omega)}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 4.3.

Démonstration de l'estimation d'erreur en norme $H_0^1 \cap L^2(\partial\Omega)$ discrète : (4.9)

Comme $P \in H^2(\Omega)$ est solution de (4.4) :

$$\Delta P = f \qquad \text{p.p. sur } \Omega,$$

$$\nabla P.n + \lambda\, P = g \qquad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

En intégrant la première équation sur $p \in \mathcal{T}$ et la deuxième équation sur $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, alors, il vient :

$$\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \overline{F}_{p,q}(P) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\overline{F}_{p,a}(P) = m(p)\, f_p \tag{4.16}$$

et

$$-\, l(a)\, \overline{F}_{p,a}(P) + \lambda\, l(a)\, \overline{P}_a = l(a)\, g_a \tag{4.17}$$

On soustrait (4.7) à (4.16), on multiplie par e_p et on somme sur $p \in \mathcal{T}$, on obtient alors :

$$-\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, e_p\, \frac{e_q - e_p}{d_{pq}} - \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, e_p\, R_{p,q}(P)$$
$$- \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, e_p\, \frac{e_a - e_p}{d_{pa}} - \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, e_p\, R_{p,a}(P) = 0$$

En utilisant la conservativité des flux exacts et approchés, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{\left(e_q - e_p\right)^2}{d_{pq}} + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, \frac{e_p^2 - e_p\, e_a}{d_{pa}}$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, R_{p,q}(P) \left(e_p - e_q\right) + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, e_p\, R_{p,a}(P) \tag{4.18}$$

On soustrait alors (4.8) à (4.17), on multiplie par e_a et on somme sur $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$ et sur $p \in \mathcal{T}$, on obtient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, \frac{e_a^2 - e_a\, e_p}{d_{pa}} + \lambda \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, e_a^2 = -\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, R_{p,a}(P)\, e_a$$
$$+ \lambda \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, \tilde{R}_a(P)\, e_a \tag{4.19}$$

On somme alors (4.18) et (4.19), et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, \frac{\left(e_q - e_p\right)^2}{d_{pq}} + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, \frac{\left(e_a - e_p\right)^2}{d_{pa}} + \lambda \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, e_a^2$$
$$\leq \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, d_{pq}\, R_{p,q}(P)^2 + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, d_{pa}\, R_{p,a}(P)^2$$
$$+ \lambda \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\, \tilde{R}_a(P)^2$$

On conclut alors à l'aide du lemme 4.3, on a :

$$\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{\left(e_q-e_p\right)^2}{d_{pq}}+\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,\frac{\left(e_a-e_p\right)^2}{d_{pa}}+\lambda\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\,e_a^2\leq C\,h^2$$

où C ne dépend que de la norme H^2 de P, de α, α_1 et de λ.

Démonstration de l'estimation d'erreur en norme $L^2(\Omega)$: (4.10)

Terminons alors la démonstration du théorème 4.1. Pour cela, on montre l'inégalité suivante :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,e_p^2\leq C\left[\sum_{p\in\mathcal{T}}\left(\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{(e_q-e_p)^2}{d_{pq}}+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,\frac{(e_a-e_p)^2}{d_{pa}}\right)+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}} l(a)\,e_a^2\right]$$

où C ne dépend que de Ω.

On choisit une direction qui n'est parallèle à aucun des côtés du maillage, notons $\eta\in I\!R^2$ un vecteur porté par cette direction et tel que $\|\eta\|_2\geq\delta(\Omega)$, où $\delta(\Omega)$ est le diamètre de Ω.
Alors pour tout $a\in\mathcal{A}$, on note :

- pour tout x et z dans $I\!R^2$, $\varphi_a(x,z)$, la fonction qui vaut 1 si le segment $[x,z]$ coupe a et 0 sinon.
- θ_a l'angle entre a et η

si $a\in\mathcal{A}_{int}$, on note de plus

- $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$ les deux mailles situées de part et d'autre de a,
- $e_{a,+}$ et $e_{a,-}$ les erreurs sur les mailles $p_{a,+}$ et $p_{a,-}$,
- d_a la distance entre $x_{p_{a,+}}$ et $x_{p_{a,-}}$,

si $a\in\mathcal{A}_{ext}$, on note

- p_a la maille de $\mathcal{T}$ ayant pour côté a,
- $e_{a,+}$ l'erreur sur p_a et $e_{a,-}=e_a$,
- d_a la distance entre x_{p_a} et a.

Soit $p \in \mathcal{T}$ et $x \in p$, alors :

$$|e_p| \leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \left| e_{a,+} - e_{a,-} \right| \varphi_a(x, x+\eta) + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}} |e_a| \, \varphi_a(x, x+\eta)$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|e_p|^2 \leq 2 \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\left(e_{a,+} - e_{a,-}\right)^2}{d_a \, \cos\theta_a} \varphi_a(x, x+\eta) \right) \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} d_a \, \cos\theta_a \, \varphi_a(x, x+\eta) \right) + 2\, C \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}} |e_a|^2 \, \varphi_a(x, x+\eta)$$

où C ne dépend que de Ω et η.
On a donc :

$$|e_p|^2 \leq 2\, \delta(\Omega) \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\left(e_{a,+} - e_{a,-}\right)^2}{d_a \, \cos\theta_a} \varphi_a(x, x+\eta) + 2\, C \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}} |e_a|^2 \, \varphi_a(x, x+\eta)$$

On intègre alors par rapport à x, on obtient :

$$\sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^2 \leq 2\, \delta(\Omega)^2 \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\left(e_{a,+} - e_{a,-}\right)^2}{d_a} l(a) + 2\, \delta(\Omega)\, C \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}} |e_a|^2 \, l(a)$$

On termine alors la démonstration du théorème 4.1 à l'aide de l'estimation d'erreur en norme $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$ (4.9), on a alors :

$$\sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^2 \leq C\, h$$

où C ne dépend que de Ω, α, α_1, de λ et de la norme $H^2(\Omega)$ de P.

4.3.3 Estimation d'erreur en norme L^r pour tout $1 \leq r \leq +\infty$

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant :

Théorème 4.2 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (4.5). On note $P(\cdot)$ la solution exacte de (4.4). On suppose les hypothèses (4.3) vérifiées. Soit $P_{\mathcal{T}}$ la solution de (4.6), (4.7) et (4.8). On définit e l'erreur par $e(x) = e_p = P_p - P(x_p)$ si $x \in p$, $p \in \mathcal{T}$.*
Alors, il existe C, ne dépendant que de α, α_1, Ω et de la norme $H^2(\Omega)$ de P, telle que :

$$\left(\sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^r \right)^{1/r} \leq r\, C\, h \tag{4.20}$$

pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$.

De plus si $\mathcal{T}$ vérifie la propriété suivante :

(4.21) *Il existe α_3 tel que pour tout $p \in \mathcal{T}$: $m(p) \geq \alpha_3\, h^2$*

Alors, il existe C ne dépendant que de α, α_1, α_3, Ω et de la norme $H^2(\Omega)$ de P, telle que :

$$\|e\|_\infty \leq -C\, h\, \ln(h)$$

pour tout h tel que $h \leq \dfrac{1}{\alpha_3} \exp\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

Démonstration du théorème 4.2 :

D'après le lemme 2.4 page 36, on a pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$:

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^r\right)^{1/r} \leq C\, r \left[\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q - e_p|^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq})\right)^{1/2} + \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^2\right)^{1/2}\right]$$

où C ne dépend que de α, α_1 et de Ω.
Alors en utilisant le théorème 4.1, il vient :

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, |e_p|^r\right)^{1/r} \leq C\, r\, h$$

où C ne dépend que de g, Ω, f, λ, α, α_1 et de la norme $H^2(\Omega)$ de P.

Si de plus $\mathcal{T}$ vérifie (4.21), on déduit de l'inégalité précédente, comme dans la démonstration du théorème 2.2 page 35, une estimation en norme infinie :

$$\|e\|_\infty \leq -C\, h\, \ln(h)$$

pour tout h tel que $h \leq \dfrac{1}{\alpha_3} \exp\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

5. Schémas à quatre points et décentré amont pour un système elliptique - hyperbolique non linéaire, convergence et estimations d'erreur

On s'intéresse à la convergence de la solution approchée du problème

$$\Delta P = 0$$
$$u_t - \operatorname{div}(\nabla P\, f(u)) = 0$$

sur un ouvert borné, où f est une fonction croissante. Sur l'équation elliptique, le schéma volumes finis "à quatre points" présenté dans le chapitre 2 est utilisé. Pour discrétiser l'équation hyperbolique, on utilise un schéma décentré vers l'amont de l'écoulement. On montre alors, en supposant la condition initiale à variations bornées, une estimation d'erreur, en norme L^1, de l'ordre de $h^{1/4}$ où h définit la taille du maillage. De plus, on établit la convergence de la solution approchée vers la solution entropique du problème ainsi que l'existence et l'unicité de cette dernière.
Ce chapitre a été publié sous la forme d'un acte de Congrès avec comité de lecture (voir [42]).

5.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné convexe polygonal de $I\!R^2$, on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω, alors on considère le problème elliptique - hyperbolique suivant :

$$\Delta P(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5.1}$$
$$u_t(x,t) - \operatorname{div}\Big(\nabla P(x)\, f(u(x,t))\Big) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in I\!R_+, \tag{5.2}$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale suivantes :

$$\nabla P(\tau).n(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in \partial\Omega, \tag{5.3}$$
$$u(\tau,t) = \overline{u}(\tau,t), \quad (\tau,t) \in \partial\Omega^+ \times I\!R^+, \tag{5.4}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{5.5}$$

où $\partial\Omega^+ = \{\tau \in \partial\Omega\ ;\ g(\tau) > 0\}$ et où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

On suppose que :

$$(5.6)\qquad \begin{cases} \textbf{1.}\quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \overline{u} \in C^1 \cap L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+). \\ \textbf{2.}\quad f \in C^1(I\!R, I\!R) \text{ et f croissante.} \\ \textbf{3.}\quad g \in L^\infty(\partial\Omega), \text{ telle que } P \in C^2(\overline{\Omega}) \\ \quad \text{et vérifiant la relation de compatibilité : } \displaystyle\int_{\partial\Omega^+} g(\tau)\, d\tau = 0. \\ \textbf{4.}\quad \text{Chaque composante connexe de } \partial\Omega^+ \text{ est un segment,} \\ \quad\quad \text{et on suppose que } g \text{ vérifie } \displaystyle\int_{\partial\Omega^+} \frac{1}{g(\tau)}\, d\tau = W < +\infty \end{cases}$$

Notons que les hypothèses **4.** sont des hypothèses techniques que l'on n'a pas réussi à lever bien qu'elles ne soient probablement pas nécessaires
Le problème étant non linéaire, la solution faible n'est pas unique, il faut donc considérer la solution entropique.
On note $(a \top b) = \max(a, b)$ et $(a \perp b) = \min(a, b)$, ainsi pour tout $\kappa \in I\!R$, $|. - \kappa|$ sont les entropies de Kruzkov et $f(.\top\kappa) - f(.\perp\kappa)$ sont les flux associés.
Alors, on cherche $P \in C^2(\overline{\Omega})$ solution au sens classique de (5.1), (5.3), et u dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5), i.e. vérifiant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u(x,t) - \kappa|\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega |u_0(x) - \kappa|\, \varphi(x,0)\, dx \\ &- \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f\big(u(x,t)\top\kappa\big) - f\big(u(x,t)\perp\kappa\big)\Big)\, \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \\ &+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f\big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa\big) - f\big(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa\big)\Big)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \geq 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C_c^1(\Omega^+ \times I\!R_+, I\!R_+)$, avec $\Omega^+ = \Omega \cup \partial\Omega^+$.
En fait il sera nécessaire pour la suite de pouvoir choisir une fonction test non nulle sur $\partial\Omega^- = \{\tau \in \partial\Omega\ ;\ g(\tau) \leq 0\}$, donc ce n'est pas (5.7) qui sera utilisée mais plutôt la formulation suivante qui est équivalente à (5.7) :

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u(x,t) - \kappa|\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega |u_0(x) - \kappa|\, \varphi(x,0)\, dx \\ &- \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f\big(u(x,t)\top\kappa\big) - f\big(u(x,t)\perp\kappa\big)\Big)\, \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \\ &+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f\big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa\big) - f\big(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa\big)\Big)\, g(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \geq 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.

Remarque 5.1 *Il est clair que si* $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *vérifie (5.8) alors* u *vérifie (5.7). Réciproquement, en choisissant comme fonction test dans (5.7) une fonction qui tend vers la fonction caractéristique de* $\overline{\Omega}$ *(par exemple celle définie en annexe A page 237) et en utilisant la croissance de* f *et le caractère négatif de* $\nabla P.n$ *sur* $\partial\Omega^-$*, on montre que si* $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *vérifie (5.8) alors* u *vérifie (5.7). Les deux formulations (5.7) et (5.8) sont donc équivalentes.*

5.2 Discrétisation du problème

On se donne un maillage $\mathcal{T}$ de Ω. Pour tout p dans $\mathcal{T}$ on note :

h_p le diamètre de p,

$m(p)$ l'aire de p,

$N(p)$ l'ensemble des voisins de p, c'est à dire l'ensemble des mailles de $\mathcal{T}$ ayant un côté commun avec p,

$\mathcal{A}_{ext}(p)$ l'ensemble des côtés de p inclus dans $\partial\Omega$.

Pour tout côté a de p, on note :

$l(a)$ la longueur de a.

Pour tout $q \in N(p)$, on note :

σ_{pq} l'interface entre p et q,

d_{pq} la distance entre x_p et x_q où x_p et x_q sont définis en (5.9),

n_{pq} la normale unitaire à σ_{pq} allant de p vers q.

Pour tout $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, on note :

$$g_a = \frac{1}{l(a)} \int_a g(\tau)\, d\tau,$$

$$g_a^+ = \frac{1}{l(a)} \int_a \Big(g(\tau) \top 0\Big)\, d\tau,$$

$$g_a^- = \frac{1}{l(a)} \int_a \Big(-g(\tau) \top 0\Big)\, d\tau.$$

Enfin, on note $h = \max_{p \in \mathcal{T}} h_p$.

On suppose alors que $\mathcal{T}$ satisfait les hypothèses de régularité suivantes :

(5.9)
$$\begin{cases} \bullet \text{ L'intersection entre deux éléments de } \mathcal{T} \text{ est soit un point soit un segment,} \\ \text{ce segment est alors un côté de chacune des deux mailles considérées.} \\ \\ \bullet \text{ Il existe une famille de points } (x_p)_{p\in\mathcal{T}} \text{ telle que pour tout } p \in \mathcal{T},\ x_p \in p \\ \text{et pour tout } p \in \mathcal{T} \text{ et tout } q \in N(p),\ [x_p, x_q] \text{ est orthogonal à } \sigma_{pq} \text{ et} \\ [x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset. \\ \\ \bullet \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que pour tout } p \in \mathcal{T}\ :\ d(x_p, \partial p) \geq \alpha\, h \\ \\ \bullet \text{ Il existe } \alpha_1 > 0 \text{ tel que pour tout } p \in \mathcal{T} \text{ et tout côté } a \text{ de } \mathcal{T}\ : \\ \qquad \alpha_1\, h \leq l(a) \leq h \quad \text{et} \quad \alpha_1\, h^2 \leq m(p) \leq h^2 \end{cases}$$

Remarque 5.2 *Tout d'abord notons que comme pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$ et que Ω est convexe, alors toutes les mailles de p sont convexes. De plus, les hypothèses étant assez générales, on peut considérer différents types de maillages vérifiant ces conditions, voir remarque 2.2.1 page 17.*

On discrétise alors l'équation elliptique comme on l'a déja fait dans le chapitre 2 page 15. La solution approchée, associée à l'équation elliptique, est définie par

$$P_{\mathcal{T}}(x) = P_p \qquad \text{si } x \in p\ (p \in \mathcal{T}) \tag{5.10}$$

Le schéma numérique pour l'équation elliptique s'écrit alors :

$$\sum_{q\in N(p)} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a = 0 \qquad \forall\, p \in \mathcal{T} \tag{5.11}$$

Afin de discrétiser l'équation hyperbolique on se donne un pas de temps $k > 0$ vérifiant la condition de stabilité suivante :

$$\frac{k\ M}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p) \\ P_p < P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right) \leq (1-\eta) \tag{5.12}$$

où $\eta \in]0,1[$ est donné, et où $M = \sup\limits_{s\in[-U,U]} f'(s)$ avec $U = \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)$.
On note alors $t^n = n\,k$ pour tout $n \in I\!N$. Remarquons que comme pour (2.49) page 56, on montre qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que des données et de α_1, tel que

$$k \leq C\, h \tag{5.13}$$

La solution approchée, associée à l'équation hyperbolique, est définie par

$$u_{\mathcal{T},k}(x,t) = u_p^n \quad \text{si } x \in p\ (p \in \mathcal{T}) \text{ et } t \in [t^n, t^{n+1}[\ (n \in I\!N) \tag{5.14}$$

De plus, on discrétise la condition initiale et la condition aux limites de la façon suivante :

$$u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x)\, dx \qquad \text{pour tout } p \in \mathcal{T} \tag{5.15}$$

et :

$$\overline{u}_a^n = \frac{1}{k\, l(a)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \overline{u}(\tau,t)\, d\tau\, dt \qquad \forall\, n \in I\!N \text{ et } \forall\, a \in \mathcal{A}_{ext}(p),\ p \in \mathcal{T} \tag{5.16}$$

Pour discrétiser l'équation hyperbolique, on utilise un schéma d'Euler explicite en temps et un schéma de type volumes finis en espace, on intègre donc l'équation sur chaque maille, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_p \frac{u(x,t^{n+1}) - u(x,t^n)}{k}\, dx - \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} f\Big(u(\tau,t^n)\Big)\, \nabla P(\tau).n_{pq}(\tau)\, d\tau \\ - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a f\Big(u(\tau,t^n)\Big)\, g(\tau)\, d\tau = 0\end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$.
On choisit comme approximation de la valeur de u aux interfaces des mailles ainsi qu'au bord, une valeur décentrée vers l'amont de l'écoulement, ainsi le schéma numérique s'écrit :

$$\begin{aligned}m(p)\, \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{k} - \sum_{q\in N(p)} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq})\, f(u_{pq}^n) \\ - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, \Big(g_a^+\, f(\overline{u}_a^n) - g_a^-\, f(u_p^n)\Big) = 0\end{aligned} \tag{5.17}$$

pour tout $(p,n) \in \mathcal{T} \times I\!N$ et où $u_{pq}^n = \begin{cases} u_p^n & \text{si } P_p > P_q \\ u_q^n & \text{sinon} \end{cases}$

Il sera également utile de voir le schéma sous la forme suivante, obtenue à l'aide du schéma sur l'équation elliptique (5.11) :

$$\begin{aligned}m(p)\, \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{k} - \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq})\, \Big(f(u_q^n) - f(u_p^n)\Big) \\ - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\, \Big(f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n)\Big) = 0\end{aligned} \tag{5.18}$$

pour tout $(p,n) \in \mathcal{T} \times I\!N$.

5.3 Résultats principaux

On rappelle que la convergence de la solution approchée associée à à l'équation elliptique vers la solution exacte de (5.1), (5.3) a déja été établie dans le chapitre 2. On a montré que $P_{\mathcal{T}}$ existe et qu'elle est unique à une constante près (voir proposition 2.1 page 22). On a également établi une estimation d'erreur en norme $H^1(\Omega)$ discrète (voir théorème 2.1 page 23) ainsi que des estimations d'erreur en norme $L^r(\Omega)$ pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$ (voir théorème 2.2 page 35).

En utilisant ces résultats de convergence, pour la solution approchée associée à l'équation elliptique, on montre la convergence de la solution du problème discrétisé (5.15), (5.16), (5.18) vers la solution entropique de l'équation hyperbolique ainsi que l'existence et l'unicité de cette dernière. Pour cela on passe à la limite dans les équations discrétisées, on montre alors que la solution approchée converge au sens non linéaire faible $\star$ vers une solution processus entropique, voir [17] (ou une solution entropique à valeur mesure, voir [12]) de l'équation hyperbolique. Il reste à montrer que cette solution est en fait la solution entropique. Cette étape, développée dans [17] dans le cas où $\Omega = I\!R^d$, se généralise au problème considéré ici malgré la difficulté supplémentaire introduite par les conditions aux limites.
A. Szepessy traite ce problème sur un ouvert borné dans [34] pour une équation du type $u_t + \mathrm{div}(F(u)) = 0$, il introduit la trace de la solution à valeur mesure sur le bord du domaine, et pour cela utilise fortement le caractère BV de la solution entropique alors qu'ici cette dernière n'est supposée que dans $L^\infty(\Omega)$. Dans [3] les auteurs établissent la convergence de E-schémas en utilisant le résultat d'unicité de la solution à valeurs mesures de A. Szepessy ([34]), et donc supposent la solution entropique à variations bornées. Pour d'autres résultats sur la convergence de schémas volumes finis, on peut se référer à [25] ou [43]
De plus, en supposant la condition initiale à variations bornées, on établit, comme ceci est fait dans [15] dans le cas où $\Omega = I\!R^d$, une estimation d'erreur en norme L^1 pour la solution approchée associée à l'équation hyperbolique, de l'ordre de $h^{1/4}$. La différence essentielle entre [15] et ce travail provient des termes de bord qu'il faut contrôler, ceci est fait à l'aide de la prise en compte des termes de bord là où le flux est "sortant" dans la formulation entropique (voir remarque 5.1). Cette formulation permet d'avoir une estimation d'erreur sur Ω tout entier. Des résultats d'estimations d'erreur pour l'équation $u_t + \mathrm{div}(F(u)) = 0$ sur $I\!R^d \times I\!R_+$, où F ne dépend de x et t qu'à travers u, sont donnés dans [9], [10] et [43].

Commençons par préciser ce que l'on entend par fonctions à variations bornées :

Définition 5.1 *Soit $K \subset I\!R^N$, $N \geq 1$, K ouvert., on définit l'ensemble des fonctions* *à variations bornées sur K, noté $BV(K)$, l'ensemble des fonctions u telles que :*

$$|u|_{BV(K)} < +\infty$$

où $|.|_{BV(K)}$ est la semi norme sur $BV(K)$ définie par :

$$|u|_{BV(K)} = \sum_{i=1}^{N} \sup \left\{ \int_K u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y)\, dy \,;\, \varphi \in C_c^\infty(K, I\!R),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Le but de cette section est alors de montrer les deux résultats suivants :

Théorème 5.1 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_\mathcal{T}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).*

Alors, il existe $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ tel que

$$\lim_{h \to 0} u_{\mathcal{T},k} = u \text{ dans } L^r_{loc}(\Omega \times I\!R_+), \text{ pour tout } r < +\infty.$$

De plus u est l'unique solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5), i.e. u vérifie (5.8).

Remarque 5.3 *Si $u_0 \in L^\infty \cap BV(\Omega)$, alors on peut montrer que $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$ pour tout $T < +\infty$. Pour cela, on utilise une technique introduite dans [7] pour une équation hyperbolique définie sur $I\!R^d \times I\!R_+$ $(d \geq 1)$. Elle consiste à discrétiser l'équation hyperbolique sur l'intersection entre le domaine et un maillage rectangulaire. Puis on utilise les propriétés de la solution donnée par la discrétisation sur ce maillage particulier afin de récupérer à la limite une solution à variations bornées.*

Théorème 5.2 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_\mathcal{T}$ solution de (5.10), (5.11). On suppose de plus que $u_0 \in BV(\Omega)$ et on note $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$ pour tout $T \in I\!R_+^\star$ la solution entropique de l'équation hyperbolique de (5.2), (5.4), (5.5), c'est à dire vérifiant (5.8). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).*

Alors, pour tout $T \in]0,+\infty[$, il existe C, ne dépendant que de Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g, W, η, α et de α_1, telle que :

$$\iint_{\Omega \times [0,T]} |u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)|\, dx\, dt \leq C\, h^{1/4} \tag{5.19}$$

Afin de montrer ces deux résultats, on va tout d'abord établir des estimations sur la solution approchée, une estimation L^∞, obtenue à l'aide du caractère stable du schéma, une estimation dite "BV faible" qui permet de contrôler les variations en temps et en espace de $u_{\mathcal{T},k}$, enfin une estimation continue d'entropie.

5.4 Estimations sur la solution approchée associée à l'équation hyperbolique

5.4.1 Stabilité du schéma

Lemme 5.1 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).*

Alors :

$$\|u_{\mathcal{T},k}\|_\infty \leq \max(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty) = U$$

Démonstration du lemme 5.1 :

Soient $p \in \mathcal{T}$ et $n \in I\!N$, d'après le schéma sur l'équation hyperbolique (5.18) on a :

$$u_p^{n+1} = u_p^n \left[1 - \frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_p < P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \, l(\sigma_{pq}) \, \frac{f(u_q^n) - f(u_p^n)}{u_q^n - u_p^n} + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, \frac{f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n)}{\overline{u}_a^n - u_p^n} \right) \right]$$
$$+ \frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_p < P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \, l(\sigma_{pq}) \, \frac{f(u_q^n) - f(u_p^n)}{u_q^n - u_p^n} \, u_q^n + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, \frac{f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n)}{\overline{u}_a^n - u_p^n} \, \overline{u}_a^n \right)$$

On a donc une combinaison de termes dont la somme des coefficients est égale à un, il reste à montrer qu'ils sont tous positifs. Il est clair que les deux derniers coefficients le sont d'après la croissance de f. On montre que le premier l'est aussi à l'aide de la condition de stabilité (5.12), la combinaison est donc convexe, et par récurrence :

$$|u_p^{n+1}| \leq \sup_{p \in \mathcal{T}} \left(|u_p^n|, \sup_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} |\overline{u}_a^n| \right) \leq \ldots \leq \max\Big(||u_0||_{L^\infty(\Omega)}, ||\overline{u}||_{L^\infty(\partial\Omega^+ \times I\!R^+)} \Big) = U$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$.

5.4.2 Estimation BV faible

On montre dans ce paragraphe des estimations sur l'accroissement de la solution approchée :

Lemme 5.2 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas*

de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).
Soit $T \in I\!R_+^\star$, on note $N_T = \max\Big\{n \in I\!N \; ; \; (n-1)\, k \le T\Big\}$.

Alors il existe C, ne dépendant que de η, α_1, α, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f, P et g, telle que :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p \in \mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_q > P_p}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \, l(\sigma_{pq}) \left| f(u_q^n) - f(u_p^n) \right| + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \left| f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \right| \right] \le \frac{C}{\sqrt{h}} \tag{5.20}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p \in \mathcal{T}} m(p) \left| u_p^{n+1} - u_p^n \right| \le \frac{C}{\sqrt{k}} \tag{5.21}$$

Démonstration du lemme 5.2 :

On commence par établir l'estimation "BV faible" en espace (5.20), pour cela on multiplie le schéma sur l'équation hyperbolique (5.18) par $k\, u_p^n$ et on somme sur $n \in \Big\{0, \ldots, N_T\Big\}$ et sur $p \in \mathcal{T}$, on obtient alors :

$$A + B = 0 \tag{5.22}$$

avec :

$$A = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p \in \mathcal{T}} m(p) \, \left(u_p^{n+1} - u_p^n \right) \, u_p^n$$

et

$$B = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p \in \mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_p < P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \, l(\sigma_{pq}) \, \Big(f(u_q^n) - f(u_p^n) \Big) \, u_p^n + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, \Big(f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \Big) \, u_p^n \right]$$

On peut encore écrire A sous la forme :

$$A = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p \in \mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^{n+1} - u_p^n \right)^2 + \sum_{p \in \mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^{N_T+1} \right)^2 - \sum_{p \in \mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^0 \right)^2$$

or d'après le schéma sur l'équation hyperbolique (5.18), on a pour tout $p \in \mathcal{T}$:

$$-\frac{m(p)}{2} \, \left(u_p^{n+1} - u_p^n \right)^2 = -\frac{k^2}{2\, m(p)} \left[\sum_{\substack{q \in N(p) \\ P_p < P_q}} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \, l(\sigma_{pq}) \, \Big(f(u_q^n) - f(u_p^n) \Big) + \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \, g_a^+ \, \Big(f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \Big) \right]^2$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$A \geq -\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{k}{2\,m(p)} \left[\left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right) \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left(f(u_q^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right)\right] - \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2}\left(u_p^0\right)^2 \tag{5.23}$$

On va alors traiter le terme B, pour cela on pose $F(r) = \displaystyle\int_0^r s\, f'(s)\, ds$, B s'écrit alors :

$$B = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left(\int_{u_p^n}^{u_q^n} f'(s)\,(u_p^n-s)\, ds + F(u_q^n) - F(u_p^n) \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(\int_{u_p^n}^{\overline{u}_a^n} f'(s)\,(u_p^n-s)\, ds + F(\overline{u}_a^n) - F(u_p^n) \right) \right]$$

En remarquant que (pour plus de détails voir [8]) :

$$\int_b^c f'(s)\,(c-s)\, ds \geq \frac{1}{2\,M}\left(f(c)-f(b)\right)^2 \qquad \text{pour tout } b,\, c \in I\!R$$

on obtient :

$$B \geq \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\frac{1}{2\,M} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left(f(u_q^n)-f(u_p^n)\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2\,M} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\right)^2$$

$$\left. - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(F(\overline{u}_a^n)-F(u_p^n)\right) - \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left(F(u_q^n)-F(u_p^n)\right) \right]$$

or d'après le schéma sur l'équation elliptique (5.11) on a :

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\, F(u_p^n) = -\sum_{q\in N(p)} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq})\, F(u_p^n) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^-\, F(u_p^n)$$

Ainsi :

$$B \geq \sum_{n=0}^{N_T} k \left[\sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\frac{1}{2\,M} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) \left(f(u_q^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\,M} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right)$$
$$- \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a) \left(g_a^+\, F(\overline{u}_a^n) - g_a^-\, F(u_p^n)\right) - \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\, F(u_q^n) \right.$$
$$\left.\left. - \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p>P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\, F(u_p^n) \right) \right]$$

comme pour tout $n \in I\!N$

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\, F(u_q^n) = -\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p>P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\, F(u_p^n)$$

il vient :

$$B \geq \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\frac{1}{2\,M} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) \left(f(u_q^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\,M} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\right)^2 - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\, F(\overline{u}_a^n) \right] \tag{5.24}$$

Ainsi d'après (5.22), (5.23) et (5.24) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\frac{1}{2\,M} - \frac{k}{2\,m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right) \right] \times$$
$$\left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq}) \left(f(u_q^n)-f(u_p^n)\right)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\right)^2 \right]$$
$$\leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^0\right)^2 + \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+\, F(\overline{u}_a^n)$$

et d'après (5.12), on a :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>p_T}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \Big(f(u_q^n)-f(u_p^n)\Big)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \Big(f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big)^2 \right]$$
$$\leq \frac{1}{\eta}\left(m(\Omega)\,\|u_0\|_\infty^2 + 2\,T \sup_{s\in[-U,U]} F(s) \int_{\partial\Omega} (g(\tau)\top 0)\; d\tau \right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \Big|f(u_q^n)-f(u_p^n)\Big| + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \Big|f(\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big| \right]$$
$$\leq C \left(T \sum_{p\in\mathcal{T}} \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \right]\right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de η, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f et de g.
Remarquons alors que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q-e_p|}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\, |R_{p,q}(P)|$$
$$+ \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} |\nabla P(\tau)|\, d\tau$$

où pour tout $p\in\mathcal{T}$, e_p est l'erreur en pression sur la maille p, c'est à dire $e_p = P_p - P(x_p)$.
De plus pour tout $p\in\mathcal{T}$ et tout $q\in N(p)$, $R_{p,q}(P)$ est l'erreur de consistance sur le flux de pression sur l'interface σ_{pq}, i.e. :

$$R_{p,q}(P) = \frac{1}{l(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}\, d\tau - \frac{P(x_q)-P(x_p)}{d_{pq}}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \leq \frac{C}{h} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \frac{|e_q-e_p|^2}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \right)^{1/2} +$$
$$\frac{C}{h} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} d_{pq} l(\sigma_{pq})\, |R_{p,q}(P)|^2 \right)^{1/2} + \frac{C}{\sqrt{h}} \left(\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} |\nabla P(\tau)|^2\, d\tau \right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de α et α_1.

Et donc d'après l'estimation d'erreur H_0^1 discrète du théorème 2.1 page 23, le lemme 2.1 page 24 et le lemme 3.2 page 75, on a :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \le \frac{C}{h}$$

où C ne dépend que de α, α_1, Ω et de P.

Remarque 5.4 *Il est possible de démontrer ce dernier résultat sans utiliser la régularité de P. Ce résultat est établi dans le chapitre 2, voir démonstration de (2.43) page 47.*

Ceci termine la démonstration de l'inégalité (5.20), puisque :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left| f(u_q^n) - f(u_p^n) \right| + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left| f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \right| \right] \le \frac{C}{\sqrt{h}}$$

où C ne dépend que de η, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, α, α_1, Ω, f, P et de g

On complète la démonstration du théorème 5.2 en établissant (5.21) qui se déduit directement à partir du schéma numérique (5.18) et de la condition de type C.F.L. (5.12). D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \left| u_p^{n+1} - u_p^n \right| \le \left(\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{(1-\eta)\, m(p)}{M} \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} k \left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \left| f(u_q^n) - f(u_p^n) \right|^2 + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left| f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \right|^2 \right] \right)^{1/2}$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) \left| u_p^{n+1} - u_p^n \right| \le \frac{C}{\sqrt{k}}$$

où C ne dépend que de η, α_1, α, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f, P et g.

5.4.3 Estimation d'entropie pour la solution approchée

On note $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ (respectivement $\mathcal{M}(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$ et $\mathcal{M}(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$) l'ensemble des mesures positives sur $\overline{\Omega}$ (respectivement sur $\overline{\Omega} \times I\!R_+$ et $\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+$), c'est à dire des formes linéaires positives et continues sur $C_c(\overline{\Omega})$ (respectivement sur $C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$ et $C_c(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$).
On montre alors une estimation d'entropie continue pour la solution approchée en établissant le résultat suivant :

Lemme 5.3 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).*

Alors il existe $\mu_{\mathcal{T},k} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, $\mu_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ et $\overline{\mu}_{\mathcal{T},k} \in \mathcal{M}(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$ telles que :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u_{\mathcal{T},k}(x,t)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \\
&\quad - \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\top\kappa) - f(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\bot\kappa)\Big)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad + \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \\
&\quad\quad \geq -\iint_{\Omega\times I\!R_+}\Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla\varphi(x,t)|\Big)\,d\mu_{\mathcal{T},k}(x,t) \\
&\quad\quad\quad - \int_\Omega \varphi(x,0)\,d\mu_{\mathcal{T}}(x) - \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \varphi(\tau,t)\,d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C^1_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.
De plus il existe C, D et E, ne dépendant que de η, α_1, α, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f, P et g, telles que pour tout $T \in \,]0,+\infty[$:

$$\mu_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) \leq C\sqrt{h} \tag{5.26}$$

$$\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\partial\Omega^+} \times [0,T]\Big) \leq D\,h \tag{5.27}$$

$$\lim_{h\to 0}\mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) = 0, \text{ de plus si } u_0 \in L^\infty \cap BV(\Omega), \text{ alors } \mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) \leq E\,h \tag{5.28}$$

Démonstration du lemme 5.3 :

On établit tout d'abord une inégalité d'entropie discrète sur la solution approchée en montrant le lemme suivant :

Lemme 5.4 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.14), (5.15), (5.16), (5.18).*

Alors $u_{\mathcal{T},\,k}$ vérifie une inégalité d'entropie discrète, c'est à dire l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
m(p)\,\frac{|u_p^{n+1}-\kappa|-|u_p^n-\kappa|}{k} - \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \Big(f(u_q^n\top\kappa) - f(u_q^n\bot\kappa) \\
-\Big(f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\bot\kappa)\Big)\Big) - \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \Big(f(\overline{u}_a^n\top\kappa) - f(\overline{u}_a^n\bot\kappa) \\
-\Big(f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\bot\kappa)\Big)\Big) \leq 0
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

pour tout $p\in\mathcal{T}$, tout $n\in I\!N$ et tout $\kappa\in I\!R$.

Démonstration du lemme 5.4 :

Soient $p\in\mathcal{T}$ et $n\in I\!N$, d'après le schéma sur l'équation hyperbolique (5.18) on a :

$$
u_p^{n+1} = u_p^n + \frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \Big(f(u_q^n) - f(u_p^n)\Big) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \Big(f(\overline{u}_a^n) - f(u_p^n)\Big) \right)
$$

donc :

$$
u_p^{n+1} = G\Big(u_p^n, u_q^n\,(q\in N(p)), \overline{u}_a^n\,(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))\Big)
$$

G est une fonction croissante en u_q^n $(q\in N(p))$ et en $\overline{u}_a^n$ $(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))$, et c'est aussi, d'après la condition de stabilité (5.12), une fonction croissante en u_p^n.
De plus :

$$
\kappa = G\Big(\kappa, \kappa\,(q\in N(p)), \kappa\,(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))\Big) \qquad \text{pour tout } \kappa\in I\!R
$$

Ainsi pour tout $\kappa\in I\!R$ on a :

$$
u_p^{n+1}\top\kappa \leq u_p^n\top\kappa + \frac{k}{m(p)} \left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\, l(\sigma_{pq}) \Big(f(u_q^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa)\Big) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \Big(f(\overline{u}_a^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa)\Big) \right)
$$

et

$$u_p^{n+1}\perp\kappa \geq u_p^n\perp\kappa + \frac{k}{m(p)}\left(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\left(f(u_q^n\perp\kappa)-f(u_p^n\perp\kappa)\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\, g_a^+ \left(f(\overline{u}_a^n\perp\kappa)-f(u_p^n\perp\kappa)\right)\right)$$

La différence de ces deux inéquations donne le résultat cherché.

Démonstration du lemme 5.3 :

On peut alors démontrer le lemme 5.3. Soient $\kappa \in I\!R$, $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+, I\!R_+)$ et $T\in\,]0,+\infty[$ tels que le support de φ est inclus dans $\overline{\Omega}\times[0,T]$. On note alors $N_T = \max\left\{n\in I\!N\,;\,(n-1)\,k\leq T\right\}$.
On multiplie (5.29) par $\dfrac{1}{m(p)}\displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt$, et on somme sur $p\in\mathcal{T}$ et $n = 1,\ldots,N_T$, on obtient alors :

$$T_1+T_2\leq 0 \tag{5.30}$$

avec :

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{|u_p^{n+1}-\kappa|-|u_p^n-\kappa|}{k}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt \tag{5.31}$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{1}{m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt\times$$
$$\left[\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_p<P_q}} \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\; l(\sigma_{pq})\left(f(u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\perp\kappa)-\left(f(u_q^n\top\kappa)-f(u_q^n\perp\kappa)\right)\right)\right. \tag{5.32}$$
$$\left. + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} l(a)\,g_a^+\left(f(u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\perp\kappa)-\left(f(\overline{u}_a^n\top\kappa)-f(\overline{u}_a^n\perp\kappa)\right)\right)\right]$$

On va montrer que

$$T_{10}+T_{20}\leq \iint_{\Omega\times I\!R_+}\Big(|\varphi_t(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)|\Big)\,d\mu_{\mathcal{T},k}(x,t)$$
$$+\int_\Omega \varphi(x,0)\,d\mu_{\mathcal{T}}(x) + \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\varphi(\tau,t)\,d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)$$

avec :

$$T_{10} = -\iint_{\Omega\times I\!R_+}|u_{\mathcal{T},k}(x,t)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt - \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \tag{5.33}$$

et

$$T_{20} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\top\kappa) - f(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\bot\kappa)\Big)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

$$(5.34) \qquad - \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

$$- \iint_{\partial\Omega^-\times I\!R_+} \Big(f(\gamma u_{\mathcal{T},k}(\tau,t)\top\kappa) - f(\gamma u_{\mathcal{T},k}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

où $\gamma u_{\mathcal{T},k}(\tau,t) = u_p^n$ si $\tau\in a$, $a\in\mathcal{A}_{ext}(p)$ $(p\in\mathcal{T})$ et $t\in[t^n,t^{n+1}[$ $(n\in I\!N)$.
Cela suffira pour conclure puisque d'après la définition de $\partial\Omega^-$ et la croissance de f :

$$(5.35) \quad - \iint_{\partial\Omega^-\times I\!R_+} \Big(f(\gamma u_{\mathcal{T},k}(\tau,t)\top\kappa) - f(\gamma u_{\mathcal{T},k}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \geq 0$$

Pour montrer ceci, on va comparer T_1 à T_{10} et T_2 à T_{20}, cette comparaison fera apparaître les termes de mesures introduits dans le lemme 5.3.

Comparaison de T_{10} ***et*** T_1

En utilisant la définition de $u_{\mathcal{T},k}$ et en intégrant en temps on a :

$$T_{10} = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^n-\kappa| \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \Big(\varphi(x,t^n)-\varphi(x,t^{n+1})\Big)\,dx\,dt - \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx$$

en reportant les différences sur $|u_{\mathcal{T},k}-\kappa|$, on peut encore écrire T_{10} sous la forme suivante :

$$T_{10} = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{|u_p^{n+1}-\kappa| - |u_p^n-\kappa|}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t^{n+1})\,dx\,dt$$
$$+ \int_\Omega \Big(|u_{\mathcal{T}}^0(x)-\kappa| - |u_0(x)-\kappa|\Big)\,\varphi(x,0)\,dx$$

où $u_{\mathcal{T}}^0(x) = u_p^0$ si $x\in p$ $(p\in\mathcal{T})$.
Comme la fonction $|.-\kappa|$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 1 et d'après la régularité de φ, on obtient :

$$|T_1 - T_{10}| \leq \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1}-u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p |\varphi_t(x,t)|\,dx\,dt + \int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0(x)-u_0(x)|\,\varphi(x,0)\,dx$$

Ce qui donne :

$$(5.36) \qquad |T_1 - T_{10}| \leq \iint_{\Omega\times I\!R_+} |\varphi_t(x,t)|\,d\nu_{\mathcal{T},k}^{(1)}(x,t) + \int_\Omega \varphi(x,0)\,d\mu_{\mathcal{T}}(x)$$

où les mesures $\nu_{\mathcal{T},k}^{(1)}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$ et $\mu_{\mathcal{T}}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ sont définies de la façon suivante :

$$(5.37) < \nu_{\mathcal{T},k}^{(1)},\psi > = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1}-u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p |\psi(x,t)|\,dx\,dt \qquad \forall\,\psi\in C_c(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$$

(5.38) $$< \mu_{\mathcal{T}}, \psi > = \int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, |\psi(x)|\, dx \qquad \forall\ \psi \in C_c(\overline{\Omega})$$

En utilisant l'estimation BV faible en temps (5.21) ainsi que (5.13), on obtient pour tout $T \in]0, +\infty[$:

$$\nu^{(1)}_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) \leq C\, h^{1/2}$$

où C ne dépend que de η, α_1, α, Ω, u_0, $\overline{u}$, T, f et de g.
De plus d'après (2.48) page 54, si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, on a :

$$\lim_{h\to 0} \mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) = \lim_{h\to 0} \int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx = 0$$

Montrons que si $u_0 \in L^\infty \cap BV(\Omega)$, alors :

$$\mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) = \int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx \leq C\, h$$

où C ne dépend que de u_0, α_1 et de Ω.

Commençons par supposer $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx &\leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{1}{m(p)} \int_p \int_p |u_0(x) - u_0(y)|\, dx\, dy \\ &\leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{h}{m(p)} \int_p \int_p \int_0^1 |\nabla u_0(\theta\, x + (1-\theta)\, y)|\ d\theta\, dy\, dx\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables :

$$x \mapsto z = x - y$$

et d'après (5.9), il vient :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx \leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{h}{m(p)} \int_p \int_0^1 \int_{B(0,h)} \mathbf{1}_p(y + \theta\, z)\ |\nabla u_0(y + \theta\, z)|\ dz\, d\theta\, dy$$

puisque pour tout $p \in \mathcal{T}$, p est convexe (voir remarque 5.2) et où l'on note $B(0,h)$ la boule de $I\!R^2$ de centre 0 et de rayon h, et où $\mathbf{1}_p$ est la fonction caractéristique de p.
En utilisant à nouveau un changement de variables :

$$y \mapsto x = y + \theta\, z$$

on a :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx \leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{h}{m(p)} \int_p \int_0^1 \int_{B(0,h)} |\nabla u_0(x)|\ dz\, d\theta\, dx$$

et donc :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\, dx \leq \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{h\, \pi\, h^2}{m(p)} \int_p |\nabla u_0(x)|\ dx$$

ainsi d'après (5.9) page 132 :

$$\int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0(x) - u_0(x)|\, dx \le C\, h \int_\Omega |\nabla u_0(x)|\; dx = C\, h\, |u_0|_{BV(\Omega)}$$

où C ne dépend que de α_1.
Supposons alors $u_0 \in L^\infty \cap BV(\Omega)$. Soit $\rho_2 \in C_c^\infty(I\!R^2)$ telle que :

1. $\mathrm{supp}(\rho_2) \subset \Big\{x \in I\!R^2\,;\, |x| \le 1\Big\}$
2. $\rho_2(x) \ge 0$ pour tout $x \in I\!R^2$
3. $\displaystyle\int_{I\!R^2} \rho_2(x)\, dx = 1$

On définit alors pour tout $j \in I\!N$, $\rho_{2,j}$ par $\rho_{2,j}(x) = n^d \rho_2(j\, x)$ pour tout $x \in I\!R^d$.
Soit $u_j = \tilde{u}_0 * \rho_{2,j}|_{\overline{\Omega}}$, où $\tilde{u}_0$ est le prolongement par 0 de u_0 à $I\!R^2$ tout entier.
Alors $u_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et

$$\lim_{j\to+\infty} \|u_j - u_0\|_{L^1(\Omega)} = 0 \tag{5.39}$$

de plus

$$|u_j|_{BV(\Omega)} \le |u_0|_{BV(\Omega)} \tag{5.40}$$

En effet, soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, I\!R_+)$ tel que $\|\varphi\|_\infty \le 1$ soit $i = 1$ ou 2, alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_j(x)\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx &= \int_\Omega \int_{I\!R^2} \tilde{u}_0(y)\, \rho_{2,j}(x-y)\, dy\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx \\ &= \int_\Omega u_0(y) \int_\Omega \rho_{2,j}(x-y)\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx\, dy\end{aligned}$$

Comme $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, I\!R_+)$, à partir d'un certain rang

$$supp\left(\rho_{2,j} * \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \subset \Omega$$

ainsi :

$$\int_\Omega u_j(x)\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega u_0(y) \frac{\partial(\rho_{2,j} * \varphi)(y)}{\partial x_i}\, dx$$

Mais :

$$|\rho_{2,j} * \varphi(y)| \le \|\varphi\|_\infty \int_{I\!R^2} \rho_{2,j}(x)\, dx = \|\varphi\|_\infty$$

donc :

$$\int_\Omega u_j(x)\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx \le \sup\Big\{\int_\Omega u_0(x)\, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\, dx\,;\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega, I\!R_+),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\Big\}$$

On a donc bien :

$$|u_j|_{BV(\Omega)} \le |u_0|_{BV(\Omega)}$$

Alors :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,dx \le \int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u^j_{\mathcal{T}}(x)|\,dx + \int_\Omega |u^j_{\mathcal{T}}(x) - u_j(x)|\,dx \\ + \int_\Omega |u_j(x) - u_0(x)|\,dx$$

où $u^j_{\mathcal{T}}(x) = \dfrac{1}{m(p)} \displaystyle\int_p u_j(y)\,dy$ si $x \in p$.

Or

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u^j_{\mathcal{T}}(x)|\,dx = \sum_{p\in\mathcal{T}} \int_p \left| \frac{1}{m(p)} \int_p \Big(u_j(y) - u_0(y)\Big)\,dy \right|\,dx \\ \le \sum_{p\in\mathcal{T}} \int_p \Big|u_j(y) - u_0(y)\Big|\,dy = \int_\Omega |u_j(y) - u_0(y)|\,dy$$

donc :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,dx \le 2\,\|u_j - u_0\|_{L^1(\Omega)} + C\,h\,|u_j|_{BV(\Omega)} \le 2\,\|u_j - u_0\|_{L^1(\Omega)} + C\,h\,|u_0|_{BV(\Omega)}$$

où C ne dépend que de α_1.

En passant à la limite sur j, on obtient le résultat cherché, c'est à dire :

$$\int_\Omega |u^0_{\mathcal{T}}(x) - u_0(x)|\,dx \le C\,h\,|u_0|_{BV(\Omega)}$$

où C ne dépend que de α_1.

Comparaison de T_{20} et T_2

Comme pour T_{10}, en utilisant la définition de $u_{\mathcal{T},k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{20} = \ & \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big(f(u^n_p \top \kappa) - f(u^n_p \perp \kappa)\Big) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\ & - \iint_{\partial\Omega^+ \times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \\ & + \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(f(u^n_p\top\kappa) - f(u^n_p\perp\kappa)\Big) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \Big(-g(\tau)\top 0\Big)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \end{aligned}$$

On multiplie (5.1) par $\varphi(x,t)$ et on intègre sur $p \in \mathcal{T}$ et sur $[t^n, t^{n+1}[$, $n \in I\!N$, on a :

$$\int_p \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta P(x)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0$$

d'après la formule de Green il vient :

$$-\int_p \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt + \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt = 0$$

donc :

$$T_{20} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big(f(u_p^n \top \kappa) - f(u_p^n \perp \kappa)\Big) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\,\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau)\,d\tau + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a \varphi(\tau,t)\,\Big(g(\tau)\top 0\Big)\,d\tau \right) dt - \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

Introduisons T_{20b} défini par :

$$T_{20b} = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big(f(u_p^n \top \kappa) - f(u_p^n \perp \kappa)\Big) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\sum_{q\in N(p)} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\,d\tau + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a \varphi(\tau,t)\,\Big(g(\tau)\top 0\Big)\,d\tau \right) dt - \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

on obtient alors :

$$|T_{20} - T_{20b}| = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big(f(u_p^n \top \kappa) - f(u_p^n \perp \kappa)\Big) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\, \left[\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\right] d\tau\,dt \right|$$

En remarquant que si φ ne dépend pas de q alors $|T_{20} - T_{20b}| = 0$ puisque d'après (2.20) page 25 et le schéma sur l'équation elliptique (5.11) :

$$\sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) = -\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_a g(\tau)\,d\tau = \sum_{q\in N(p)} \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} l(\sigma_{pq})$$

Ainsi, on peut écrire :

$$|T_{20} - T_{20b}| = \left| \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \Big(f(u_p^n \top \kappa) - f(u_p^n \perp \kappa)\Big) \times \right.$$
$$\left. \times \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{q\in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \left(\varphi(\tau,t) - \frac{1}{m(p)} \int_p \varphi(x,t)\,dx\right) \left[\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\right] d\tau\,dt \right|$$

Ce qui nous donne une autre partie de $\mu_{\mathcal{T},k}$ puisque :

$$|T_{20} - T_{20b}| \leq \iint_{\Omega\times I\!R_+} |\nabla\varphi(x,t)|\, d\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{5.41}$$

où la mesure $\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} < \nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}, \psi >= &\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \frac{h}{m(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}}\int_p\int_0^1 \Big|\psi(\theta\tau + (1-\theta)x\,,t)\Big| \\ &\times \left|\Big(f(u_p^n \top\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big)\left(\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q - P_p}{d_{pq}}\right)\right| d\theta\, dx\, d\tau\, dt \end{aligned} \tag{5.42}$$

pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$.

Montrons que pour tout $T \in]0+\infty[$:

$$\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq C\,h$$

où C ne dépend que de α_1, α, Ω, u_0, $\overline{u}$, T, f et de P.
En effet :

$$\begin{aligned}\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq h\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} k\int_{\sigma_{pq}}&\Big|\Big(f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big) \\ &\left(\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\right)\Big|\, d\tau\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq h\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} k\int_{\sigma_{pq}}&\Big|\Big[f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa) \\ &- \Big(f(u_q^n\top\kappa) - f(u_q^n\perp\kappa)\Big)\Big]\left(\nabla P(\tau).n_{pq}(\tau) - \frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\right)\Big|\, d\tau\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq \frac{M\,2\,U\,T}{\alpha}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,d_{pq}&\left(\frac{|e_q - e_p]}{d_{pq}}\right. \\ &\left.+\int_{\sigma_{pq}}\left|\nabla P(\tau).n_{pq} - \frac{P(x_q)-P(x_p)}{d_{pq}}\right| d\tau\right)\end{aligned}$$

En utilisant la régularité de P ainsi que l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned}\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq \frac{M\,2\,U\,T}{\alpha}&\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,d_{pq}\,C\,h\right. \\ &\left.+\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,d_{pq}\right)^{1/2}\left(\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,\frac{|e_q-e_p|^2}{d_{pq}}\right)^{1/2}\right)\end{aligned}$$

où C ne dépend que de P.

On conclut avec le théorème 2.1 page 23 et en remarquant que :

$$\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} l(\sigma_{pq})\,d_{pq} \leq 2\,m(\Omega)$$

Ainsi :

$$\nu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega}\times[0,T]) \leq C\,h$$

où C ne dépend que de f, $\overline{u}$, u_0, T, Ω, α, α_1 et de P

Il reste encore à traiter la différence entre T_{20b} et T_2, pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned}T_{20b} = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\Bigg[&\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big(f(u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\bot\kappa)\Big)\int_a\varphi(\tau,t)\,\Big(g(\tau)\top 0\Big)d\tau\,dt\\
&+\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}}\bigg(f(u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\bot\kappa)-\Big(f(u_q^n\top\kappa)-f(u_q^n\bot\kappa)\Big)\bigg)\frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}}\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\Bigg]\\
&-\iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa)-f(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}|T_{20b}-T_2| \leq &\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}}\Big|f(u_p^n)-f(u_q^n)\Big|\,\frac{P_q-P_p}{d_{pq}}\\
&\qquad\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}}\left|\varphi(\tau,t)-\frac{1}{m(p)}\int_p\varphi(x,t)\,dx\right|\,d\tau\,dt\\
&+\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big|f(u_p^n)-f(\overline{u}_a^n)\Big|\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a\Big(g(\tau)\top 0\Big)\left|\frac{1}{m(p)}\Big(\int_p\varphi(x,t)\,dx\Big)-\varphi(\tau,t)\right|d\tau\,dt\\
&+\iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\Big|f(\overline{u}(\tau,t))-f(\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t))\Big|\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\end{aligned}$$

où $\overline{u}_{\mathcal{T},k}\colon \partial\Omega^+\to I\!R$ est définie par $\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)=\overline{u}_a^n$ si $\tau\in a$ ($a\in\mathcal{A}_{ext}(p)$, $p\in\mathcal{T}$) et $t\in[t^n,t^{n+1}[$ ($n\in I\!N$).
Ainsi on a :

$$(5.43)\quad |T_{20}-T_2| \leq \iint_{\Omega\times I\!R_+}|\nabla\varphi(x,t)|\,d\nu^{(3)}_{\mathcal{T},k}(x,t)+\int_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\varphi(\tau,t)\,d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)$$

où les mesures $\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\in\mathcal{M}(\overline{\partial\Omega^+}\times I\!R_+)$ et $\nu^{(3)}_{\mathcal{T},k}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$ sont définies de la façon suivante :

$$(5.44)\quad <\overline{\mu}_{\mathcal{T},k},\psi>=\iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\Big|f(\overline{u}(\tau,t))-f(\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t))\Big|\,g(\tau)\;|\psi(\tau,t)|\;d\tau\,dt$$

pour tout $\psi \in C_c(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$, et :

$$< \nu^{(3)}_{\mathcal{T},k}, \psi >= \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ P_q>P_p}} \Big| f(u_p^n) - f(u_q^n) \Big| \; \frac{P_q - P_p}{d_{pq}} \; \frac{h}{m(p)} \times$$

$$\times \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \int_p \int_0^1 |\psi(\theta\tau + (1-\theta)x, t)| \, d\theta \, dx \, d\tau \, dt$$

$$+ \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big| f(u_p^n) - f(\overline{u}_a^n) \Big| \frac{h}{m(p)} \times$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \int_p \int_0^1 \Big(g(\tau) \top 0\Big) |\psi(\theta\tau + (1-\theta)x, t)| \, d\theta \, dx \, d\tau \, dt \tag{5.45}$$

pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$.

En utilisant l'estimation “BV faible” (5.20), on obtient pour tout $T \in]0, +\infty[$:

$$\nu^{(3)}_{\mathcal{T},k}(\overline{\Omega} \times [0, T]) \leq C \, h^{1/2}$$

où C ne dépend que de η, α_1, α, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f, P et de g.

De plus d'après la régularité de $\overline{u}$, on a :

$$\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\partial\Omega^+ \times [0, T]) \leq C \, h$$

où C ne dépend que de $\overline{u}$, $\partial\Omega$, g, T et de f.

On définit alors $\mu_{\mathcal{T},k} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$ par :

$$< \mu_{\mathcal{T},k}, \psi >= \sum_{i=1}^{3} < \nu^{(i)}_{\mathcal{T},k}, \psi >$$

pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, et d'après (5.30), (5.35), (5.36), (5.41) et (5.43) on obtient le résultat cherché (5.25).

5.5 Démonstration de l'estimation d'erreur du théorème 5.2

Dans ce paragraphe, on montre le théorème 5.2, pour cela on utilise le résultat suivant qui sera démontrer plus tard :

Lemme 5.5 *On note P la solution de (5.1) et (5.3) telle que $\int_\Omega P(x) \, dx = 0$. On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées et que $0 \in \Omega$, ce qui est toujours possible à un changement de repère près. Soit $a > 0$ tel que $B_2(0, a) \subset \Omega$ où $B_2(0, a)$ est la boule de $I\!R^2$ (pour la norme Euclidienne) de centre 0 et de rayon a.*

Soit $\tilde{u} \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *telle que* $-U \leq \tilde{u}(x,t) \leq U$ *p.p.* $(x,t) \in \Omega \times I\!R_+$. *On suppose qu'il existe* $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, $\mu_0 \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *et* $\overline{\mu} \in \mathcal{M}(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$ *telles que :*

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+} |\tilde{u}(x,t)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \\
&- \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f(\tilde{u}(x,t)\top\kappa) - f(\tilde{u}(x,t)\bot\kappa)\Big)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - f(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \\
&\geq -\iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla\varphi(x,t)|\Big)\,d\mu(x,t) \\
&\quad - \int_\Omega \varphi(x,0)\,d\mu_0(x) - \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \varphi(\tau,t)\,d\overline{\mu}(\tau,t)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ *et tout* $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.
Soit $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5), i.e. qui vérifie l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u(y,s)-\kappa|\,\varphi_s(y,s)\,dy\,ds + \int_\Omega |u_0(y)-\kappa|\,\varphi(y,0)\,dy \\
&- \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(f\big(u(y,s)\top\kappa\big) - f\big(u(y,s)\bot\kappa\big)\Big)\,\nabla P(y).\nabla\varphi(y,s)\,dy\,ds \\
&+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+} \Big(f\big(\overline{u}(\sigma,s)\top\kappa\big) - f\big(\overline{u}(\sigma,s)\bot\kappa\big)\Big)\,g(\sigma)\,\varphi(\sigma,s)\,d\sigma\,ds \geq 0
\end{aligned} \tag{5.47}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ *et tout* $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.
Alors, pour tout $T \in \,]0,+\infty[$, *il existe* C *ne dépendant que de* Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g *et de* W, *telle que :*

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega\times[0,T]} |\tilde{u}(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt \leq C\Big[&\mu_0(\overline{\Omega}) + \overline{\mu}\left(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]\right) + (r+1)\mu\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) \\
&+ \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r\,a}{r\,a+1}\right) + \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) + \mathcal{E}_0(r,\Omega)\Big]
\end{aligned}$$

pour tout $r \in I\!R_+$, *et où* $\mathcal{E}$ *ne dépend que de* Ω, r, T *et de* u, *de plus :*

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) = 0 \qquad \text{si } u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+) \\
&\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) \leq \frac{C}{r} \qquad \text{si } u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+) \cap BV(\Omega\times[0,T]) \;\; \forall\, T \in I\!R_+^\star
\end{aligned} \tag{5.48}$$

où C *ne dépend que de* Ω, T *et de* u.

De même, $\mathcal{E}_0$ ne dépend que de Ω, r et de u_0, de plus :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}_0(r,\Omega) = 0 \quad \text{si } u_0 \in L^\infty(\Omega)$$

(5.49)

$$\mathcal{E}_0(r,\Omega) \le \frac{C}{r} \quad \text{si } u_0 \in L^\infty \cap BV(\Omega)$$

où C ne dépend que de Ω et de u_0.

Démonstration du théorème 5.2 :

On peut alors terminer la démonstration du théorème 5.2. D'après les lemmes 5.3 et 5.5 on a :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)|\, dx\, dt \le C\Big[\mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) + \overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\left(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]\right) + (r+1)\mu_{\mathcal{T},k}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) + \frac{1}{r}\left(1+\frac{r\,a}{r\,a+1}\right)\Big]$$

où C ne dépend que de Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g et de W.

En choisissant $r = \sqrt{\mu_{\mathcal{T},k}\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)}$, et d'après les propriétés de $\mu_{\mathcal{T},k}$, de $\mu_{\mathcal{T}}$ et de $\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}$ (voir lemme 5.3), on a :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)|\, dx\, dt \le C\, h^{1/4}$$

où C ne dépend que de Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g et de W.

Démonstration du lemme 5.5 :

Pour montrer ceci on utilise l'inégalité suivante que l'on démontrera par la suite :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |\tilde{u}(x,t) - u(x,t)|\,\psi'(t) dx\, dt \ge C\Big[\mu_0(\overline{\Omega}) + \overline{\mu}\left(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]\right) + (r+1)\mu\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) + \frac{1}{r}\left(1+\frac{r\,a}{r\,a+1}\right) + \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) + \mathcal{E}_0(r,\Omega)\Big] \tag{5.50}$$

pour tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$, dont le support est inclus dans $[0,T]$, où C ne dépend que de ψ, a, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g et de W et où $\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega)$ vérifie (5.48) et $\mathcal{E}_0(r,\Omega)$ vérifie (5.49).

On choisit alors comme fonction test dans l'inégalité précédente la fonction $\psi \in C_c(I\!R_+, I\!R_+)$, dérivable par morceaux (que l'on peut régulariser) définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{T-t}{T} & \text{si } t \in [0,T] \\ 0 & \text{si } T \ge T \end{cases}$$

on obtient :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |\tilde{u}(x,t)-u(x,t)|\,dx\,dt \le C\Big[\mu_0(\overline{\Omega})+\overline{\mu}\left(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]\right)$$
$$+(r+1)\mu\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)+\frac{1}{r}\left(1+\frac{r\,a}{r\,a+1}\right)+\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega)+\mathcal{E}_0(r,\Omega)\Big]$$

où C ne dépend que de ψ, a, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g et de W.

Démonstration de l'inégalité (5.50) :

On va démontrer cette inégalité en utilisant une technique introduite par Kruzkov dans [26].
Soit donc $\rho_2 \in C_c^\infty(I\!R^2)$ telle que :

1. $\mathrm{supp}(\rho_2) \subset \left\{x \in I\!R^2\,;\,|x|\le 1\right\}$
2. $\rho_2(x) \ge 0$ pour tout $x \in I\!R^2$
3. $\displaystyle\int_{I\!R^2} \rho_2(x)\,dx = 1$

et soit $\overline{\rho}_1 \in C_c^\infty(I\!R_-^*)$ vérifiant les propriétés 1, 2 et 3 précédentes.
On définit alors pour tout $r \in I\!R$, $r>0$, $\rho_{2,r}(x) = r^2\,\rho_2(r\,x)$ pour tout $x \in I\!R^2$ et de la même façon on définit $\overline{\rho}_{1,r}(x) = r\,\overline{\rho}_1(r\,x)$ pour tout $x \in I\!R$.
Soit $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$, dont le support est inclus dans $[0,T]$. On pose alors :

$$\varphi(x,t,y,s) = \psi(t)\,\rho_{2,r}\left(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\right)\overline{\rho}_{1,r}(t-s)$$

Remarquons que, comme Ω est convexe, le décentrement de x en $(1-1/r\,a)$, permet d'annuler la fonction φ lorsque y est sur le bord de Ω et x dans Ω, cela permettra d'éliminer certains termes dans (5.51). De même le décentrement du support (déja utilisé dans [15]) de $\overline{\rho}_{1,r}$ permet d'annuler φ lorsque $s=0$ et $t\ge 0$.
On choisit comme fonction test $\varphi(.,.,y,s)$ dans (5.46), on fixe $\kappa = u(y,s)$ et on intègre par rapport à y et s sur $\Omega\times I\!R_+$, de même dans (5.47) on choisit comme fonction test $\varphi(x,t,.,.)$, on fixe $\kappa=\tilde{u}(x,t)$ et on intègre par rapport à x et t sur $\Omega\times I\!R_+$, on ajoute alors ces deux inéquations, on obtient :

$$E_{1r}+E_{2r}+E_{3r}+E_{4r}+E_{5r} \ge E_{6r} \tag{5.51}$$

avec :

$$E_{1r} = \iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} |\tilde{u}(x,t)-u(y,s)|\,\psi'(t)\,\rho_{2,r}\left(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\right)\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds$$

$$E_{2r} = \int_{(\Omega)^2\times I\!R_+} |u_0(x)-u(y,s)|\,\psi(0)\,\rho_{2,r}\left(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\right)\overline{\rho}_{1,r}(-s)\,dx\,dy\,ds$$

$$E_{3r} = \iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} \Big(f\Big(u(y,s)\top\tilde{u}(x,t)\Big) - f\Big(u(y,s)\perp\tilde{u}(x,t)\Big)\Big)\times$$
$$\Big(\nabla P(y) - \nabla P(x)\Big).\nabla\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \psi(t)\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds$$

$$E_{4r} = \iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} \Big(f\Big(u(y,s)\top\tilde{u}(x,t)\Big) - f\Big(u(y,s)\perp\tilde{u}(x,t)\Big)\Big)\times$$
$$\frac{1}{r\,a}\,\nabla P(x).\nabla\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \psi(t)\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds$$

$$E_{5r} = \iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times(I\!R_+)^2} \Big(f\Big(\overline{u}(\tau,t)\top u(y,s)\Big) - f\Big(\overline{u}(\tau,t)\perp u(y,s)\Big)\Big)$$
$$g(\tau)\,\psi(t)\,\rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,d\tau\,dt\,dy\,ds$$

et

$$E_{6r} = E_{6ra} + E_{6rb} + E_{6rc} + E_{6rd} + E_{6re}$$

avec :

$$E_{6ra} = -\iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} \rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \Big|\psi'(t)\Big|\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,d\mu(x,t)\,dy\,ds$$

$$E_{6rb} = -\iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} \rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \psi(t)\,\Big|\overline{\rho}_{1,r}'(t-s)\Big|\,d\mu(x,t)\,dy\,ds$$

$$E_{6rc} = -\iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2} \left|1-\frac{1}{r\,a}\right|\ \left|\nabla\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\right|\psi(t)\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,d\mu(x,t)\,dy\,ds$$

$$E_{6rd} = -\iint_{(\Omega)^2\times I\!R_+} \psi(0)\,\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \overline{\rho}_{1,r}(-s)\,d\mu_0(x)$$

$$E_{6re} = -\iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times(I\!R_+)^2} \psi(t)\,\rho_{2,r}\,\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\ \overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,d\overline{\mu}(\tau,t)$$

Afin d'établir l'inégalité (5.50), on commence par minorer E_{6r}.

Minoration de E_{6r}

Remarquons tout d'abord que E_{6ra} vérifie :

$$-E_{6ra} \leq \|\psi'\|_\infty \int_{[0,T]\times\Omega} \int_{I\!R^2\times I\!R_+} \rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,dy\,ds\,d\mu(x,t)$$

On effectue alors le changement de variables suivant :

$$y \longmapsto z = r\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big) \qquad \text{et} \qquad s \longmapsto \theta = r\,(t-s) \tag{5.52}$$

on obtient :

$$-E_{6ra} \leq \|\psi'\|_\infty \int_{[0,T]\times\Omega} \int_{I\!R^2\times I\!R_-} \rho_2(z)\overline{\rho}_1(\theta)\,dz\,d\theta\,d\mu(x,t) = \|\psi'\|_\infty\,\mu([0,T]\times\overline{\Omega})$$

Traitons maintenant le terme suivant :

$$\begin{aligned} -E_{6rb} &\leq \|\psi\|_\infty \int_{[0,T]\times\Omega} \int_{I\!R^2\times I\!R_-} \rho_2(y)\,r\,\Big|\overline{\rho}_1'(s)\Big|\,dy\,ds\,d\mu(x,t) \\ &\leq r\,\|\psi\|_\infty\,\|\overline{\rho}_1'\|_\infty\,\mu([0,T]\times\overline{\Omega}) \end{aligned}$$

De la même façon, on montrerait que :

$$-E_{6rc} \leq \Big(r+1\Big)\left(1+\frac{1}{a}\right)\|\psi\|_\infty\,M_\rho\,m(B_2(0,1))\,\mu([0,T]\times\overline{\Omega})$$

en notant $M_\rho = \sup_{x\in B_2(0,1)} |\nabla\rho_2(x)|$ et où $B_2(0,1)$ est la boule unité de dimension 2.
De plus

$$-E_{6rd} \leq \psi(0)\,\mu_0(\overline{\Omega}) \qquad \text{et} \qquad -E_{6re} \leq \|\psi\|_\infty\,\overline{\mu}(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T])$$

Et donc en regroupant les résultats obtenus, on obtient :

$$E_{6r} \geq -C\,\Big(\mu_0(\overline{\Omega}) + \overline{\mu}(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]) + (r+1)\,\mu(\overline{\Omega}\times[0,T])\Big)$$

où C ne dépend que de ψ, a, ρ_2 et de $\overline{\rho}_1$.

Il reste alors à majorer les termes situés à gauche de l'inégalité (5.51).

Majoration de E_{1r}

On va montrer que la différence entre E_{1r} et E_1 tend vers 0 lorsque $r \to +\infty$ si $u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ et est de l'ordre de $1/r$ si $u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)\cap BV(\Omega\times[0,T])$ pour tout $T \in I\!R_+^\star$, où E_1 est défini par :

$$E_1 = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big|\tilde{u}(x,t)-u(x,t)\Big|\,\psi'(t)dx\,dt$$

Remarquons que, d'après la définition de ρ_2 et celle de $\overline{\rho}_1$, E_1 s'écrit encore sous la forme suivante :

$$E_1 = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \iint_{I\!R^2\times I\!R_-} |\tilde{u}(x,t) - u(x,t)|\, \psi'(t)\, \rho_2(y)\, \overline{\rho}_1(s)\, dx\, dt\, dy\, ds$$

De plus en effectuant le changement de variables (5.52), on obtient :

$$E_{1r} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \iint_{I\!R^2\times I\!R_-} \left|\tilde{u}(x,t) - u\Big(x - \frac{z + x/a}{r}, t - \frac{\theta}{r}\Big)\right| \psi'(t) \\ \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}\left(x - \frac{z+x/a}{r}\right)\, \rho_2(z)\, \overline{\rho}_1(\theta)\, dz\, d\theta\, dx\, dt$$

Introduisons alors E_{1rb} défini par :

$$E_{1rb} = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \iint_{I\!R^2\times I\!R_-} \Big|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)\Big|\, \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}\left(x - \frac{y+x/a}{r}\right) \\ \psi'(t)\rho_2(y)\, \overline{\rho}_1(s)\, dy\, ds\, dx\, dt$$

Alors :

$$|E_{1rb} - E_1| \le \iint_{(I\!R^2)^2\times I\!R_+\times I\!R_-} \Big|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)\Big|\, |\psi'(t)|\, \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}(x) \\ \left|\mathbf{1}_{\overline{\Omega}}(x) - \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}\left(x - \frac{y+x/a}{r}\right)\right| \rho_2(y)\, \overline{\rho}_1(s)\, dy\, ds\, dx\, dt$$

et donc :

$$|E_{1rb} - E_1| \le 2\,U\, \|\psi'\|_\infty\, T \int \mathbf{1}_{\Omega_{1/r}}(x)\, dx$$

où $\Omega_{1/r} = \left\{ x \in \Omega\, ;\, d(x, \partial\Omega) \le \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right\}$.

Ainsi :

$$|E_{1rb} - E_1| \le \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que Ω, T, a, u_0, $\overline{u}$, u et de ψ.

De plus :

$$|E_{1rb} - E_{1r}| \le \|\psi'\|_\infty \iint_{I\!R^2\times I\!R_-} \iint_{\Omega\times I\!R_+} \rho_2(y)\, \overline{\rho}_1(s)\, \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}\left(x - \frac{y+x/a}{r}\right) \\ \left|u(x,t) - u\left(x - \frac{y+x/a}{r}, t - \frac{s}{r}\right)\right|\, dx\, dt\, dy\, ds$$

et donc :

$$|E_{1rb} - E_{1r}| \le \|\psi'\|_\infty\, \mathcal{E}(r, [0,T]\times\Omega)$$

où

$$\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) = \sup\Big\{ \iint_{[0,T]\times\Omega} \Big| u(x,t) - u(x+\eta,t+\tau) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{\Omega}}(x+\eta) \; dx\, dt \, ;$$

$$\eta \in I\!R^2, \; |\eta| \leq \frac{1+\delta(\Omega)/a}{r} \text{ et } \tau \in I\!R, \; 0 \leq \tau \leq \frac{1}{r} \Big\} \tag{5.53}$$

On montre alors le lemme suivant :

Lemme 5.6 *Soit $K \subset I\!R^N$, $N \geq 1$, K borné et convexe. Soit $g \in L^\infty(K)$, on définit :*

$$\mathcal{E}(r,K) = \sup\Big\{ \iint_K \Big| g(y) - g(y+\eta) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; dy \, ; \, \eta \in I\!R^N, \; |\eta| \leq \frac{\beta}{r} \Big\}$$

où β ne dépend que de K et $r \in I\!R_+$.

Alors :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}(r,K) = 0$$

Si de plus $g \in L^\infty(K) \cap BV(K)$ alors :

$$\mathcal{E}(r,K) \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de g et de K.

Démonstration du lemme 5.6

On suppose tout d'abord $g \in C^\infty(\overline{K})$, alors :

$$\int_K \Big| g(y) - g(y+\eta) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; dy \leq \int_K \int_0^1 \Big| \nabla g(x+\theta\,\eta) \Big| \, |\eta| \; \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; d\theta \, dy$$

On effectue le changement de variables $x \mapsto z = x + \theta\,\eta$, comme K est convexe $z = \theta\,(x+\eta) + (1-\theta)\,x \in K$, donc :

$$\int_K \Big| g(y) - g(y+\eta) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; dy \leq \int_0^1 \int_K |\nabla g(z)| \, |\eta| \, dz \, d\theta = |\eta| \, |g|_{BV(K)}$$

Donc :

$$\mathcal{E}(r,K) \leq \frac{\beta}{r} \, |g|_{BV(K)}$$

Si $g \in L^\infty(K)$ comme K est borné, $g \in L^1(K)$ donc d'après la densité des fonctions $C_c^\infty(K)$ dans $L^1(K)$, il existe $(g_n)_{n\in I\!N} \subset C_c^\infty(K)$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_{L^1(K)} = 0$$

Ainsi :

$$\int_K \Big| g(y) - g(y+\eta) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; dy \leq 2\,\|g_n - g\|_{L^1(K)} + \int_K \Big| g_n(y) - g_n(y+\eta) \Big| \, \mathbf{1}_{\overline{K}}(y+\eta) \; dy$$

et donc :

$$\mathcal{E}(r,K) \leq 2\,\|g_n - g\|_{L^1(K)} + \frac{\beta}{r}\,|g_n|_{BV(K)}$$

en passant à la limite sur r puis sur n, il vient :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}(r,K) = 0$$

Supposons alors $g \in L^\infty \cap BV(K)$, alors, comme pour (5.39) et (5.40), on montre qu'il existe $(g_n)_{n\in I\!N} \subset C^\infty(\overline{K})$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|g - g_n\|_{L^1(K)} = 0$$

et

$$\|g_n\|_{BV(K)} \leq \|g\|_{BV(K)}$$

pour tout $n \in I\!N$.
Alors de la même façon que précédemment il vient :

$$\mathcal{E}(r,K) \leq 2\,\|g_n - g\|_{L^1(K)} + \frac{\beta}{r}\,|g_n|_{BV(K)} \leq 2\,\|g_n - g\|_{L^1(K)} + \frac{\beta}{r}\,|g|_{BV(K)}$$

En passant à la limite sur n, on obtient :

$$\mathcal{E}(r,K) \leq \frac{\beta}{r}\,|g|_{BV(K)}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 5.6.
Remarquons alors que :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) \leq \sup\Big\{ \iint_{]0,T[\times\Omega} \Big| u(x,t) - u(x+\eta,t+\tau)\Big|\,\mathbf{1}_{\overline{\Omega}}(x+\eta)\,\mathbf{1}_{[0,T]}(t+\tau)\,dx\,dt\,;\\ \eta \in I\!R^2,\ |\eta| \leq \frac{1+\delta(\Omega)/a}{r} \text{ et } \tau \in I\!R,\ |\tau| \leq \frac{1}{r}\Big\}\end{aligned}$$

donc d'après le lemme 5.6, si $u \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)\cap BV(\Omega\times[0,T])$ pour tout $T \in]0,+\infty[$, on peut montrer que

$$\mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de u, Ω, α_1, et de a, et si $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) = 0$$

Majoration de E_{2r}

Soit $\varphi(x,y,s) = \psi(0)\,\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\dfrac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\displaystyle\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta$, alors on choisit comme fonction test dans (5.47) $\varphi(x,.,.)$, on fixe $\kappa = u_0(x)$ et on intègre par rapport à x sur Ω, on obtient :

$$-E_{2r} + E_{21r} + E_{22r} \geq 0$$

avec :

$$E_{21r} = \iint_{(\Omega)^2\times I\!R_+} |u_0(y)-u_0(x)|\,\psi(0)\,\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\,dy\,dx$$

$$E_{22r} = \iint_{(\Omega)^2\times I\!R_+}\Big(f\big(u(y,s)\top u_0(x)\big)-f\big(u(y,s)\bot u_0(x)\big)\Big)\times$$
$$\nabla P(y).\nabla\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,\psi(0)\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\,dy\,ds\,dx$$

En utilisant le changement de variables (5.52), on montre que :

$$E_{21r} \leq \psi(0)\,\mathcal{E}_0(r,\Omega)$$

où

$$\mathcal{E}_0(r,\Omega) = \sup\Big\{\int_\Omega\Big|u_0(x)-u_0(x+\eta)\Big|\,\mathbf{1}_{\overline{\Omega}}(x+\eta)\;dx\,;\,\eta\in I\!R^2,\;|\eta|\leq\frac{1+\delta(\Omega)/a}{r}\Big\} \tag{5.54}$$

En utilisant le lemme 5.6, si $u_0\in L^\infty\cap BV(\Omega)$, on a

$$\mathcal{E}_0(r,\Omega) \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de u_0 et de α_1, et si $u_0\in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{r\to\infty}\mathcal{E}_0(r,\Omega) = 0$$

Pour majorer E_{22r}, on introduit E_{22rb} défini par :

$$E_{22rb} = \iint_{(\Omega)^2\times I\!R_+}\Big(f\big(u(y,s)\top u_0(y)\big)-f\big(u(y,s)\bot u_0(y)\big)\Big)\times$$
$$\nabla P(y).\nabla\rho_{2,r}\Big(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,\psi(0)\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\,dy\,ds\,dx$$

et en intégrant par parties, on obtient :

$$E_{22rb} = \left(\frac{r\,a}{r\,a-1}\right)\iint_{\Omega\times I\!R_+}\Big(f\big(u(y,s)\top u_0(y)\big)-f\big(u(y,s)\bot u_0(y)\big)\Big)\times$$
$$\psi(0)\left(\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\right)\int_{\partial\Omega}\nabla P(y).n(\sigma)\,\rho_{2,r}\Big(\sigma\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,d\sigma\,dy\,ds$$

On a donc :

$$|E_{22rb}| \leq 2\,M\,U\,\psi(0)\,M_P\,\frac{r\,a}{r\,a-1}\int_{\partial\Omega}\int_{I\!R^2}\rho_{2,r}\Big(\sigma\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\Big)\,dy\,d\sigma\times$$
$$\times\int_{I\!R_+}\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\,ds$$

où $M_P = \sup_{x\in\overline{\Omega}}\Big|\nabla P(x)\Big|$.
Or :

$$\int_{I\!R_+}\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\theta)\,d\theta\,ds \leq \frac{1}{r} \tag{5.55}$$

car le support de l'intégration est de l'ordre de $1/r$. Ainsi :

$$E_{22rb} \leq 2\,M\,U\,\psi(0)\,M_P\,m(\partial\Omega)\;\frac{r\,a}{r\,(r\,a-1)}$$

De plus :

$$|E_{22r}-E_{22rb}| \leq M\,\psi(0)\,M_P\,\left(\int_{I\!R_+}\int_s^{+\infty}\overline{\rho}_{1,r}(-\tau)\,d\tau\,ds\right)$$
$$r\iint_{I\!R^2\times\Omega}\left|u_0(x)-u_0\left(x-\frac{y+x/a}{r}\right)\right|\,|\nabla\rho_2(y)|\,dx\,dy$$

et donc :

$$|E_{22r}-E_{22rb}| \leq M\,\psi(0)\,M_P\,M_\rho\,m\Big(B_2(0,1)\Big)\,\mathcal{E}_0(r,\Omega)$$

Ainsi en regroupant les résultats on obtient

$$E_{2r} \leq \frac{C}{r}\left(1+\frac{r\,a}{r\,a-1}\right)+C\,\mathcal{E}_0(r,\Omega)$$

où C ne dépend que de ψ, a, f, P, ρ_2, $\overline{u}$,u_0, u, α_1 et de Ω.

Majoration de E_{3r}

Introduisons E_{3rb} défini par :

$$E_{3rb} = \iint_{(\Omega\times I\!R_+)^2}\Big(f\Big(u(x,t)\top\tilde{u}(x,t)\Big)-f\Big(u(x,t)\perp\tilde{u}(x,t)\Big)\Big)\times$$
$$\Big(\nabla P(y)-\nabla P(x)\Big).\nabla\rho_{2,r}\left(x\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y\right)\;\psi(t)\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,dx\,dt\,dy\,ds$$

Puisque $P\in C^2(\overline{\Omega})$ et que $\Delta P\equiv 0$ sur Ω, d'après la formule de Green, il vient :

$$E_{3rb}=0$$

De plus :

$$|E_{3r}-E_{3rb}| \leq M\,\|\psi\|_\infty\,C_P\,\frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\times$$
$$\times\int_{I\!R^2\times I\!R_-}\int_{\Omega\times[0,T]}\left|u(x,t)-u\left(x-\frac{y+x/a}{r},t-\frac{s}{r}\right)\right|r\;|\nabla\rho_2(y)|\;\overline{\rho}_1(s)\,dx\,dt\,dy\,ds$$

et donc :

$$|E_{3r} - E_{3rb}| \leq M \, \|\psi\|_\infty \, C_P \, \left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right) \, \mathcal{E}(r, \Omega \times [0,T]) \, M_\rho \, m(B_2(0,1))$$

où $B_2(0,1)$ est la boule unité de dimension 2 et où $\mathcal{E}(r, \Omega \times [0,T])$ est défini par (5.53). Ainsi

$$E_{3r} \leq C \, \mathcal{E}(r, \Omega \times [0,T])$$

où C ne dépend que de f, $\overline{u}$, u_0, ψ, P, Ω, a, α_1, T et de ρ_2.

Majoration de E_{4r}

On procède comme pour l'étape précédente et on montre alors :

$$E_{4r} \leq M \, \|\psi\|_\infty \, \frac{1}{a} \, \mathcal{E}(r, \Omega \times [0,T]) \, M_\rho \, m(B_2(0,1))$$

Majoration de E_{5r}

On choisit dans (5.47) la fonction test suivante :

$$\varphi(\tau, t, y, s) = \psi(t) \, \overline{\rho}_{1,r}(t-s) \, g(\tau) \int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau \left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau) \, \gamma\Big) \, d\gamma$$

on fixe $\kappa = \overline{u}(\tau, t)$ et on intègre sur $\partial\Omega^+ \times I\!R_+$, on obtient :

$$E_{51r} + E_{52r} + E_{53r} \geq 0 \tag{5.56}$$

avec :

$$E_{51r} = -\iint_{\partial\Omega^+ \times \Omega \times (I\!R_+)^2} |u(y,s) - \overline{u}(\tau,t)| \, \overline{\rho}_{1,r}'(t-s) \, \psi(t) \, g(\tau) \int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau \left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau) \, \gamma\Big) \, d\gamma \, dy \, ds \, d\tau \, dt$$

$$E_{52r} = \iint_{\partial\Omega^+ \times \Omega \times (I\!R_+)^2} \Big(f\big(u(y,s) \top \overline{u}(\tau,t)\big) - f\big(u(y,s) \perp \overline{u}(\tau,t)\big)\Big) \, \overline{\rho}_{1,r}(t-s) \, g(\tau) \int_0^{+\infty} \nabla P(y) . \nabla \rho_{2,r}\Big(\tau \left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau) \, \gamma\Big) \, d\gamma \, \psi(t) \, dy \, ds \, d\tau \, dt$$

et :

$$E_{53r} = \iint_{\partial\Omega^{+2} \times (I\!R_+)^2} \Big(f\big(\overline{u}(\sigma,s) \top \overline{u}(\tau,t)\big) - f\big(\overline{u}(\sigma,s) \perp \overline{u}(\tau,t)\big)\Big) \, \overline{\rho}_{1,r}(t-s) \, g(\sigma) \, g(\tau) \psi(t) \int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\left(\tau \left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - \sigma + \nabla P(\tau) \, \gamma\right) \, d\gamma \, d\sigma \, ds \, d\tau \, dt$$

Commençons par majorer E_{51r}, pour cela introduisons E_{51rb}, défini par :

$$E_{51rb} = -\iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times(I\!R_+)^2} |u(y,s) - \overline{u}(\tau,s)|\, \overline{\rho}_{1,r}'(t-s)\,\psi(t)\,g(\tau) \int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big)\, d\gamma\, dy\, ds\, d\tau\, dt$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned}E_{51rb} = &\iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times(I\!R_+)^2} |u(y,s) - \overline{u}(\tau,s)|\, \overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,\psi'(t)\,g(\tau) \\ &\int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big)\, d\gamma\, dy\, ds\, d\tau\, dt \\ &- \iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times I\!R_+} |u(y,s) - \overline{u}(\tau,s)|\, \overline{\rho}_{1,r}(-s)\,\psi(0)\,g(\tau) \\ &\int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big)\, d\gamma\, dy\, ds\, d\tau\end{aligned}$$

et donc :

$$\Big|E_{51rb}\Big| \leq \Big(\|\psi'\|_\infty\,T + \psi(0)\Big)\,2\,U \int_{\partial\Omega^+} g(\tau) \int_\Omega \int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big)\, d\gamma\, dy\, d\tau$$

Remarquons alors que puisque Ω est convexe $(\tau - y).n(\tau) \geq 0$ et donc d'après la définition de $\rho_{2,r}$, on a :

$$\begin{aligned}g(\tau)\,\gamma = \nabla P(\tau).n(\tau)\,\gamma &\leq (\tau - y).n(\tau) + \nabla P(\tau).n(\tau)\,\gamma - \frac{\tau.n(\tau)}{r\,a} + \frac{\tau.n(\tau)}{r\,a} \\ &= \Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big).n(\tau) + \frac{\tau.n(\tau)}{r\,a} \leq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\end{aligned}$$

Notons que bien que l'hypothèse Ω convexe ne soit probablement pas nécessaire, elle est techniquement très utilisée ici. Ainsi

$$\gamma \leq \frac{1}{r\,g(\tau)}\left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right) \tag{5.57}$$

De plus en effectuant le changement de variables suivant :

$$y \longmapsto z = r\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\Big) \tag{5.58}$$

on obtient :

$$\Big|E_{51rb}\Big| \leq \Big(\|\psi'\|_\infty\,T + \psi(0)\Big)\,2\,U \int_{\partial\Omega^+} g(\tau) \int_0^{\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\frac{1}{(g(\tau)\,r)}} \int_{I\!R^2} \rho_2(z)\, dz\, d\gamma\, d\tau$$

Ainsi :

$$\Big|E_{51rb}\Big| \leq \left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\,\Big(\|\psi'\|_\infty\,T + \psi(0)\Big)\,2\,U\,m(\partial\Omega^+)\,\frac{1}{r}$$

Il reste à borner la différence entre E_{51rb} et E_{51r} :

$$\Big|E_{51rb} - E_{51r}\Big| \leq \iint_{\partial\Omega^+ \times \Omega \times (I\!R_+)^2} |\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,s)|\ \psi(t)\, |\overline{\rho}'_{1,r}(t-s)|\, g(\tau)$$
$$\int_0^{+\infty} \rho_{2,r}\left(\tau\left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\right)\, d\gamma\, dy\, ds\, d\tau\, dt$$

en utilisant le changement de variables (5.58), on obtient :

$$\Big|E_{51rb} - E_{51r}\Big| \leq \iint_{\partial\Omega^+ \times I\!R^2 \times I\!R_+ \times I\!R_-} \left|\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}\left(\tau, t - \frac{s}{r}\right)\right|\ \psi(t)\, |\overline{\rho}_1{}'(s)|\, g(\tau)$$
$$\int_0^{+\infty} \rho_2\,(z)\ d\gamma\, dz\, ds\, d\tau\, dt$$

et donc de la même façon que précédemment :

$$\Big|E_{51rb} - E_{51r}\Big| \leq \left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\ \overline{\mathcal{E}}_t([0,T] \times \partial\Omega^+, r)\, \|\psi\|_\infty\, \|\overline{\rho}'_1\|_\infty$$

où :

$$\overline{\mathcal{E}}_t([0,T] \times \partial\Omega^+, r) = \sup\left\{\iint_{[0,T]\times\partial\Omega^+} |\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}(\tau,t+\theta)|\ d\tau\, dt\,;\ \theta \in I\!R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{1}{r}\right\}$$

Comme $\overline{u} \in C^1(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$ alors

$$\overline{\mathcal{E}}_t([0,T] \times \partial\Omega^+, r) \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de $\overline{u}$, Ω et de T.
Ainsi

$$E_{51r} \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de a, Ω, T, ψ,u et de $\overline{u}$.

Traitons maintenant le terme E_{53r} ; d'après (5.57), on a :

$$|E_{53r}| \leq M\, \|\psi\|_\infty\, \|g\|_\infty \iint_{(\partial\Omega^{+2} \times I\!R_+ \times [0,T]} \Big|\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}(\sigma,s)\Big|\,\overline{\rho}_{1,r}(t-s)$$
$$g(\tau)\int_0^{\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\frac{1}{(g(\tau)\,r)}} \rho_{2,r}\left(\tau\left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - \sigma + \nabla P(\tau)\,\gamma\right)\, d\gamma\, d\sigma\, ds\, d\tau\, dt$$

D'après la définition de $\rho_{2,r}$ ainsi que (5.57) :

$$|\tau - \sigma| \leq \left|\tau\,\left(1 - \frac{1}{r\,a}\right) - \tau + \nabla P(\tau)\,\gamma\right| + \frac{1}{r\,a}\,|\tau| + \gamma\,|\nabla P(\tau)|$$
$$\leq \frac{1}{r}\,\left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a} + \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla P(x)|}{g(\tau)}\left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$

comme $\overline{u}$ est $C^1(\overline{\partial\Omega^+} \times I\!R_+)$, on a :

$$|E_{53r}| \leq M\,\|\psi\|_\infty\,\|g\|_\infty^2\,T\,C_{\overline{u}}\,\frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}+\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{\|g\|_\infty}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$

$$\iint_{\partial\Omega^+\times\partial\Omega^+}\int_0^{\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\frac{1}{(g(\tau)\,r)}}\rho_{2,r}\Big(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-\sigma+\nabla P(\tau)\,\gamma\Big)\,d\gamma\,d\sigma\,d\tau \tag{5.59}$$

où $C_{\overline{u}}$ ne dépend que des dérivées premières de $\overline{u}$.
Supposons que $\partial\Omega^+$ ait l composantes connexes $(\partial\Omega_j^+)_{1\leq j\leq l}$. On effectue alors le changement de variables suivant dans (5.59) sur chaque composante :

$$(\sigma,\gamma)\overset{\varphi}{\longmapsto} z=\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-\sigma+\nabla P(\tau)\,\gamma$$

On obtient alors :

$$|E_{53r}| \leq M\,\|\psi\|_\infty\,\|g\|_\infty^2\,T\,C_{\overline{u}}\,\frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}+\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{\|g\|_\infty}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$
$$\sum_{j=1}^{l}\iint_{\partial\Omega_j^+\times\varphi\left(\partial\Omega_j^+\times\left[0,\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\frac{1}{(g(\tau)\,r)}\right]\right)}\frac{1}{\nabla P(\tau).n(\sigma(z))}\rho_{2,r}(z)\,dz\,d\tau$$

Comme chaque composante connexe de $\partial\Omega^+$ est un segment, on a alors pour tout $1\leq j\leq l$, $n(\sigma)=n(\tau)$ pour tous σ et τ dans $\partial\Omega_j^+$, et donc :

$$|E_{53r}| \leq M\,\|\psi\|_\infty\,\|g\|_\infty^2\,T\,C_{\overline{u}}\,\frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}+\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{\|g\|_\infty}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$
$$\int_{\partial\Omega^+}\frac{1}{g(\tau)}\,d\tau\times\int_{I\!R^2}\rho_{2,r}(z)\,dz$$

ainsi d'après (5.6) :

$$|E_{53r}|\leq\frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de f, ψ, g, T, $\overline{u}$, Ω, a, P et de W.

On montre alors que E_{52r} est "proche" de $-E_{5r}$. Pour cela commençons par remarquer que :

$$-\int_0^{+\infty}\nabla P(\tau).\nabla\rho_{2,r}\left(\tau\,\left(1-\frac{1}{r\,a}+\nabla P(\tau)\,\gamma\right)-y\right)\,d\gamma=\rho_{2,r}\left(\tau\,\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)\right)$$

et donc :

$$|E_{52r}+E_{5r}|\leq\Bigg|\iint_{\partial\Omega^+\times\Omega\times(I\!R_+)^2}\Big(f\big(u(y,s)\top\overline{u}(\tau,t)\big)-f\big(u(y,s)\perp\overline{u}(\tau,t)\big)\Big)$$
$$g(\tau)\int_0^{+\infty}\big(\nabla P(y)-\nabla P(\tau)\big).\nabla\rho_{2,r}\left(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right)-y+\nabla P(\tau)\,\gamma\right)\,d\gamma$$
$$\overline{\rho}_{1,r}(t-s)\,\psi(t)\,dy\,ds\,d\tau\,dt\Bigg|$$

d'après (5.57) :

$$|E_{52r} + E_{5r}| \leq \|\psi\|_\infty \, M\, T\, 2\, U \iint_{\partial\Omega^+ \times \Omega} g(\tau)$$
$$\int_0^{\frac{1}{r\,g(\tau)}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)} \left|\nabla P(y) - \nabla P(\tau)\right| \left|\nabla \rho_{2,r}\left(\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma\right)\right| d\gamma\, dy\, d\tau$$

De plus toujours d'après (5.57) ainsi que d'après la définition de $\rho_{2,r}$:

$$|y-\tau| = \left|\tau\left(1-\frac{1}{r\,a}\right) - y + \nabla P(\tau)\,\gamma + \frac{\tau}{r\,a} - \nabla P(\tau)\,\gamma\right|$$
$$\leq \frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a} + \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{g(\tau)}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$

D'après la régularité de ∇P, et en effectuant le changement de variables (5.58), on obtient :

$$|E_{52r} + E_{5r}| \leq \|\psi\|_\infty \, M\, T\, 2\, U\, C_P\, \frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a} + \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{g(\tau)}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$
$$\int_{\partial\Omega^+}\int_0^{\frac{1}{r\,g(\tau)}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)}\int_{I\!R^2} r\, |\nabla\rho_2(z)|\, d\gamma\, dz\, d\tau$$

et donc :

$$|E_{52r} + E_{5r}| \leq \|\psi\|_\infty \, M\, T\, 2\, U\, C_P\, \frac{1}{r}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a} + \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla P(x)|}{g(\tau)}\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right)\right)$$
$$\left(1+\frac{\delta(\Omega)}{a}\right) M_\rho\, m(B_2(0,1)) \int_{\partial\Omega^+} \frac{1}{g(\tau)}\, d\tau$$

où $M_\rho = \sup_{x\in I\!R^2} |\nabla\rho_2(x)|$.

En reportant les résultats obtenus dans (5.56), on a

$$E_{5r} \leq \frac{C}{r}$$

où C ne dépend que de Ω, T, a, ψ, u_0, $\overline{u}$, f, u, P et de ρ_2.

Synthèse des résultats

En reportant tous les résultats obtenus dans (5.51) on obtient :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} |\tilde{u}(x,t) - u(x,t)|\, \psi'(t) dy\, dt \geq C\left[\mu_0(\overline{\Omega}) + \overline{\mu}\left(\overline{\partial\Omega^+}\times[0,T]\right)\right.$$
$$\left. +(r+1)\mu\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right) + \frac{1}{r}\left(1+\frac{r\,a}{r\,a+1}\right) + \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) + \mathcal{E}_0(r,\Omega)\right]$$

pour tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$, dont le support est inclus dans $[0,T]$, où C ne dépend que de Ω, T, α_1, a, ψ, u_0, $\overline{u}$, f, u, P, $\overline{\rho}_1$ et de ρ_2 et où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_0$ vérifient respectivement (5.48) et (5.49).

5.6 Convergence de la solution approchée associée à l'équation hyperbolique

On va passer à la limite dans l'estimation d'entropie continue pour la solution approchée (5.25) afin de montrer la convergence de la solution approchée vers la solution entropique du problème, on montre le résultat suivant :

Théorème 5.3 *On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (5.15)-(5.16)-(5.17). Alors il existe $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ tel que :*

$$\lim_{h\to 0} u_{\mathcal{T},k} \to \mu \text{ quand } h \to 0 \text{ au sens non linéaire faible } \star$$

c'est à dire que l'on a :

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega\times I\!R_+} g(u_{\mathcal{T},k}(x,t))\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \int_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 g(\mu(x,t,\xi))\,\varphi(x,t)\,d\xi\,dx\,dt \tag{5.60}$$

pour tout $\varphi \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$ et tout $g \in C(I\!R, I\!R)$.
De plus on a les deux résultat suivants :

1. *μ est une solution processus entropique de (5.2), (5.4), (5.5), i.e. μ vérifie l'inégalité suivante :*

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\xi)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,d\xi\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx$$

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 \Big(f\big(\mu(x,t,\xi)\top\kappa\big)-f\big(\mu(x,t,\xi)\bot\kappa\big)\Big)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,d\xi\,dx\,dt \tag{5.61}$$

$$+\iint_{\partial\Omega^+\times I\!R_+}\Big(f\big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa\big)-f\big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\big)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \geq 0$$

pour tout $\kappa \in I\!R$, et tout $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.

2. *μ ne dépend pas de son troisième argument, donc μ est la solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5), de plus elle est unique.*

Démonstration :

Pour démontrer la première partie de ce théorème on aura besoin de compacité, on va utiliser le résultat suivant dont la démonstration est donnée, entre autres, dans [17] :

Lemme 5.7 *Soit $E \subset I\!R^d$ $(d \geq 1)$. Soit une suite $(u_n)_{n\in I\!N} \subset L^\infty(E)$, $\|u_n\|_\infty \leq U$ pour tout $n \in I\!N$. Alors il existe $\mu \in L^\infty(E\times]0,1[)$ et une sous suite encore notée*

$(u_n)_{n\in I\!\!N}$ *tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mu \ \textit{non linéaire faible} \star$$

i.e. on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g(u_n(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_E \int_0^1 g(\mu(x,\xi))\,\varphi(x)\,d\xi\,dx$$

pour tout $\varphi \in L^1(E)$ *et tout* $g \in C([-U,U], I\!\!R)$.

On utilise ce résultat pour passer à la limite dans (5.25), on obtient alors qu'il existe une sous suite, encore notée $(u_{\mathcal{T},k})_{h\in I\!\!R_+^\star}$, et il existe $\mu \in L^\infty(\Omega\times I\!\!R_+\times]0,1[)$ tels que :

$$\lim_{h\to 0} \iint_{\Omega\times I\!\!R_+} u_{\mathcal{T},k}(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\Omega\times I\!\!R_+} \int_0^1 \mu(x,t,\xi)\,\varphi(x,t)\,d\xi\,dx\,dt$$

de plus μ est solution processus entropique de (5.2), (5.4), (5.5), i.e. μ vérifie (5.61).

Remarquons que si μ ne dépendait pas de son troisième argument alors on aurait démontré le théorème 5.1, car μ serait alors la solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5). On va donc démontrer le dernier résultat du théorème 5.3 en montrant l'unicité de la solution processus entropique. On utilise pour cela le lemme 5.5.
Soit donc μ et ν deux solutions processus entropiques de (5.2), (5.4), (5.5), alors elles vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!\!R_+} \int_0^1 |\mu(x,t,\xi)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,d\xi\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \\
&- \iint_{\Omega\times I\!\!R_+} \int_0^1 \Big(f\big(\mu(x,t,\xi)\top\kappa\big) - f\big(\mu(x,t,\xi)\bot\kappa\big)\Big)\,\nabla P(x).\nabla\varphi(x,t)\,d\xi\,dx\,dt \\
&+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!\!R_+} \Big(f\big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa\big) - f\big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\big)\Big)\,g(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \ge 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!\!R_+} \int_0^1 |\nu(y,s,\beta)-\kappa|\,\varphi_t(y,s)\,d\beta\,dy\,ds + \int_\Omega |u_0(y)-\kappa|\,\varphi(y,0)\,dy \\
&- \iint_{\Omega\times I\!\!R_+} \int_0^1 \Big(f\big(\nu(y,s,\beta)\top\kappa\big) - f\big(\nu(y,s,\beta)\bot\kappa\big)\Big)\,\nabla P(y).\nabla\varphi(y,s)\,d\beta\,dy\,ds \\
&+ \iint_{\partial\Omega^+\times I\!\!R_+} \Big(f\big(\overline{u}(\sigma,s)\top\kappa\big) - f\big(\overline{u}(\sigma,s)\bot\kappa\big)\Big)\,g(\sigma)\,\varphi(\sigma,s)\,d\sigma\,ds \ge 0
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in I\!\!R$ et tout $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!\!R_+, I\!\!R_+)$.

D'après le lemme 5.5 pour tout $T \in I\!R_+^\star$, il existe C, ne dépendant que de Ω, T, u_0, $\overline{u}$, u, P, f, g et de W, telle que :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x,t,\xi) - \nu(x,t,\beta)|\, d\xi\, d\beta\, dx\, dt$$
$$\leq C\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{r\,a}{r\,a+1}\right) + \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) + \mathcal{E}_0(r,\Omega)\right]$$

pour tout $r \in I\!R_+$, et où :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}(r,[0,T]\times\Omega) = 0$$

et :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{E}_0(r,\Omega) = 0$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, il vient :

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x,t,\xi) - \nu(x,t,\beta)|\, d\xi\, d\beta\, dx\, dt \leq 0$$

ainsi

$$\mu(x,t,\xi) = \nu(x,t,\beta) \quad \text{p.p. } (x,t,\xi,\beta) \in \Omega \times I\!R_+ \times]0,1[\times]0,1[$$

Donc μ et ν ne dépendent pas de leur troisième argument et :

$$\mu(x,t) = \nu(x,t) \text{ p.p. } (x,t) \in \Omega \times I\!R_+$$

Donc μ est l'unique solution entropique de (5.2), (5.4), (5.5). Ce qui termine la démonstration du théorème 5.3.
On conclut alors la démonstration du théorème 5.1, en montrant que :

$$u_{\mathcal{T},k} \longrightarrow u \text{ dans } L^r_{loc}(\Omega \times I\!R_+), \text{ pour tout } r < +\infty \tag{5.62}$$

Soit K un compact de $\Omega \times I\!R_+$ et $r < +\infty$, on suppose tout d'abord r pair. On doit alors montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \iint_{\Omega\times I\!R_+} \left|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\right|^r \mathbf{1}_K(x,t)\, dx\, dt = 0$$

où $\mathbf{1}_K$ est la fonction caractéristique de K.

Remarquons pour cela que :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \left|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\right|^r \mathbf{1}_K(x,t)\, dx\, dt$$
$$= \sum_{p=0}^{r} (-1)^p\, \mathcal{C}_r^p \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\Big)^{r-p} \Big(u(x,t)\Big)^p\, \mathbf{1}_K(x,t)\, dx\, dt$$

où :

$$\mathcal{C}_r^p = \frac{p!}{p!\,(r-p)!}$$

Ainsi en choisissant dans (5.60) $g(s) = s^{r-p}$ et $\varphi(\cdot,\cdot) = \big(u(\cdot,\cdot)\big)^p \mathbf{1}_K \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\Big|^r \mathbf{1}_K(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \sum_{p=0}^{r} (-1)^p\, \mathcal{C}_r^p \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(u(x,t)\Big)^{r-p} \Big(u(x,t)\Big)^p \mathbf{1}_K(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big|u(x,t) - u(x,t)\Big|^r \mathbf{1}_K(x,t)\,dx\,dt = 0$$

Ce qui termine le cas où r est pair.

Pour $r < +\infty$ impair il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder pour se ramener au cas précédent :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\Big|^r \mathbf{1}_K(x,t)\,dx\,dt \le \left(\iint_K \Big|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\Big|^2 dx\,dt\right)^{1/2} \times \left(\iint_K \Big|u_{\mathcal{T},k}(x,t) - u(x,t)\Big|^{2(r-1)} dx\,dt\right)^{1/2}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème de convergence 5.1.

6. Convergence de schémas volumes finis à flux monotone pour une équation hyperbolique non linéaire avec conditions aux limites

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une équation hyperbolique non linéaire, de la forme suivante :

$$u_t + \operatorname{div}\Big(v\, f(u)\Big) = 0$$

sur un ouvert borné, avec des conditions aux limites et une condition initiale, où v est une fonction vectorielle et f une fonction scalaire.
On discrétise ce problème à l'aide d'un schéma volumes finis à flux monotone, dont les exemples les plus classiques sont le schéma à décomposition de flux et le schéma de Godunov 1-D par interface.
On montre alors deux résultats. Le premier concerne le cas où f est croissante. En ne supposant les conditions aux limites et initiales que dans L^∞, on établit la convergence de la solution approchée, donnée par le schéma, vers la solution entropique du problème. On montre également l'existence et l'unicité de la solution entropique. La technique employée est différente de celle utilisée dans le chapitre 5, elle permet de montrer la convergence de la solution approchée. même si $v(x,t) \neq \nabla P(x)$ et permet d'éviter certaines hypothèses techniques nécessaires au chapitre précédent. Toutefois on n'a pas dans ce cas d'estimations d'erreur.
Le deuxième résultat concerne f quelconque. On suppose dans ce cas les conditions initiales et aux limites plus régulières que dans le cas f croissante afin d'avoir l'existence et l'unicité de la solution entropique, qui est à variations bornées (résultat donné dans [2]). On montre alors la convergence de la solution approchée, donnée par le schéma numérique, vers cette solution entropique.
Pour établir ces deux résultats, on montre tout d'abord des estimations sur la solution approchée. La première est une estimation L^∞. Elle permet d'avoir de la compacité non linéaire faible $\star$ (voir [17]).
La deuxième estimation, dite estimation "BV faible", est une estimation faible sur les variations en temps et en espace de la solution approchée. On utilise pour cela une technique introduite dans [15], on doit toutefois traiter en plus les termes de bord absents dans [15] puisque les auteurs s'intéressent à un problème sans condition aux limites.

Enfin la troisième estimation est une estimation continue d'entropie. On montre que la solution approchée vérifie une inégalité d'entropie similaire à celle vérifié par la solution entropique avec en plus des termes d'erreur. Comme dans [15], ces termes d'erreurs s'expriment sous la forme de mesures que l'on peut contrôler à l'aide de l'estimation "BV faible".
Pour montrer la convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution entropique de l'équation, on passe à la limite dans l'inégalité d'entropie continue vérifiée par la solution approchée. On montre alors que la solution approchée converge, en un sens non linéaire faible $\star$ vers une solution processus entropique (voir [17]), ou une solution entropique à valeur mesure (voir [12]) de l'équation hyperbolique. On utilise dans cette étape une technique introduite dans [3] afin de retrouver les "bons" termes de bords. Il reste alors à montrer que cette solution est en fait la solution entropique. Pour cela, on procède comme dans [34], où l'auteur s'intéresse à l'équation $u_t + \mathrm{div}(F(u)) = 0$, où F ne dépend de x et t qu'à travers u et montre que la solution à valeurs mesure de ce problème est unique. Cette étape nécessite de supposer u à variations bornées.
Dans le cas où f est croissante, on montre qu'il n'est pas nécessaire de supposer u à variations bornées.
Enfin, on termine ce chapitre en essayant d'expliquer pourquoi on n'arrive pas l'hypothèse u à variations bornées dans le cas où f n'est pas croissante.

6.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^d$ (d=2 ou 3). On suppose Ω polygonal si d=2, polyèdrique si d=3. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω. On considère alors le problème hyperbolique suivant :

$$u_t(x,t) + \mathrm{div}\Big(v(x,t)\, f(u(x,t))\Big) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in I\!R_+, \tag{6.1}$$

avec la condition aux limites donnée dans [2] et la condition initiale suivantes :

$$\begin{aligned} &\Big[\mathrm{sign}\,\Big(u(\tau,t)-\kappa\Big) - \mathrm{sign}\,\Big(\overline{u}(\tau,t)-\kappa\Big)\Big]\,\Big[f(u(\tau,t)) - f(\kappa)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau) \geq 0 \\ &\qquad\qquad (\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+,\ \forall\, \kappa \in I\!R, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{6.3}$$

où n est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω et où pour tout $a \in I\!R$

$$\mathrm{sign}\,(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

On suppose que :

$$(6.4)\quad \begin{cases} \bullet\quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+), \\ \bullet\quad f \in C^1(I\!R, I\!R), \\ \bullet\quad v \in C^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R^d) \text{ telle que } \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times I\!R_+} |v(x,t)| = V < +\infty \\ \quad\ \text{et telle que } \mathrm{div} v(x,t) = 0\ \forall\ (x,t) \in \Omega \times I\!R_+. \end{cases}$$

Alors $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$, pour tout $T > 0$, est solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3) si u vérifie l'inégalité suivante :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u(x,t)-\kappa|\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\, \varphi(x,0)\, dx$$

$$(6.5) + \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big[f\Big(u(x,t)\top\kappa\Big) - f\Big(u(x,t)\bot\kappa\Big)\Big]\, v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt$$

$$- \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \mathrm{sign}\, \Big[\overline{u}(\tau,t)-\kappa\Big]\, \Big[f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big) - f(\kappa)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \geq 0$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C^1_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$. On note pour tout a et b dans $I\!R$, $(a\top b) = \max(a,b)$ et $(a\bot b) = \min(a,b)$, ainsi pour tout $\kappa \in I\!R$, $|.-\kappa|$ sont les entropies de Kruzkov et $f(.\top\kappa) - f(.\bot\kappa)$ sont les flux associés. Et où γu est la trace de $u \in BV(\Omega \times [0,T])$ pour tout $T \in]0,+\infty[$, c'est à dire :

Comme Ω est un domaine polygonal (si $d = 2$) ou polyèdrique (si $d = 3$), il existe N_d sous ensembles de $\partial\Omega$ inclus dans différents hyperplans de $I\!R^d$ tels que si l'on note $\partial\Omega_1, \ldots, \partial\Omega_{N_d}$ ces ensembles, on ait $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{N_d} \partial\Omega_i$ et $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \subset I\!R^{d-2}$ pour tout $i,j \in \{1,\ldots,N_d\}$, $i \neq j$. On définit alors $\tilde{u} \in L^\infty(I\!R^d \times I\!R_+)$ par :

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{si } x \in \Omega,\ t \in I\!R_+ \\ 0 & \text{si } x \in (I\!R^d \setminus \Omega),\ t \in I\!R_+ \end{cases}$$

Alors :

$$(6.6)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \int_0^T \Big|u(x(\tau,s),t) - \gamma u(\tau,t)\Big|\, dt\, d\tau\, ds = 0$$

pour tout $T \in]0,+\infty[$ et où $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\, s$.

Remarque 6.1 *L'existence et l'unicité d'une solution entropique d'un tel problème est donnée dans [2]. Il faut toutefois mettre des hypothèses assez fortes sur les données, c'est à dire :*

$$(6.7)\quad \begin{cases} u_0 \in C^2(\overline{\Omega}),\ \overline{u} \in C^2 \cap L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+) \\ v \in C^2(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R^d) \text{ telle que } \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times I\!R_+} |v(x,t)| = V < +\infty \\ f \in C^2(I\!R) \end{cases}$$

Proposition 6.1 *Si f est croissante, il n'est pas nécessaire d'introduire la trace de u sur le bord de Ω. En effet dans ce cas la condition aux limites (6.2) s'écrit :*

$$f\Big(u(\tau,t)\Big)= f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big) \qquad \forall\ (\tau,t) \in \Gamma_v^- \tag{6.8}$$

où

$$\Gamma_v^- = \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+\,;\, v(\tau,t).n(\tau) < 0\Big\}$$

Alors $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ est solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+} |u(x,t)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \\
&+ \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big|f\Big(u(x,t)\Big)-f(\kappa)\Big|\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&- \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \Big|f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big)-f(\kappa)\Big|\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt \geq 0
\end{aligned} \tag{6.9}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty\Big((\Omega\times I\!R_+)\cup\Gamma_v^-, I\!R_+\Big)$ et pour tout $\kappa \in I\!R$.

Démonstration de la proposition 6.1

D'après les lemmes 6.13 et 6.14, si $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ vérifie (6.5), on peut définir une trace à $f(u)$ qui est unique. On la note $\gamma f(u)$. Alors comme on montre (6.63), on montre :

$$\Big[\Big|\gamma f(u)(\tau,t) - f(\kappa)\Big| - \text{sign}\Big(\overline{u}(\tau,t)-\kappa\Big)\Big[\gamma f(u)(\tau,t) - f(\kappa)\Big]\Big]\,v(\tau,t).n(\tau) \geq 0$$
$$p.p.\ (\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+,\ \forall\ \kappa \in I\!R,$$

On choisit alors $\kappa = \overline{u}(\tau,t)$, on obtient :

$$\Big|f\Big(u(\tau,t)\Big)-f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big)\Big|\,v(\tau,t).n(\tau) \geq 0$$

Ainsi :

$$v(\tau,t).n(\tau) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f\Big(u(\tau,t)\Big)= f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big)$$

6.2 Discrétisation

On se donne un maillage $\mathcal{T}$ de Ω satisfaisant les hypothèses de régularité suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{– L'intersection entre deux mailles voisines de } \mathcal{T} \text{ est un hyperplan de } I\!R^d. \\
\text{Cet hyperplan est alors un des côtés de chacune des deux mailles.} \\
\\
\text{– Il existe } \alpha > 0 \text{ et } h > 0 \text{ tels que pour tout } p \in \mathcal{T} : \\
\qquad \alpha\, h^d \leq m(p) \qquad l(\partial p) \leq \dfrac{1}{\alpha}\, h^{d-1} \qquad \text{et} \qquad \delta(p) \leq h
\end{array}\right. \tag{6.10}$$

où ∂p est la frontière de p, $m(\cdot)$ (respectivement $l(\cdot)$) est la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle (respectivement $(d-1)$-dimensionnelle) et $\delta(p)$ est le diamètre de p.
Pour tout $p \in \mathcal{T}$, on note $N(p)$ l'ensemble des voisins de p, $\mathcal{A}_{ext}(p)$ l'ensemble des côtés de p situés dans $\partial\Omega$, et pour tout $q \in N(p)$ on note σ_{pq} l'interface entre les mailles p et q et n_{pq} la normale à σ_{pq} allant de p vers q.

On utilise alors un schéma à flux monotone, pour cela on a besoin de définir $F \in C(I\!R^2, I\!R)$ telle que :

(6.11)
- $F(u,v)$ est croissante par rapport à u et décroissante par rapport à v pour tout $u, v \in [-U, U]$, où $U = \max\Big(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty\Big)$
- $F(u,v)$ est lipschitzienne sur $[-U,U]$ par rapport à u (respectivement à v) de constante de Lipschitz M_1 (respectivement M_2)
- $F(u,u) = f(u)$ pour tout $u \in [-U, U]$

Remarque 6.2 *La première hypothèse assure la monotonie du schéma, elle permet, entre autres, d'établir l'inégalité d'entropie continue pour la solution approchée (6.24). La derniére hypothèse est une hypothèse de consistance, on peut grace à elle établir la stabilité L^∞ du schéma ainsi que sa convergence.*

Deux exemples possibles de flux numériques :

- *On peut choisir par exemple le schéma à décomposition de flux. C'est à dire que l'on décompose f en $f_1 + f_2$ où f_1 est croissante et f_2 décroissante. Alors :*

$$F(u,v) = f_1(u) + f_2(v)$$

- *Un autre exemple classique est celui du schéma de Godunov 1-D par interface, F s'exprime dans ce cas sous la forme suivante :*

$$F(u,v) = \begin{cases} \min\limits_{c \in [u,v]} f(c) & si\ u \leq v \\ \\ \max\limits_{c \in [v,u]} f(c) & si\ v \leq u \end{cases}$$

On se donne alors un pas de temps $k > 0$ vérifiant la condition de stabilité, de type C.F.L., suivante :

$$\frac{k\,(M_1 + M_2)\,V}{\alpha^2\,h} \leq (1-\eta) \tag{6.12}$$

où $\eta \in [0, 1[$ est donné. On note $t^n = n\,k$.

La solution approchée est définie par

$$u_{\mathcal{T},k}(x,t) = u_p^n \text{ si } x \in p \ (p \in \mathcal{T}) \text{ et } t \in [t^n, t^{n+1}[\ (n \in I\!N). \tag{6.13}$$

De plus, on discrétise la condition initiale et la condition aux limites de la façon suivante :

$$u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x)\,dx \qquad \text{pour tout } p \in \mathcal{T}, \tag{6.14}$$

et :

$$\overline{u}_a^n = \frac{1}{k\,l(a)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \overline{u}(\tau,t)\,d\tau\,dt \qquad \forall\ n \in I\!N \text{ et } \forall\ a \in \mathcal{A}_{ext}(p),\ p \in \mathcal{T}. \tag{6.15}$$

Pour discrétiser l'équation (6.1), on utilise un schéma d'Euler explicite en temps et un schéma de type volumes finis en espace. On intègre donc l'équation sur chaque volume de contrôle (ici les mailles). On obtient alors pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$:

$$\int_p \frac{u(x,t^{n+1}) - u(x,t^n)}{k}\,dx + \sum_{q \in N(p)} \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} f\Big(u(\tau,t)\Big)\,v(\tau,t).n_{pq}\,d\tau\,dt$$
$$+ \sum_{a \in \mathcal{A}_{ext}(p)} \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a f\Big(u(\tau,t)\Big)\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\tau\,dt = 0$$

Pour tout $p \in \mathcal{T}$, tout $q \in N(q)$ et tout $n \in I\!N$, on note :

$$v_{pq}^n = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big) \top 0\,d\tau\,dt$$

$$\begin{aligned} v_{qp}^n &= \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big) \top 0\,d\tau\,dt \\ &= \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(-v(\tau,t).n_{pq}\Big) \top 0\,d\tau\,dt \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} v(\tau,t).n_{pq}(\tau)\,d\tau\,dt = v_{pq}^n - v_{qp}^n.$$

De la même façon, pour tout $p \in \mathcal{T}$, tout $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$ et tout $n \in I\!N$, on note :

$$v_{pa}^n = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \Big(v(\tau,t).n(\tau)\Big) \top 0\,d\tau\,dt$$

$$v_{ap}^n = \frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a \Big(-v(\tau,t).n(\tau)\Big) \top 0\,d\tau\,dt$$

ainsi :

$$\frac{1}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a v(\tau,t).n(\tau)\,d\tau\,dt = v_{pa}^n - v_{ap}^n,$$

où l'on rappelle que n est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

On considère alors le schéma numérique suivant, obtenu par décentrement :

$$
\begin{aligned}
&m(p)\,\frac{u_p^{n+1}-u_p^n}{k} + \sum_{q\in N(p)}\Big[v_{pq}^n\,F(u_p^n,u_q^n) - v_{qp}^n\,F(u_q^n,u_p^n)\Big] \\
&\qquad + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big[v_{pa}^n\,F(u_p^n,\overline{u}_a^n) - v_{ap}^n\,F(\overline{u}_a^n,u_p^n)\Big] = 0
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

pour tout $(p,n)\in\mathcal{T}\times I\!N$.

6.3 Résultats principaux

Le but de ce chapitre est de montrer les deux résultats suivants :

Théorème 6.1 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées, on suppose de plus f croissante. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (6.13), (6.14), (6.15), (6.16).*
Alors, il existe $u\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ telle que :

$$\lim_{h\to 0} u_{\mathcal{T},k} = u \text{ dans } L^r_{loc}(\overline{\Omega}\times I\!R_+), \text{ pour tout } r \text{ tel que } 1\le r<+\infty$$

de plus $u\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)$ est la solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. u vérifie (6.9).

Théorème 6.2 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. On suppose de plus les hypothèses (6.7) satisfaites. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (6.13), (6.14), (6.15), (6.16). On note $u\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+)\cap BV(\Omega\times[0,T])$, pour tout $T>0$, la solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. u vérifie l'inégalité (6.5).*
Alors :

$$\lim_{h\to 0} u_{\mathcal{T},k} = u \text{ dans } L^r_{loc}(\overline{\Omega}\times I\!R_+), \text{ pour tout } r \text{ tel que } 1\le r<+\infty$$

Remarque 6.3 *Les hypothèses de régularité sur les données (6.7) ne sont nécessaires que pour assurer les résultats d'existence et d'unicité de [2]. Toutefois afin d'établir l'unicité de la solution processus entropique on utilise ici, fortement, le fait que la solution entropique soit dans $BV(\Omega\times[0,T])$, pour tout $T>0$.*

6.4 Estimations sur la solution approchée

Afin d'établir ces deux résultats, on va tout d'abord montrer des estimations sur la solution approchée, une estimation L^∞, une estimation dite “BV faible” qui permet de contrôler les variations en temps et en espace de $u_{\mathcal{T},k}$, enfin une estimation continue d'entropie.

6.4.1 Stabilité du schéma

Lemme 6.1 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (6.13), (6.14), (6.15), (6.16), alors :*

$$\|u_{\mathcal{T},k}\|_\infty \leq \max(\|u_0\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty) = U$$

Démonstration du lemme 6.1 :

Soient $p \in \mathcal{T}$ et $n \in IN$, remarquons que comme $\mathrm{div}(v) = 0$ on a :

$$\sum_{q\in N(p)} \left(v_{pq}^n - v_{qp}^n\right) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \left(v_{pa}^n - v_{ap}^n\right) = 0 \tag{6.17}$$

On peut donc encore écrire (6.16) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_p^{n+1} = u_p^n \Bigg\{ 1 - \frac{k}{m(p)} \Bigg(\sum_{q\in N(p)} \Bigg[v_{pq}^n \frac{F(u_p^n, u_q^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} + v_{qp}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(u_q^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} \Bigg] \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg[v_{pa}^n \frac{F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} + v_{ap}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(\overline{u}_a^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} \Bigg] \Bigg) \Bigg\} \\ + \frac{k}{m(p)} \Bigg(\sum_{q\in N(p)} \Bigg[v_{pq}^n \frac{F(u_p^n, u_q^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} + v_{qp}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(u_q^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} \Bigg] u_q^n \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg[v_{pa}^n \frac{F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} + v_{ap}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(\overline{u}_a^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} \Bigg] \overline{u}_a^n \Bigg) \end{aligned}$$

On a donc une combinaison de termes dont la somme des coefficients est égale à un, il reste à montrer qu'ils sont tous positifs. Il est clair que les deux derniers coefficients le sont d'après la monotonie de F. Le premier l'est aussi d'après la condition de stabilité (6.12), en effet :

$$\begin{aligned} \frac{k}{m(p)} \Bigg(\sum_{q\in N(p)} \Bigg[v_{pq}^n \frac{F(u_p^n, u_q^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} + v_{qp}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(u_q^n, u_p^n)}{u_p^n - u_q^n} \Bigg] \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg[v_{pa}^n \frac{F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - F(u_p^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} + v_{ap}^n \frac{F(u_p^n, u_p^n) - F(\overline{u}_a^n, u_p^n)}{u_p^n - \overline{u}_a^n} \Bigg] \Bigg) \\ \leq \frac{k}{m(p)} \Bigg(\sum_{q\in N(p)} (M_1 + M_2)\, V\, l(\sigma_{pq}) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (M_1 + M_2)\, V\, l(a) \Bigg) \\ \leq \frac{k\,(M_1 + M_2)\, V}{\alpha^2\, h} \leq 1 \end{aligned}$$

La combinaison est donc convexe, et par récurrence :

$$|u_p^{n+1}| \le \sup_{p\in\mathcal{T}}\Big(|u_p^n|, \sup_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} |\overline{u}_a^n|\Big) \le \ldots \le \max\Big(||u_0||_{L^\infty(\Omega)}, ||\overline{u}||_{L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+)}\Big) = U$$

pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $n \in I\!N$.

6.4.2 Estimation BV faible

On montre dans ce paragraphe des estimations sur l'accroissement de la solution approchée :

Lemme 6.2 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (6.13), (6.14), (6.15), (6.16).*
Soit $T \in]0, +\infty[$, on note $N_T = \max\Big\{n \in I\!N\ ;\ (n-1)\,k < T\Big\}$.
Alors il existe C, ne dépendant que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F, telle que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \Bigg[& v_{pq}^n \Big(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big(F(d,c)-f(c)\Big) + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big(F(d,c)-f(d)\Big)\Big) \\ & + v_{qp}^n \Big(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big(f(d)-F(c,d)\Big) + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big(f(c)-F(c,d)\Big)\Big)\Bigg] \\ + \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg(& v_{pa}^n \max_{(\overline{u}_a^n \perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n \top u_p^n)} \Big(F(d,c)-f(d)\Big) \\ & + v_{ap}^n \max_{(\overline{u}_a^n \perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n \top u_p^n)} \Big(f(d)-F(c,d)\Big)\Bigg) \le \frac{C}{\sqrt{h}} \end{aligned} \tag{6.18}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\, \Big|u_p^{n+1} - u_p^n\Big| \le \frac{C}{\sqrt{h}} \tag{6.19}$$

Démonstration du lemme 6.2 :

On commence par établir l'estimation "BV faible" en espace (6.18). Pour cela on procède comme dans [15], toutefois on devra traiter en plus les termes de bord.
Soit $T \in]0, +\infty[$, on multiple alors le schéma (6.16) par ku_p^n, on somme sur $p \in \mathcal{T}$ et sur $n = 0, \ldots, N_T$. On rappelle que $N_T = \max\Big\{n \in I\!N\ ;\ (n-1)\,k < T\Big\}$. Il vient :

$$A + B = 0 \tag{6.20}$$

où :

$$A = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,(u_p^{n+1} - u_p^n)\, u_p^n$$

et

$$B = \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \Bigg\{ \sum_{q\in N(p)} u_p^n \left[v_{pq}^n \, F(u_p^n, u_q^n) - v_{qp}^n \, F(u_q^n, u_p^n) \right] \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} u_p^n \left[v_{pa}^n \, F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - v_{ap}^n \, F(\overline{u}_a^n, u_p^n) \right] \Bigg\}$$

Remarquons alors que A peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$A = -\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^{n+1} - u_p^n \right)^2 + \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^{N_T+1} \right)^2 - \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^0 \right)^2$$

Or comme div$v$=0, d'après (6.17), le schéma (6.16) se réécrit :

$$m(p) \, \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{k} + \sum_{q\in N(p)} \Big(v_{pq}^n \Big[F(u_p^n, u_q^n) - f(u_p^n) \Big] - v_{qp}^n \Big[F(u_q^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big] \Big) \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n \Big[F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \Big] - v_{ap}^n \Big[F(\overline{u}_a^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big] \Big) = 0$$

Donc d'après l'inégalité précédente, on a pour tout $p \in \mathcal{T}$:

$$\frac{m(p)}{2} \, \left(u_p^{n+1} - u_p^n \right)^2 = \frac{k^2}{2\,m(p)} \Bigg\{ \sum_{q\in N(p)} \Big(v_{pq}^n \Big[F(u_p^n, u_q^n) - f(u_p^n) \Big] \\ - v_{qp}^n \Big[F(u_q^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big] \Big) \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n \Big[F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \Big] - v_{ap}^n \Big[F(\overline{u}_a^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big] \Big) \Bigg\}^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$A \geq -\sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^0 \right)^2 - \sum_{n=0}^{N_T} k \, \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{k}{2\,m(p)} \Bigg[\Bigg(\sum_{q\in N(p)} (v_{pq}^n + v_{qp}^n) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (v_{pa}^n + v_{ap}^n) \Bigg) \\ \times \Bigg\{ \sum_{q\in N(p)} \Big(v_{pq}^n \Big[F(u_p^n, u_q^n) - f(u_p^n) \Big]^2 + v_{qp}^n \Big[F(u_q^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big]^2 \Big) \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n \Big[F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - f(u_p^n) \Big]^2 + v_{ap}^n \Big[F(\overline{u}_a^n, u_p^n) - f(u_p^n) \Big]^2 \Big) \Bigg\} \Bigg]$$

Ainsi d'apès la condition de type C.F.L (6.12) et la conservativité de l'expression précédente, on a :

$$A \geq -\sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{m(p)}{2} \left(u_p^0 \right)^2 - \sum_{n=0}^{N_T} k \, \sum_{p\in\mathcal{T}} \frac{1-\eta}{2\,(M_1 + M_2)} \Bigg\{ \sum_{\substack{q\in N(p) \\ u_p^n > u_q^n}} \Big(v_{pq}^n \Big[F(u_p^n, u_q^n) - f(u_p^n) \Big]^2$$

$$+v_{qp}^n\Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]^2+v_{qp}^n\Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_q^n)\Big]^2+v_{pq}^n\Big[F(u_p^n,u_q^n)-f(u_q^n)\Big]^2\Big)$$

$$+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big(v_{pa}^n\Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big]^2+v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]^2\Big)\Bigg\}$$

et donc :

$$\begin{aligned}A\geq -\frac{\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}}{2}-\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\frac{1-\eta}{2\,(M_1+M_2)}&\Bigg(\sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}}\Bigg[v_{pq}^n\Big(\max_{u_q^n\leq c\leq d\leq u_p^n}\Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2\\
&+\max_{u_q^n\leq c\leq d\leq u_p^n}\Big[F(d,c)-f(c)\Big]^2\Big)\\
&+v_{qp}^n\Big(\max_{u_q^n\leq c\leq d\leq u_p^n}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2+\max_{u_q^n\leq c\leq d\leq u_p^n}\Big[f(c)-F(c,d)\Big]^2\Big)\Bigg]\\
&+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Bigg[v_{pa}^n\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\leq c\leq d\leq(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2\\
&+v_{ap}^n\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\leq c\leq d\leq(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2\Bigg]\Bigg)\end{aligned}\tag{6.21}$$

Traitons alors le terme B. En utilisant (6.17), on a :

$$\begin{aligned}B=\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\Bigg\{&\sum_{q\in N(p)}u_p^n\Big(v_{pq}^n\Big[F(u_p^n,u_q^n)-f(u_p^n)\Big]-v_{qp}^n\Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]\Big)\\
&+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}u_p^n\Big(v_{pa}^n\Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big]-v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]\Big)\Bigg\}\end{aligned}$$

D'après la conservativité des flux, il vient :

$$\begin{aligned}B=\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}}&\Big\{v_{pq}^n\Big(u_p^n\Big[F(u_p^n,u_q^n)-f(u_p^n)\Big]-u_q^n\Big[F(u_p^n,u_q^n)-f(u_q^n)\Big]\Big)\\
&-v_{qp}^n\Big(u_p^n\Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]-u_q^n\Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_q^n)\Big]\Big)\Big\}\\
+\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}&\Big\{v_{pa}^n\Big(u_p^n\Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big]-\overline{u}_a^n\Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(\overline{u}_a^n)\Big]\Big)\\
&-v_{ap}^n\Big(u_p^n\Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]-\overline{u}_a^n\Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(\overline{u}_a^n)\Big]\Big)\Big\}\\
+\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}&\Big(v_{pa}^n\,\overline{u}_a^n\Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(\overline{u}_a^n)\Big]-v_{ap}^n\,\overline{u}_a^n\Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(\overline{u}_a^n)\Big]\Big)\end{aligned}$$

On note G une primitive de la fonction $s\,f'(s)$, en intégrant par partie, il vient pour tout $b, e \in I\!R$:

$$\begin{aligned} G(b) - G(e) &= \int_b^e s\,f'(s)\,ds \\ &= b\Big[F(b,e) - f(b)\Big] - e\Big[F(b,e) - f(e)\Big] - \int_b^e \Big[f(s) - F(b,e)\Big]\,ds \end{aligned}$$

Alors :

$$B = B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)}$$

où

$$\begin{aligned} B^{(1)} = \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \Bigg\{ & \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n > u_q^n}} \Big(v_{pq}^n \int_{u_p^n}^{u_q^n} \Big[f(s) - F(u_p^n, u_q^n)\Big]\,ds \\ & \qquad + v_{qp}^n \int_{u_q^n}^{u_p^n} \Big[f(s) - F(u_q^n, u_p^n)\Big]\,ds \Big) \\ & + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n \int_{u_p^n}^{\overline{u}_a^n} \Big[f(s) - F(u_p^n, \overline{u}_a^n)\Big]\,ds + v_{ap}^n \int_{\overline{u}_a^n}^{u_p^n} \Big[f(s) - F(\overline{u}_a^n, u_p^n)\Big]\,ds \Big) \Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(2)} = \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \Bigg\{ & \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (v_{pa}^n - v_{ap}^n)\Big[G(u_p^n) - G(\overline{u}_a^n)\Big] \\ & + \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n > u_q^n}} (v_{pq}^n - v_{qp}^n)\Big[G(u_p^n) - G(u_q^n)\Big] \Bigg\} \end{aligned}$$

enfin :

$$B^{(3)} = \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n\,\overline{u}_a^n \Big[F(u_p^n, \overline{u}_a^n) - f(\overline{u}_a^n)\Big] - v_{ap}^n\,\overline{u}_a^n \Big[F(\overline{u}_a^n, u_p^n) - f(\overline{u}_a^n)\Big] \Big)$$

De plus on a (voir [15]), pour tout $(b,e) \in I\!R^2$:

$$\begin{aligned} \int_b^e \Big[f(s) - F(b,e)\Big]\,ds \geq \frac{1}{2\,(M_1 + M_2)} \Big(& \max_{(b\perp e)\leq c\leq d\leq (b\top e)} \Big[f(c) - F(c,d)\Big]^2 \\ & + \max_{(b\perp e)\leq c\leq d\leq (b\top e)} \Big[f(d) - F(c,d)\Big]^2 \Big) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité précédente, il vient :

$$B^{(1)} \geq \frac{1}{2\,(M_1 + M_2)} \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n > u_q^n}} \Big\{ v_{pq}^n \Big(\max_{u_q^n \leq c\leq d\leq u_p^n} \Big[F(d,c) - f(d)\Big]^2$$

$$+\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[F(d,c)-f(c)\Big]^2\Bigg)$$

$$+v_{qp}^n\Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2+\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[f(c)-F(c,d)\Big]^2\Bigg)\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2\,(M_1+M_2)}\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Bigg\{v_{pa}^n\Bigg(\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2$$

$$+\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[F(d,c)-f(c)\Big]^2\Bigg)+v_{ap}^n\Bigg(\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2$$

$$+\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[f(c)-F(c,d)\Big]^2\Bigg)\Bigg\}$$

et donc :

$$B^{(1)}\ge\frac{1}{2\,(M_1+M_2)}\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}}\Bigg\{v_{pq}^n\Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2$$

$$+\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[F(d,c)-f(c)\Big]^2\Bigg)$$

$$+v_{qp}^n\Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2+\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n}\Big[f(c)-F(c,d)\Big]^2\Bigg)\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2\,(M_1+M_2)}\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Bigg\{v_{pa}^n\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2$$

$$+v_{ap}^n\max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)}\Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2\Bigg\}$$

Remarquons alors que :

$$B^{(2)}=\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\Bigg(\sum_{q\in N(p)}(v_{pq}^n-v_{qp}^n)\,G(u_p^n)+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}(v_{pa}^n-v_{ap}^n)\Big[G(u_p^n)-G(\overline{u}_a^n)\Big]\Bigg)$$

et donc d'après (6.17), on a :

$$B^{(2)}=-\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}(v_{pa}^n-v_{ap}^n)\,G(\overline{u}_a^n)\ge-\sup_{s\in[-U,U]}|G(s)|\,T\,l(\partial\Omega)\,V$$

De plus :

$$|B^{(3)}|\le U\sum_{n=0}^{N_T}k\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big[v_{pa}^n\,M_1\,|u_p^n-\overline{u}_a^n|+v_{ap}^n\,M_2\,|u_p^n-\overline{u}_a^n|\Big]$$

et donc :

$$|B^{(3)}|\le 2\,U^2\,(M_1+M_2)\,T\,l(\partial\Omega)\,V$$

En utilisant (6.20), (6.21) ainsi que les expressions précédentes de $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ et $B^{(3)}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta}{2\,(M_1+M_2)}\Bigg(\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \Bigg\{ v_{pq}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2 \\
&\qquad\qquad + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(c)\Big]^2\Bigg) \\
&\qquad + v_{qp}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2 + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(c)-F(c,d)\Big]^2\Bigg)\Bigg\} \\
&+ \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg\{ v_{pa}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[F(d,c)-f(d)\Big]^2 \\
&\qquad + v_{ap}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[f(d)-F(c,d)\Big]^2\Bigg\}\Bigg) \\
&\le \max_{s\in[-U,U]} |G(s)|\,T\,V\,l(\partial\Omega) + 2\,U^2\,(M_1+M_2)\,T\,l(\partial\Omega) + \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{2}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy Schwarz ainsi que l'inégalité (6.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \Bigg\{ v_{pq}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(d)\Big] + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(c)\Big]\Bigg) \\
&\qquad + v_{qp}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(d)-F(c,d)\Big] + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(c)-F(c,d)\Big]\Bigg)\Bigg\} \\
&+ \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg\{ v_{pa}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[F(d,c)-f(d)\Big] \\
&\qquad + v_{ap}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[f(d)-F(c,d)\Big]\Bigg\}\Bigg) \\
&\le C \left(\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} (v_{pq}^n + v_{qp}^n) + \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (v_{pa}^n + v_{ap}^n) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F.

On conclut en remarquant que d'après les hypothèses sur le maillage (6.10) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} (v_{pq}^n + v_{qp}^n) + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} (v_{pa}^n + v_{ap}^n) \right) &\le T\,V \sum_{p\in\mathcal{T}} m(\partial p) \\
&\le \frac{T\,V}{\alpha^2\,h} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p) = \frac{T\,V\,m(\Omega)}{\alpha^2\,h}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \Bigg\{ v_{pq}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(d)\Big] + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(c)\Big]\Bigg)$$
$$+ v_{qp}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(d)-F(c,d)\Big] + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(c)-F(c,d)\Big]\Bigg)\Bigg\}$$
$$+ \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg\{ v_{pa}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[F(d,c)-f(d)\Big]$$
$$+ v_{ap}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[f(d)-F(c,d)\Big]\Bigg\}\Bigg) \le \frac{C}{\sqrt{h}}$$

où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F.

Ceci termine la démonstration de (6.18). On montre alors (6.19). Pour cela, on utilise le schéma numérique (6.16), qui à l'aide de (6.17) peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$m(p)\,(u_p^{n+1}-u_p^n) = k \sum_{q\in N(p)} \Big(v_{pq}^n \Big[F(u_p^n,u_q^n)-f(u_p^n)\Big] - v_{qp}^n \Big[F(u_q^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]\Big)$$
$$+ \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big(v_{pa}^n \Big[F(u_p^n,\overline{u}_a^n)-f(u_p^n)\Big] - v_{ap}^n \Big[F(\overline{u}_a^n,u_p^n)-f(u_p^n)\Big]\Big)$$

pour tout $(p,n)\in\mathcal{T}\times I\!N$.

Et donc

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|u_p^{n+1}-u_p^n| \le \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \Bigg\{ v_{pq}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(d)\Big]$$
$$+ \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[F(d,c)-f(c)\Big]\Bigg)$$
$$+ v_{qp}^n \Bigg(\max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(d)-F(c,d)\Big] + \max_{u_q^n\le c\le d\le u_p^n} \Big[f(c)-F(c,d)\Big]\Bigg)\Bigg\}$$
$$+ \sum_{n=0}^{N_T} k \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg\{ v_{pa}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[F(d,c)-f(d)\Big]$$
$$+ v_{ap}^n \max_{(\overline{u}_a^n\perp u_p^n)\le c\le d\le(\overline{u}_a^n\top u_p^n)} \Big[f(d)-F(c,d)\Big]\Bigg\}\Bigg)$$

En utilisant (6.18), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,|u_p^{n+1}-u_p^n| \le \frac{C}{\sqrt{h}}$$

où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F.

6.4.3 Inégalité d'entropie continue

On note $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ (respectivement $\mathcal{M}(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$ et $\mathcal{M}(\partial\Omega\times I\!R_+)$) l'ensemble des mesures positives sur $\overline{\Omega}$ (respectivement sur $\overline{\Omega}\times I\!R_+$ et $\partial\Omega\times I\!R_+$), c'est à dire des formes linéaires positives et continues sur $C(\overline{\Omega})$ (respectivement sur $C_c(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$ et $C_c(\partial\Omega\times I\!R_+)$).

Tout d'abord définissons la trace $\gamma(u_{\mathcal{T},k})$ de la solution approchée par :

$$\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)=u_p^n \text{ si } \tau\in\partial p\cap\partial\Omega \text{ et } t\in\ [t^n,t^{n+1}[,\ p\in\mathcal{T},\ n\in I\!N. \tag{6.23}$$

On montre alors une estimation d'entropie continue pour la solution approchée en établissant le résultat suivant :

Lemme 6.3 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution de (6.13), (6.14), (6.15), (6.16) et $\gamma(u_{\mathcal{T},k})$ définie par (6.23).*
Alors il existe $\mu_{\mathcal{T},k}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega}\times I\!R_+)$, $\mu_{\mathcal{T}}\in\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ et $\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\in\mathcal{M}(\partial\Omega\times I\!R_+)$ telles que :

$$T_{10}+T_{20}\le T_{30} \tag{6.24}$$

pour tout $\kappa\in I\!R$ et tout $\varphi\in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+,I\!R_+)$.
Où :

$$T_{10}=-\iint_{\Omega\times I\!R_+}|u_{\mathcal{T},k}(x,t)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt-\int_\Omega|u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx$$

$$\begin{aligned}T_{20}=&-\iint_{\Omega\times I\!R_+}\Big[f\Big(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\top\kappa\Big)-f\Big(u_{\mathcal{T},k}(x,t)\bot\kappa\Big)\Big]\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt\\&+\iint_{\Gamma_v^-\times I\!R_+}\Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa,\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\top\kappa\Big)\\&\qquad-F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa,\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\\&+\iint_{\Gamma_v^+\times I\!R_+}\Big[F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\top\kappa,\overline{u}(\tau,t)\top\kappa\Big)\\&\qquad-F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\bot\kappa,\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}T_{30}=&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\Big(|\varphi_t(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)|\Big)\,d\mu_{\mathcal{T},k}(x,t)+\int_\Omega\varphi(x,0)\,d\mu_{\mathcal{T}}(x)\\&+\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+}\varphi(\tau,t)\,d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)\end{aligned}$$

De plus pour tout $T \in]0,+\infty[$ il existe C, D et E, ne dépendant que de η, α, Ω, T, u_0, $\overline{u}$, f et v, telles que :

$$\mu_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega}\times[0,T]\Big)\leq C\sqrt{h} \tag{6.25}$$

$$\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\Big(\partial\Omega\times[0,T]\Big)\longrightarrow 0 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0 \tag{6.26}$$

$$\mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega})\longrightarrow 0 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0 \tag{6.27}$$

Démonstration du lemme 6.3 :

On montre tout d'abord une inégalité d'entropie discrète, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
|u_p^{n+1}-\kappa| - |u_p^n-\kappa| + \frac{k}{m(p)}\sum_{q\in N(p)}\Bigg(& v_{pq}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - F(u_p^n\bot\kappa, u_q^n\bot\kappa)\Big]\\
&-v_{qp}^n\Big[F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\bot\kappa)\Big]\Bigg)\\
+\frac{k}{m(p)}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Bigg(& v_{pa}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}_a^n\top\kappa) - F(u_p^n\bot\kappa, \overline{u}_a^n\bot\kappa)\Big]\\
&-v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\bot\kappa)\Big]\Bigg)\leq 0
\end{aligned} \tag{6.28}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$, tout $p\in\mathcal{T}$ et tout $n\in I\!N$.

Démonstration de l'inégalité (6.28) :

Soient $p\in\mathcal{T}$ et $n\in I\!N$, d'après (6.16) on a :

$$\begin{aligned}
u_p^{n+1} &= u_p^n + \frac{k}{m(p)}\sum_{q\in N(p)}\Big[v_{pq}^n\,F(u_p^n,u_q^n) - v_{qp}^n\,F(u_q^n,u_p^n)\Big]\\
&\qquad + \frac{k}{m(p)}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big[v_{pa}^n\,F(u_p^n,\overline{u}_a^n) - v_{ap}^n\,F(\overline{u}_a^n,u_p^n)\Big]\\
&= G\Big(u_p^n, u_q^n\,(q\in N(p)), \overline{u}_a^n\,(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))\Big)
\end{aligned}$$

D'après la monotonie de F, G est une fonction croissante en u_q^n $(q\in N(p))$ et en $\overline{u}_a^n$ $(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))$, c'est aussi, d'après la condition de stabilité (6.12), une fonction croissante en u_p^n. De plus :

$$\kappa = G\Big(\kappa, \kappa\,(q\in N(p)), \kappa\,(a\in\mathcal{A}_{ext}(p))\Big) \qquad \text{pour tout } \kappa\in I\!R.$$

Ainsi pour tout $\kappa\in I\!R$ on a :

$$\begin{aligned}
u_p^{n+1}\top\kappa \leq u_p^n\top\kappa &+ \frac{k}{m(p)}\sum_{q\in N(p)}\Big[v_{pq}^n\,F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - v_{qp}^n\,F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa)\Big]\\
&+\frac{k}{m(p)}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big[v_{pa}^n\,F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}_a^n\top\kappa) - v_{ap}^n\,F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa)\Big]
\end{aligned}$$

et

$$u_p^{n+1}\perp\kappa \geq u_p^n\perp\kappa + \frac{k}{m(p)}\sum_{q\in N(p)}\Big[v_{pq}^n\, F(u_p^n\perp\kappa, u_q^n\perp\kappa) - v_{qp}^n\, F(u_q^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa)\Big]$$
$$+\frac{k}{m(p)}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big[v_{pa}^n\, F(u_p^n\perp\kappa, \overline{u}_a^n\perp\kappa) - v_{ap}^n\, F(\overline{u}_a^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa)\Big]$$

La différence de ces deux inéquations donne (6.28).

On montre alors (6.24). Soient $\kappa \in I\!R$, $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+, I\!R_+)$ et $T \in]0,+\infty[$ tel que le support de φ est inclus dans $\overline{\Omega}\times[0,T]$. On note alors $N_T = \max\Big\{n \in I\!N\,;\, n \leq T/k+1\Big\}$.

On multiplie l'inégalité d'entropie discrète (6.28) par $\displaystyle\frac{1}{k}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt$, et on somme sur $p\in\mathcal{T}$ et $n = 0,\ldots,N_T$, on obtient alors :

$$T_1 + T_2 \leq 0 \tag{6.29}$$

avec :

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\frac{|u_p^{n+1}-\kappa| - |u_p^n-\kappa|}{k}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\frac{1}{m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,t)\,dx\,dt\;\times$$
$$\times\Bigg\{\sum_{q\in N(p)}\Big(v_{pq}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - F(u_p^n\perp\kappa, u_q^n\perp\kappa)\Big]$$
$$-v_{qp}^n\Big[F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - F(u_q^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa)\Big]\Big)$$
$$+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big(v_{pa}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}_a^n\top\kappa) - F(u_p^n\perp\kappa, \overline{u}_a^n\perp\kappa)\Big]$$
$$-v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - F(\overline{u}_a^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa)\Big]\Big)\Bigg\}\leq 0$$

On va montrer que

$$T_{10} + T_{20} \leq T_{30}$$

en comparant T_1 à T_{10} et T_2 à T_{20}, cette comparaison fera apparaître les termes de mesures introduits dans T_{30}.

Comparaison de T_{10} *et* T_1

En utilisant la définition de $u_{\mathcal{T},k}$ et en intégrant en temps il vient :

$$T_{10} = \sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{n=0}^{N_T}|u_p^n-\kappa|\int_p\Big(\varphi(x,t^n - \varphi(x,t^{n+1})\Big)\,dx - \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx$$

En reportant les différences sur $|u_{\mathcal{T},k} - \kappa|$ on peut encore écrire T_{10} sous la forme suivante :

$$T_{10} = \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{n=0}^{N_T} \frac{|u_p^{n+1} - \kappa| - |u_p^n - \kappa|}{k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \varphi(x, t^{n+1})\, dx\, dt$$
$$+ \int_\Omega \Big(|u_{\mathcal{T}}^0(x) - \kappa| - |u_0(x) - \kappa| \Big)\, \varphi(x, 0)\, dx$$

où $u_{\mathcal{T}}^0(x) = u_p^0$ si $x \in p$ $(p \in \mathcal{T})$.
Comme la fonction $|. - \kappa|$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à un et d'après la régularité de φ, on obtient :

$$|T_1 - T_{10}| \leq \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1} - u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p |\varphi_t(x,t)|\, dx\, dt + \int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0(x) - u_0(x)|\, \varphi(x, 0)\, dx$$

Ce qui donne :

$$|T_1 - T_{10}| \leq \iint_{\Omega\times I\!R_+} |\varphi_t(x,t)|\, d\mu_{\mathcal{T},k}^{(0)}(x,t) + \int_\Omega \varphi(x,0)\, d\mu_{\mathcal{T}}(x) \tag{6.30}$$

où les mesures $\mu_{\mathcal{T},k}^{(0)} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$ et $\mu_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ sont définies de la façon suivante :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu_{\mathcal{T},k}^{(0)}(x,t) = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} |u_p^{n+1} - u_p^n| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p |\psi(x,t)|\, dx\, dt \qquad \forall\ \psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$$

$$\int_\Omega \psi(x)\, d\mu_{\mathcal{T}}(x) = \int_\Omega |u_{\mathcal{T}}^0(x) - u_0(x)|\, |\psi(x)|\, dx \qquad \forall\ \psi \in C(\overline{\Omega})$$

D'après (6.19) on a :

$$\mu_{\mathcal{T},k}^{(0)}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) \leq C\sqrt{h} \tag{6.31}$$

où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F.

De plus d'après (2.48) page 54 chapitre 2 $u_{\mathcal{T}}^0$ tend vers u_0 lorsque h tend vers 0 dans $L^1(\Omega)$, et donc :

$$\lim_{h\to 0} \mu_{\mathcal{T}}(\overline{\Omega}) = 0 \tag{6.32}$$

Comparaison de T_{20} ***et*** T_2

Décomposons tout d'abord T_{20} sous la forme suivante :

$$T_{20} = T_{20a} + T_{20b}$$

où :

$$T_{20a} = -\iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big[f(u_{\mathcal{T},k}(x,t) \top \kappa) - f(u_{\mathcal{T},k}(x,t) \perp \kappa) \Big]\, v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt$$

et :

$$T_{20b} = \iint_{\Gamma_v^- \times I\!R_+} \Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\top\kappa\Big) \\ - F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \, v(\tau,t).n(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

$$+ \iint_{\Gamma_v^+ \times I\!R_+} \Big[F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\top\kappa, \overline{u}(\tau,t)\top\kappa\Big) \\ - F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T},k})(\tau,t)\bot\kappa, \overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \, v(\tau,t).n(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

Comme pour T_{10}, en utilisant la définition de $u_{\mathcal{T},k}$ et la formule de Green, on obtient :

$$T_{20a} = -\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}} \Big[f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\bot\kappa)\Big] \Bigg(\sum_{q\in N(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}} \varphi(\tau,t)\, v(\tau,t).n_{pq}\, d\tau\, dt \\ + \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a \varphi(\tau,t)\, v(\tau,t).n\, d\tau\, dt \Bigg)$$

puisque $\mathrm{div} v(x,t) = 0$ pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega} \times I\!R_+$.

Remarquons alors que pour tout $n \in I\!N$, $p \in \mathcal{T}$ et $q \in N(p)$, on a :

$$v(\tau,t).n_{pq} = \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0 - \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0 \qquad \forall\ (\tau,t) \in \sigma_{pq} \times [t^n, t^{n+1}[$$

et donc :

$$T_{20a} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)} \Bigg\{ \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \\ \Big[F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa) - F(u_p^n\bot\kappa, u_q^n\bot\kappa) + f(u_p^n\bot\kappa) \\ + f(u_q^n\top\kappa) - F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - f(u_q^n\bot\kappa) + F(u_p^n\bot\kappa, u_q^n\bot\kappa)\Big] \\ - \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \\ \Big[F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa) + f(u_p^n\bot\kappa) - F(u_q^n\bot\kappa, u_p^n\bot\kappa) \\ + f(u_q^n\top\kappa) - F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - f(u_q^n\bot\kappa) + F(u_q^n\bot\kappa, u_p^n\bot\kappa)\Big]\Bigg\} \\ - \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a v(\tau,t).n(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt\, \Big[f(u_p^n\top\kappa) - f(u_p^n\bot\kappa)\Big]$$

De plus :

$$T_{20b} = \sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a \Big(v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0$$

$$\Big[F(u_p^n\top\kappa,\overline{u}(\tau,t)\top\kappa)-F(u_p^n\bot\kappa,\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\Big]\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

$$-\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a\Big(-v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0\Big[F(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa,u_p^n\top\kappa)-F(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)\Big]\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$

Remarquons alors que, comme div$v$=0, d'après (6.17), on a :

$$T_2=\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\frac{1}{m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_p\varphi(x,t)\,dx\,dt\,\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{q\in N(p)}\Big\{v_{pq}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa,u_q^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(u_p^n\bot\kappa,u_q^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]$$
$$-v_{qp}^n\Big[F(u_q^n\top\kappa,u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(u_q^n\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]\Big\}+$$
$$+\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big\{v_{pa}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa,\overline{u}_a^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(u_p^n\bot\kappa,\overline{u}_a^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]$$
$$-v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n\top\kappa,u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(\overline{u}_a^n\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]\Big\}\Bigg)\le 0$$

par conservativité, l'expression précédente s'écrit encore :

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\sum_{q\in N(p)}\Bigg\{\frac{1}{m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_p\varphi(x,t)\,dx\,dt\,\times$$
$$\times\Big(v_{pq}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa,u_q^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(u_p^n\bot\kappa,u_q^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]$$
$$+v_{qp}^n\Big[f(u_p^n\top\kappa)-F(u_q^n\top\kappa,u_p^n\top\kappa)+F(u_q^n\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)-f(u_p^n\bot\kappa)\Big]\Big)$$
$$+\frac{1}{m(q)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_q\varphi(x,t)\,dx\,dt\,\times$$
$$\times\Big(v_{qp}^n\Big[F(u_q^n\top\kappa,u_p^n\top\kappa)-f(u_q^n\top\kappa)+f(u_q^n\bot\kappa)-F(u_q^n\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)\Big]$$
$$+v_{pq}^n\Big[f(u_q^n\top\kappa)-F(u_p^n\top\kappa,u_q^n\top\kappa)+F(u_p^n\bot\kappa,u_q^n\bot\kappa)-f(u_q^n\bot\kappa)\Big]\Big)\Bigg\}$$
$$+\sum_{n=0}^{N_T}\sum_{p\in\mathcal{T}}\frac{1}{m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_p\varphi(x,t)\,dx\,dt\,\times$$
$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)}\Big\{v_{pa}^n\Big[F(u_p^n\top\kappa,\overline{u}_a^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(u_p^n\bot\kappa,\overline{u}_a^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]$$
$$-v_{ap}^n\Big[F(\overline{u}_a^n\top\kappa,u_p^n\top\kappa)-f(u_p^n\top\kappa)-F(\overline{u}_a^n\bot\kappa,u_p^n\bot\kappa)+f(u_p^n\bot\kappa)\Big]\Big\}$$

Ainsi, d'après les dernières expressions de T_{20a}, T_{20b} et T_2, on a :

$$|T_2-T_{20}|\le\sum_{i=1}^{8}A_i \tag{6.33}$$

où :

$$A_1 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|$$
$$\Big|F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(u_p^n\perp\kappa, u_q^n\perp\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

$$A_2 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(q)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_q \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|$$
$$\Big|f(u_q^n\top\kappa) - F(u_p^n\top\kappa, u_q^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(u_p^n\perp\kappa, u_q^n\perp\kappa) - f(u_q^n\perp\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

$$A_3 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|$$
$$\Big|f(u_p^n\top\kappa) - F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(u_q^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

$$A_4 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in N(p)\\ u_p^n>u_q^n}} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(q)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_q \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|$$
$$\Big|F(u_q^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa) - f(u_q^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(u_q^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa) - f(u_q^n\perp\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

$$A_5 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_a \Big(v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|$$
$$\Big|F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}_a^n\top\kappa) - f(u_p^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(u_p^n\perp\kappa, \overline{u}_a^n\perp\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

$$A_6 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Big|f(u_p^n\top\kappa) - F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa)\Big| + \Big|F(\overline{u}_a^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa) - f(u_p^n\perp\kappa)\Big|$$
$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_a \Big(-v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0 \left|\varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\,m(p)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_p \varphi(x,s)\,dx\,ds\right|\,d\tau\,dt$$

$$A_7 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_a \Big(v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0\, \varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$
$$\Big|F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - F(u_p^n\top\kappa, \overline{u}_a^n\top\kappa) - F(u_p^n\perp\kappa, \overline{u}(\tau,t)\perp\kappa) + F(u_p^n\perp\kappa, \overline{u}_a^n\perp\kappa)\Big|$$

$$A_8 = \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}}\!\!\int_a \Big(-v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0\, \varphi(\tau,t)$$
$$\Big|F(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa) - F(\overline{u}_a^n\perp\kappa, u_p^n\perp\kappa) - F(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, u_p^n\top\kappa) + F(\overline{u}_a^n\top\kappa, u_p^n\top\kappa)\Big|\,d\tau\,dt$$

Traitons le terme A_1, pour cela remarquons que pour tout $\kappa \in I\!R$, tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$ tel que $u_p^n > u_q^n$, on a :

$$0 \leq F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - f(u_p^n \top \kappa) \leq \max_{u_q^n \leq b \leq c \leq u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c) \Big) \tag{6.34}$$

En effet comme $u_q^n < u_p^n$ alors $u_q^n \top \kappa \leq u_p^n \top \kappa$ et donc d'après la décroissance de F par rapport à son deuxième argument, on a :

$$0 \leq F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - F(u_p^n \top \kappa, u_p^n \top \kappa) = F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - f(u_p^n \top \kappa)$$

Pour établir l'autre inégalité, il suffit alors de considérer tout les cas de figure possibles :

- $\kappa \geq u_p^n > u_q^n$

$$F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - f(u_p^n \top \kappa) = F(\kappa, \kappa) - f(\kappa) \leq \max_{u_q^n \leq b \leq c \leq u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c) \Big)$$

- $u_p^n \geq \kappa \geq u_q^n$

$$F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - f(u_p^n \top \kappa) = F(u_p^n, \kappa) - f(u_p^n) \leq \max_{u_q^n \leq b \leq c \leq u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c) \Big)$$

- $u_p^n > u_q^n \geq \kappa$

$$F(u_p^n \top \kappa, u_q^n \top \kappa) - f(u_p^n \top \kappa) = F(u_p^n, u_q^n) - f(u_p^n) \leq \max_{u_q^n \leq b \leq c \leq u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c) \Big)$$

De la même façon, on montre :

$$0 \leq F(u_p^n \perp \kappa, u_q^n \perp \kappa) - f(u_p^n \perp \kappa) \leq \max_{u_q^n \leq b \leq c \leq u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c) \Big) \tag{6.35}$$

De plus pour tout $\tau \in \sigma_{pq}$ et tout $t \in [t^n, t^{n+1}[$, on a :

$$\begin{aligned} &\left| \varphi(\tau,t) - \frac{1}{k\, m(p)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \!\! \int_p \varphi(x,s)\, dx\, ds \right| \\ &\qquad \leq \frac{(h+k)}{m(p)\, k} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \!\! \int_p \int_0^1 \Big| \varphi_t\Big(z(x,\tau,t,s,\theta)\Big)\Big| + \Big|\nabla\varphi\Big(z(x,\tau,t,s,\theta)\Big)\Big|\, d\theta\, dx\, ds \end{aligned} \tag{6.36}$$

où $z(x,\tau,t,s,\theta) = \Big(\tau + \theta\,(x-\tau), t + \theta\,(s-t)\Big)$.

Ainsi, d'après les inégalités (6.34), (6.35) et (6.36), il vient :

$$A_1 \leq \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla\varphi(x,t)| \Big)\, d\mu^{(1)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.37}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(1)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n \in I\!N} \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{q \in I\!N(p) \\ u_p^n > u_q^n}} \max_{u_q^n \le b \le c \le u_p^n} \Big(F(c,b) - f(c)\Big)\, \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau + \theta\,(x-\tau), t + \theta\,(s-t)\Big)\Big|\; d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

De la même façon, on obtient :

$$A_2 \le \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla \varphi(x,t)|\Big)\, d\mu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.38}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(2)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n \in I\!N} \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{q \in I\!N(p) \\ u_p^n > u_q^n}} \max_{u_q^n \le b \le c \le u_p^n} \Big(F(c,b) - f(b)\Big)\, \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{pq}\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau + \theta\,(x-\tau), t + \theta\,(s-t)\Big)\Big|\; d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

de plus :

$$A_3 \le \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla \varphi(x,t)|\Big)\, d\mu^{(3)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.39}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(3)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n \in I\!N} \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{q \in I\!N(p) \\ u_p^n > u_q^n}} \max_{u_q^n \le b \le c \le u_p^n} \Big(f(c) - F(b,c)\Big)\, \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau + \theta\,(x-\tau), t + \theta\,(s-t)\Big)\Big|\; d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

et enfin :

$$A_4 \le \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla \varphi(x,t)|\Big)\, d\mu^{(4)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.40}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(4)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n \in I\!N} \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{q \in I\!N(p) \\ u_p^n > u_q^n}} \max_{u_q^n \le b \le c \le u_p^n} \Big(f(c) - F(b,c)\Big)\, \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{pq}} \Big(v(\tau,t).n_{qp}\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau + \theta\,(x-\tau), t + \theta\,(s-t)\Big)\Big|\; d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

On traite les termes de bord A_5 et A_6 de la même façon, il vient :

$$A_5 \le \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla \varphi(x,t)|\Big)\, d\mu^{(5)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.41}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(5)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n\in I\!N} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \max_{(\overline{u}^n_a \perp u^n_p)\le b\le c\le(\overline{u}^n_a \top u^n_p)} \Big(F(c,b) - f(c)\Big) \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$
$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a \Big(v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau+\theta\,(x-\tau), t+\theta\,(s-t)\Big)\Big|\, d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

et :

$$A_6 \le \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla\varphi(x,t)|\Big)\, d\mu^{(6)}_{\mathcal{T},k}(x,t) \tag{6.42}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\overline{\Omega} \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \psi(x,t)\, d\mu^{(6)}_{\mathcal{T},k}(x,t) = \sum_{n\in I\!N} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \max_{(\overline{u}^n_a \perp u^n_p)\le b\le c\le(\overline{u}^n_a \top u^n_p)} \Big(f(c) - F(b,c)\Big) \frac{2\,(h+k)}{m(p)\,k}$$
$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_a \Big(-v(\tau,t).n(\tau)\Big)\top 0 \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_p \int_0^1 \Big|\psi\Big(\tau+\theta\,(x-\tau), t+\theta\,(s-t)\Big)\Big|\, d\theta\, dx\, ds\, d\tau\, dt$$

Pour traiter A_7 et A_8 commençons par remarquer que :

$$\Big|F(u^n_p\top\kappa, \overline{u}(\tau,t)\top\kappa) - F(u^n_p\top\kappa, \overline{u}^n_a\top\kappa) - F(u^n_p\perp\kappa, \overline{u}(\tau,t)\perp\kappa) + F(u^n_p\perp\kappa, \overline{u}^n_a\perp\kappa)\Big| \le 2\,M_2\,|\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}^n_a|$$

et

$$\Big|F(\overline{u}(\tau,t)\perp\kappa, u^n_p\perp\kappa) - F(\overline{u}^n_a\perp\kappa, u^n_p\perp\kappa) - F(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, u^n_p\top\kappa) + F(\overline{u}^n_a\top\kappa, u^n_p\top\kappa)\Big| \le 2\,M_1\,|\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}^n_a|$$

Ainsi :

$$A_7 + A_8 \le \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \varphi(\tau,t)\, d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) \tag{6.43}$$

où pour tout $\psi \in C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$, on a :

$$\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \psi(\tau,t)\, d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) = 2\,(M_1+M_2) \int_{\partial\Omega}\int_{I\!R_+} \Big|v(\tau,t).n(\tau)\Big|\, |\psi(\tau,t)|\, |\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t)|\, d\tau\, dt$$

où $\overline{u}_{\mathcal{T},k}(\tau,t) = \overline{u}^n_a$ si $\tau \in a$, $a \in \mathcal{A}_{ext}(p)$, $p \in \mathcal{T}$ et $t \in [t^n, t^{n+1}[$, $n \in I\!N$.

On a alors pour tout $T \in]0,+\infty[$:

$$\sum_{i=1}^{6} \mu^{(i)}_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) = 2\,(h+k) \sum_{n\in I\!N} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{q\in I\!N(p)\\ u^n_p > u^n_q}} \Bigg[v^n_{pq} \Bigg(\max_{u^n_q \le b \le c \le u^n_p} \Big(F(c,b) - f(c)\Big) + \max_{u^n_q \le b \le c \le u^n_p} \Big(F(c,b) - f(b)\Big)\Bigg) + v^n_{qp} \Bigg(\max_{u^n_q \le b \le c \le u^n_p} \Big(f(c) - F(b,c)\Big) + \max_{u^n_q \le b \le c \le u^n_p} \Big(f(c) - F(b,c)\Big)\Bigg)\Bigg]$$
$$+ 2\,(h+k) \sum_{n\in I\!N} \sum_{p\in\mathcal{T}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{ext}(p)} \Bigg(v^n_{pa} \max_{(\overline{u}^n_a \perp u^n_p) \le b \le c \le (\overline{u}^n_a \top u^n_p)} \Big(F(c,b) - f(c)\Big) + v^n_{ap} \max_{(\overline{u}^n_a \perp u^n_p) \le b \le c \le (\overline{u}^n_a \top u^n_p)} \Big(f(c) - F(b,c)\Big)\Bigg)$$

et donc d'après (6.18), il vient :

$$\sum_{i=1}^{6} \mu^{(i)}_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) \le C\,\sqrt{h} \tag{6.44}$$

pour tout $T \in]0,+\infty[$ et où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F, v, F et de α.

De plus, puisque $\overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$, on montre que pour tout $T \in]0,+\infty[$:

$$\lim_{h\to 0} \overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\Big(\partial\Omega \times [0,T]\Big) = 0 \tag{6.45}$$

On établit ce résultat, par “carte locale” pour se ramener à un hyperplan de $I\!R^d$, comme on a montré (2.48) page 54.

Conclusion :

On reporte (6.30), (6.33), (6.37), (6.38), (6.39), (6.40), (6.41), (6.42) et (6.43) dans (6.29), il vient :

$$T_{10} + T_{20} \le \iint_{\Omega\times I\!R_+} \Big(|\varphi_t(x,t)| + |\nabla\varphi(x,t)|\Big)\, d\mu_{\mathcal{T},k}(x,t) + \int_\Omega \varphi(x,0)\, d\mu_{\mathcal{T}}(x) + \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \varphi(\tau,t)\, d\overline{\mu}_{\mathcal{T},k}(\tau,t$$

où

$$\mu_{\mathcal{T},k} = \sum_{i=0}^{6} \mu^{(i)}_{\mathcal{T},k}$$

D'après (6.31) et (6.44), on a :

$$\mu_{\mathcal{T},k}\Big(\overline{\Omega} \times [0,T]\Big) \le C\,\sqrt{h}$$

où C ne dépend que de T, u_0, $\overline{u}$, u, f, v, η, Ω et de F, v, F et de α.
De plus d'après (6.32) et (6.45), on a :

$$\lim_{h\to 0} \mu_{\mathcal{T}}\left(\overline{\Omega}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \overline{\mu}_{\mathcal{T},k}\left(\partial\Omega \times [0,T]\right) = 0$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 6.3.

6.5 Définition d'une solution processus entropique

Afin de définir la notion de solution processus entropique, on définit comme dans [34], une notion de trace pour $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$.

Lemme 6.4 *Comme Ω est un domaine polygonal ($d=2$) ou polyèdrique ($d=3$), il existe N_d sous ensembles de $\partial\Omega$ inclus dans différents hyperplans de $I\!R^d$ tels que en notant $\partial\Omega_1$, ..., $\partial\Omega_{N_d}$ ces ensembles, on ait $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{N_d} \partial\Omega_i$.
Soit $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$, on note $U = \|\mu\|_\infty$ et $\tilde{\mu} \in L^\infty(I\!R^d \times I\!R_+ \times]0,1[)$ telle que :*

$$\tilde{\mu}(x,t,\alpha) = \begin{cases} \mu(x,t,\alpha) & \text{si } x \in \Omega,\ t \in I\!R_+,\ \alpha \in [0,1[\\ \\ 0 & \text{si } x \in (I\!R^d \setminus \Omega),\ t \in I\!R_+,\ \alpha \in [0,1[\end{cases}$$

Alors, il existe $\gamma\mu \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$, et il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$, $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$, telle que, pour tout $g \in C([-U,U])$:

$$\lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\varepsilon_l} \int_0^1 g(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha))\, d\alpha\, ds\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$
$$= \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 g(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) d\alpha\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\partial\Omega \times I\!R_+)$, où $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\, s$ pour tout $\tau \in \partial\Omega$ et $s \in [\varepsilon_l, 2\varepsilon_l]$, pour tout $l \in I\!N$ et où on rappelle que n est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

Démonstration du lemme 6.4 :

Remarquons que pour tout $g \in C([-U,U])$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \int_0^1 g(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha))\, d\alpha\, ds \right| \le \|g\|_{C([-U,U])}$$

Donc, d'après la séparabilité de l'ensemble des fonctions continues sur $[-U,U]$ et d'après la relative sequentielle compacité des bornés de $L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$ pour la topologie faible $\star$, en utilisant un procédé diagonal, il existe une suite, $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que

$\lim_{l\to+\infty}\varepsilon_l = 0$ et telle que pour tout $g \in C([-U,U])$ il existe $U_g \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$ tels que :

$$\lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\,\varepsilon_l} \int_0^1 g(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha))\, d\alpha\, ds\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$
$$= \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} U_g(\tau,t)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\partial\Omega \times I\!R_+)$.
Soit $i = 1,\dots,N_d$, et $(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+$, on suppose $\tau \notin \partial(\partial\Omega_i)$, où $\partial(\partial\Omega_i)$ est le bord de $\partial\Omega_i$ dans $I\!R^{d-1}$.
On note alors :

$$F_{(\tau,t)} = \Big\{ g \in C([-U,U]) \;; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{m(B_d((\tau,t),\varepsilon))} \int_{B_d((\tau,t),\varepsilon)} U_g(\tau,t)\, d\tau\, dt \text{ existe dans } I\!R \Big\}$$

où :

$$B_d((\tau,t),\varepsilon) = \{(\gamma,s) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+ \;;\; \|(\tau,t)-(\gamma,s)\|_d \le \varepsilon\}$$

en notant $\|.\|_d$ la norme Euclidienne de $I\!R^d$.
Si $g \in F_{(\tau,t)}$, on note :

$$\overline{U}_g(\tau,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{m(B_d((\tau,t),\varepsilon))} \int_{B_d((\tau,t),\varepsilon)} U_g(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

On définit $T_{(\tau,t)} : \begin{array}{ccc} F_{(\tau,t)} & \longrightarrow & I\!R \\ g & \longmapsto & \overline{U}_g(\tau,t) \end{array}$, alors $F_{(\tau,t)}$ est un espace vectoriel qui contient les constantes et $T_{(\tau,t)}$ est une forme linéaire positive sur $F_{(\tau,t)}$ donc d'après une version modifiée du théorème de Hahn-Banach (voir [16]), on peut prolonger $T_{(\tau,t)}$ en $\overline{T}_{(\tau,t)}$ forme linéaire et positive sur $C([-U,U])$.
Alors d'après le théorème de Riesz, il existe une mesure sur les boréliens de $[-U,U]$ telle que :

$$\overline{T}_{(\tau,t)}(g) = \overline{U}_g(\tau,t) = \int_{-U}^{U} g(\lambda)\, d\nu_{(\tau,t)}(\lambda) \quad \text{pour tout } g \in F_{(\tau,t)}$$

Remarque 6.4 *ν est une mesure de probabilité car $\mathbf{1} : \lambda \mapsto 1 \in F_{(\tau,t)}$ et $\overline{U}_{\mathbf{1}}(\lambda) = 1$ donc :*

$$\int_{-U}^{U} d\nu_{(\tau,t)}(\lambda) = 1$$

Soit $g \in C([-U,U])$, dire que $g \in F_{(\tau,t)}$ signifie que (τ,t) est un point de Lebesgue de U_g (i.e. $\overline{U}_g(\tau,t)$ existe). Or une propriété des points de Lebesgue (voir [33]) est que

$$\overline{U}_g(\tau,t) = U_g(\tau,t) \quad \text{p.p. } (\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+$$

Donc :
$$U_g(\tau,t)=\int_{-U}^{U} g(\lambda)\,d\nu_{(\tau,t)}(\lambda)$$
pour tout $g\in C([-U,U])$, p.p. $(\tau,t)\in\partial\Omega_i\times I\!R_+$, pour tout $i=1,\dots,N_d$.
Alors d'après [17], il existe $\gamma\mu\in L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+\times]0,1[)$ tel que
$$\int_0^1 g(\gamma\mu(\tau,t,\alpha))d\alpha=U_g(\tau,t)\quad \text{p.p. } (\tau,t)\in\partial\Omega\times I\!R_+ \text{ et pour tout } g\in C([-U,U])$$
Ce qui termine la démonstration du lemme 6.4.

Remarque 6.5 *Remarquons que $\gamma\mu$ n'est pas définie de manière unique, elle dépend de la suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ considérée. Toutefois, on montrera dans le lemme 6.5 que $f(\gamma\mu)$ est définie de manière "unique".*

Définissons alors ce qu'est une solution processus entropique :

Définition 6.1 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées.*
Alors $\mu\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+\times[0,1])$ est une solution processus entropique de (6.1), (6.2) et (6.3) si μ vérifie :
$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1|\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,d\alpha\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt+\int_\Omega|u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\&\qquad+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa)-f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,d\alpha\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt\\&-\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 sign(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha))-f(\kappa)\Big)\\&\qquad v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\geq 0\end{aligned}\tag{6.46}$$
pour tout $\varphi\in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+,I\!R_+)$ et pour tout $\kappa\in I\!R$.

Comme pour la formulation entropique, si f est croissante, il n'est pas nécessaire de définir la trace de μ pour caractériser une solution processus entropique. On a dans ce cas le résultat suivant :

Proposition 6.2 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées. On suppose de plus f croissante.*
Alors $\mu\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+\times[0,1])$ est une solution processus entropique de (6.1), (6.2) et (6.3) si et seulement si μ vérifie :
$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1|\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,d\alpha\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt+\int_\Omega|u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\&+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big|f(\mu(x,t,\alpha))-f(\kappa)\Big|\,d\alpha\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt\\&\qquad-\iint_{\Gamma_v^-}\Big|f(\overline{u}(\tau,t))-f(\kappa)\Big)v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\geq 0\end{aligned}\tag{6.47}$$
pour tout $\varphi\in C_c^1\Big((\Omega\times I\!R_+)\cup\Gamma_v^-,I\!R_+\Big)$ et pour tout $\kappa\in I\!R$.
On rappelle que : $\Gamma_v^-=\Big\{(\tau,t)\in\partial\Omega\times I\!R_+\,;\,v(\tau,t).n(\tau)<0\Big\}$

démonstration de la proposition 6.2

Il suffit pour cela d'utiliser l'égalité (6.64) du lemme 6.7, on a alors :

$$f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big)= f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)$$

p.p. $(\tau,t,\alpha)\in\Gamma_v^-\times[0,1]$.
En reportant ce résultat dans (6.46), on obtient (6.47).

Comme il a déja été remarqué $\gamma\mu$ n'est pas unique. Toutefois le terme de bord rencontré dans (6.46) est défini de manière unique. On montre le lemme suivant :

Lemme 6.5 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées. Soit* $\mu\in L^\infty(\Omega\times I\!R_+\times[0,1])$ *solution processus entropique de (6.1), (6.3) et (6.2), i.e. vérifiant (6.46).*
Soit $T\in]0,+\infty[$, $i\in\Big\{1,\ldots,N_d\Big\}$ *et* $\Phi\in L^1(\partial\Omega_i\times[0,T])$, $\kappa\in I\!R$. *On définit :*

$$T_i^{(\varepsilon)}(\Phi)=\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon}\iint_{\partial\Omega_i\times[0,T]}\Big[f\Big(\tilde\mu(x(\tau,s),t)\top\kappa\Big)-f\Big(\tilde\mu(x(\tau,s),t)\bot\kappa\Big)\Big]$$
$$v(x(\tau,s),t).n(\tau)\,\Phi(\tau,t)\,d\tau\,dt\,ds$$

Alors $\lim_{\varepsilon\to0}T_i^{(\varepsilon)}(\Phi)$ *existe, on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to0}T_i^{(\varepsilon)}(\Phi)=\iint_{\partial\Omega_i\times[0,T]}\int_0^1\Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa)-f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\Big]\,d\alpha$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau,t)\,d\tau\,dt.$$

Démonstration du lemme 6.5 :

Remarquons que comme μ est solution processus entropique de (6.1), (6.3), (6.2), on a :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big|\mu(x,t,\alpha)-\kappa\Big|\,d\alpha\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt+\int_\Omega\Big|u_0(x)-\kappa\Big|\,\varphi(x,0)\,dx$$
$$+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big[f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa)-f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big]\,d\alpha\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt\geq0 \tag{6.48}$$

pour tout $\varphi\in C_c^1(\Omega\times I\!R_+,I\!R_+)$.
Soit $\varepsilon>0$, ε petit devant $\delta(\Omega)$, on note :

$$\Omega_\varepsilon=\Big\{x\in\Omega\;;\;d(x,\partial\Omega)\leq\varepsilon\Big\}\quad\text{et}\quad\Omega_{2\varepsilon}=\Big\{x\in\Omega\;;\;\varepsilon\leq d(x,\partial\Omega)\leq2\,\varepsilon\Big\}$$

On définit $A^{(\varepsilon)}$, l'ensemble des points x de $\Omega_\varepsilon\cup\Omega_{2\varepsilon}$ tels que $(\tau(x),s(x))\in\partial\Omega\times[0,2\,\varepsilon]$ est défini de manière unique, où :

$$x=\tau(x)-s(x)\,n(\tau(x))$$

(voir annexe A pour la caractérisation de $A^{(\varepsilon)}$)

On a alors (voir annexe A) :

$$m((\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \setminus A^{(\varepsilon)}) \leq C\,\varepsilon^2 \tag{6.49}$$

où C ne dépend que de Ω.

Remarquons de plus que si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, alors :

$$\Big\{\tau \in \partial\Omega\,;\, \tau \in A^{(\varepsilon_1)}\Big\} \subset \Big\{\tau \in \partial\Omega\,;\, \tau \in A^{(\varepsilon_2)}\Big\}$$

Ainsi, soit $i \in \Big\{1, \ldots, N_d\Big\}$, et $\varphi \in C^1_c(\partial\Omega_i \times I\!R_+)$ alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$supp(\varphi) \subset \Big(\partial\Omega_i \cap A^{(\varepsilon_1)}\Big) \times I\!R_+$$

Soit $\varepsilon < \varepsilon_1$, et $\psi \in C^1_c(]0, 2\,\varepsilon_1[)$, on choisit comme fonction test dans (6.48) $\varphi \times \psi$, on obtient alors :

$$B_i(s) + C_i'(s) + D_i(s) + E_i(s) \geq 0 \quad \text{au sens des distributions sur }]0, 2\,\varepsilon_1[$$

avec :

$$B_i(s) = \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big|\tilde{\mu}(x(\tau, s), t, \alpha) - \kappa\Big|\, d\alpha\, \varphi_t(\tau, t)\, d\tau\, dt$$

$$C_i(s) = -\iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau, s), t, \alpha) \top \kappa) - f(\tilde{\mu}(x(\tau, s), t, \alpha) \perp \kappa)\Big]\, d\alpha \\ v(x(\tau, s), t).n(\tau)\, \varphi(\tau, t)\, d\tau\, dt$$

$$D_i(s) = \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau, s), t, \alpha) \top \kappa) - f(\tilde{\mu}(x(\tau, s), t, \alpha) \perp \kappa)\Big]\, d\alpha \\ v(x(\tau, s), t).\nabla_x \varphi(\tau, t)\, d\tau\, dt$$

$$E_i(s) = \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \Big|u_0(x(\tau, s)) - \kappa\Big|\, \varphi(\tau, 0)\, d\tau$$

où l'on rappelle que $x(\tau, t) = \tau - n(\tau\, s$.

Comme B_i, D_i et $E_i \in L^1(]0, 2\varepsilon_1[) \subset \mathcal{M}(]0, 2\varepsilon_1[) = \Big(C([0, 2\varepsilon_1])\Big)'$, que toute distribution de signe constant est une mesure alors $C_i' \in \mathcal{M}(]0, 2\varepsilon_1[)$. Et donc $C_i \in BV(]0, 2\varepsilon_1[)$, où $BV(]0, 2\varepsilon_1[)$ est l'ensemble des fonctions à variations bornées sur $]0, 2\varepsilon_1[$.
Ainsi, d'après les propriétés de $BV(]0, 2\varepsilon_1[)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} C_i(s)\, ds = \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau, t, \alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau, t, \alpha) \perp \kappa)\Big]\, d\alpha \\ v(\tau, t).n(\tau)\, \varphi(\tau, t)\, d\tau\, dt \tag{6.50}$$

Soit $\Phi \in C(\partial\Omega \times I\!R_+)$ et $C^1(\partial\Omega_j \times I\!R_+)$ pour tout $j = 1, \ldots, N_d$. Notons alors que, $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ tel que :

$$\exists\, \Phi^{(\varepsilon_2)} \in C_c(\partial\Omega_i \times I\!R_+),\ C^1 \text{ par morceaux et telle que :} \tag{6.51}$$

$$\Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+ \ ;\ \Phi^{(\varepsilon_2)}(\tau,t) = \Phi(\tau,t)\Big\} \subset \Big(\partial\Omega_i \cap A^{(\varepsilon_2)}\Big) \times I\!R_+ \tag{6.52}$$

$$m\left(\Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+ \ ;\ \Phi^{(\varepsilon_2)}(\tau,t) \neq \Phi(\tau,t)\Big\}\right) \leq \eta \tag{6.53}$$

$$\exists\, \varepsilon_3,\ \varepsilon_3 < \varepsilon_2, \text{ tel que } \forall\, \varepsilon < \varepsilon_3\ supp(\Phi^{(\varepsilon_2)}) \subset \Big(\partial\Omega_i \cap A^{(\varepsilon)}\Big) \times I\!R_+ \tag{6.54}$$

On définit $B_i^{(\varepsilon,\varepsilon_2)}$, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_3$, par :

$$B_i^{(\varepsilon,\varepsilon_2)} = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \Big[f(\tilde{\mu}(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\tilde{\mu}(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big] \\ v(x(\tau,s),t).n(\tau)\, \Phi^{(\varepsilon_2)}(\tau,t)\, d\tau\, dt\, ds$$

Alors d'après (6.50) et (6.54) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} B_i^{(\varepsilon,\varepsilon_2)} = \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\Big]\, d\alpha \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \Phi^{(\varepsilon_2)}(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

et donc, d'après (6.51), (6.52) et (6.53) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} T_i^{(\varepsilon)}(\Phi) &= \lim_{\varepsilon_2\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} B_i^{(\varepsilon,\varepsilon_2)} \\ &= \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\Big]\, d\alpha\, v(\tau,t).n(\tau)\, \Phi(\tau,t)\, d\tau\, dt \end{aligned}$$

Soit $T \in]0,+\infty[$ et $\Phi \in L^1(\partial\Omega \times [0,T])$ alors il existe $\Big(\Phi^{(n)}\Big)_{n\in I\!N} \subset C_c(\partial\Omega \times [0,T])$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi^{(n)} = \Phi$$

dans $L^1(\partial\Omega \times [0,T])$.
D'après ce qui précède, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_i^{(\varepsilon)}(\Phi^{(n)}) = \iint_{\partial\Omega_i \times [0,T]} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\Big]\, d\alpha \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \Phi^{(n)}(\tau,t)\, d\tau\, dt = T_i(\Phi^{(n)})$$

Ainsi pour tout $n \in I\!N$:

$$\Big|T_i^{(\varepsilon)}(\Phi) - T_i(\Phi)\Big| \leq 2\, \|\Phi^{(n)} - \Phi\|_{L^1(\partial\Omega\times[0,T])} + \Big|T_i^{(\varepsilon)}(\Phi^{(n)}) - T_i(\Phi^{(n)})\Big|$$

En passant à la limite sur ε puis sur n, on obtient le résultat cherché.

6.6 Existence d'une solution processus entropique

La stabilité obtenue dans le lemme 6.1, donne suffisamment de compacité pour passer à la limite dans l'inégalité d'entropie continue (6.24). Ceci permet de montrer le lemme suivant :

Proposition 6.3 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution approchée donnée par (6.13), (6.14), (6.15) et (6.16).*
Alors $u_{\mathcal{T},k}$ converge (à une sous suite près) vers $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ au sens non linéaire faible $\star$ lorsque h tend vers 0. C'est à dire qu'il existe $(h_j)_{j\in I\!N}$, $\lim_{j\to+\infty} h_j = 0$ et telle que pour tout $g \in C([-U,U])$:

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\Omega\times I\!R_+} g(u_{\mathcal{T},k}(x,t))\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 g(\mu(x,t,\alpha))\,d\alpha\,\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$.
De plus μ est solution processus entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. μ vérifie :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,d\alpha\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx \\
&+ \iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,d\alpha\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&- \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 sign(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\Big) \\
&\qquad\qquad v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt \geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$ et tout $\kappa \in I\!R$.

Démonstration de la proposition 6.3 :

D'après la stabilité $L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ de la solution approchée, établie dans le lemme 6.1 :

$$\|\gamma(u_{\mathcal{T},k})\|_{L^\infty(\partial\Omega\times I\!R_+)} \leq \|u_{\mathcal{T},k}\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+)} \leq U$$

D'après [17], il existe une suite $(h_j)_{j\in I\!N}$, $\lim_{j\to+\infty} h_j = 0$, il existe $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ et $\overline{\mu} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ telles que :

$$\lim_{j\to+\infty} \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j}) = \overline{\mu} \text{ non linéaire faible } \star$$

et

$$\lim_{j\to+\infty} u_{\mathcal{T}_j,k_j} = \mu \text{ non linéaire faible } \star$$

C'est à dire que pour tout $g \in C([-U,U])$:

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\Omega\times I\!R_+} g\Big(u_{\mathcal{T}_j,k_j}(x,t)\Big)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 g\Big(\mu(x,t,\alpha)\Big)\,d\alpha\,\varphi(x,t)\,dx\,dt \tag{6.55}$$

pour tout $\varphi \in L^1(\Omega \times I\!R_+)$.
De même :

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} g\Big(\gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\Big)\,\psi(\tau,t)\,d\tau\,dt = \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 g\Big(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\Big)\,d\alpha\,\psi(\tau,t)\,d\tau\,dt \tag{6.56}$$

pour tout $\psi \in L^1(\partial\Omega \times I\!R_+)$.

On va alors passer à la limite dans (6.24). Remarquons que (6.55) permet de passer à la limite dans les termes intégrés sur $\Omega \times I\!R_+$ mais que (6.56) ne le permet pas dans les termes de bord. Pour passer outre ce problème, on utilise le lemme suivant dont la démonstration est donnée, entre autres, dans [7] :

Lemme 6.6 *Soit $K \subset I\!R^N$ $(N \geq 1)$, K compact. Soit $(u_n)_{n\in I\!N}$ une suite bornée de $L^\infty(K)$ et $u \in L^\infty(K\times[0,1])$ telle que u_n converge vers u non linéaire faible $\star$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K g\Big(y,u_n(y)\Big)\,\varphi(y)\,dy = \int_K \int_0^1 g\Big(y,u(y,\alpha)\Big)\,d\alpha\,\varphi(y)\,dy$$

pour tout $g \in C(K \times I\!R, I\!R)$ et tout $\varphi \in L^1(K)$.

Soit $i \in \{1,\ldots,N_d\}$ et $T \in]0,+\infty[$, on note alors :

$$\Gamma^-_{i,v,T} = \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) < 0\Big\}$$

Puisque v est continue par rapport à ses deux arguments, on a :

$$\overline{\Gamma^-_{i,v,T}} = \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) \leq 0\Big\}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma^-_{v,T}} &= \overline{\Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) < 0\Big\}} \\ &= \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) \leq 0\Big\}\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma^+_{v,T}} &= \overline{\Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) > 0\Big\}} \\ &= \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,;\, v(\tau,t).n(\tau) \geq 0\Big\}\end{aligned}$$

Comme $\overline{u} \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$ alors $\overline{u} \in L^1_{loc}(\partial\Omega \times I\!R_+)$ et donc, il existe $(\overline{u}^{(n)})_{n\in I\!N} \subset C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\overline{u}^{(n)} - \overline{u}\|_{L^1_{loc}(\partial\Omega\times I\!R_+)} = 0$$

D'après la régularité de F et le lemme 6.6, il vient :

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\Gamma_v^-} \Big[F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\top\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\bot\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$
$$= \iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1 \Big[F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\top\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\bot\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

Ainsi :

$$\Big|\iint_{\Gamma_v^-} \Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau) \\ \varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt - \iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1 \Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\Big|$$
$$\leq 4\,M_1\,V\,\|\varphi\|_\infty \iint_{\partial\Omega\times[0,T]} \Big|\overline{u}(\tau,t) - \overline{u}^{(n)}(\tau,t)\Big|\,d\tau\,dt$$
$$+ \Big|\iint_{\Gamma_v^-} \Big[F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\top\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\bot\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt - \iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1 \Big[F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\top\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa\Big) \\ - F\Big(\overline{u}^{(n)}(\tau,t)\bot\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa\Big)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\Big|$$

En passant à la limite sur j puis sur n, il vient :

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\Gamma_v^-} \Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa, \gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$
$$= \iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1 \Big[F\Big(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa, \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt \tag{6.57}$$

De même, on montre :

$$\lim_{j\to+\infty} \iint_{\Gamma_v^+} \Big[F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\top\kappa, \overline{u}(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\gamma(u_{\mathcal{T}_j,k_j})(\tau,t)\bot\kappa, \overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt$$
$$= \iint_{\Gamma_v^+}\int_0^1 \Big[F\Big(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa, \overline{u}(\tau,t)\top\kappa\Big) - F\Big(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa, \overline{u}(\tau,t)\bot\kappa\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt \tag{6.58}$$

En utilisant (6.55), (6.57) et (6.58), on peut passer à la limite dans l'inégalité d'entropie continue vérifiée par la solution approchée (6.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt+\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\
&+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa)-f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt\\
&-\iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1\big(F(\overline{u}(\tau,t)\top\kappa,\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa)-F(\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa,\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa)\big)\\
&\qquad\qquad v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\\
&-\iint_{\Gamma_v^+}\int_0^1\big(F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\top\kappa,\overline{u}(\tau,t)\top\kappa)-F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)\bot\kappa,\overline{u}(\tau,t)\bot\kappa)\big)\\
&\qquad\qquad v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\geq 0
\end{aligned}\tag{6.59}$$

pour tout $\kappa\in I\!R$ et tout $\varphi\in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+,I\!R_+)$.
Il ne reste donc plus qu'à retrouver les bons termes de bords. Pour cela, on utilise une technique introduite dans [3].
On remarque tout d'abord que d'après la monotonie de F :

$$F(\overline{u}\top\kappa,\overline{\mu}\top\kappa)-F(\overline{u}\bot\kappa,\overline{\mu}\bot\kappa)\leq sgn(\overline{u}-\kappa)\Big(F(\overline{u},\overline{\mu})-f(\kappa)\Big)$$

p.p. τ, t, α dans $\Gamma_v^-\times]0,1[$, et :

$$-F(\overline{\mu}\top\kappa,\overline{u}\top\kappa)+F(\overline{\mu}\bot\kappa,\overline{u}\bot\kappa)\leq sgn(\overline{u}-\kappa)\Big(-F(\overline{\mu},\overline{u})+f(\kappa)\Big)$$

p.p. τ, t, α dans $\Gamma_v^+\times]0,1[$.
Ainsi d'après les inégalités précédentes et d'après (6.59), μ et $\overline{\mu}$ satisfont l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt+\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\
&-\iint_{\Gamma_v^-}\int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(F(\overline{u}(\tau,t),\overline{\mu}(\tau,t,\alpha))-f(\kappa)\Big)\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\\
&-\iint_{\Gamma_v^+}\int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))-f(\kappa)\Big)\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\\
&+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa)-f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt\geq 0
\end{aligned}\tag{6.60}$$

pour tout $\kappa\in I\!R$ et tout $\varphi\in C_c^1(\overline{\Omega}\times I\!R_+,I\!R_+)$.

On montre alors le résultat suivant qui permet de retrouver les "bons termes de bord" et donc de montrer que μ est solution processus entropique :

Lemme 6.7 *On suppose les hypothèses (6.4) et (6.11) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (6.10), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (6.12). Soit $u_{\mathcal{T},k}$ la solution approchée donnée par (6.13), (6.14), (6.15) et*

(6.16). Soit $\gamma(u_{\mathcal{T},k})$ la "trace" de $u_{\mathcal{T},k}$ définie par (6.23) On note μ (respectivement $\overline{\mu}$) une limite non linéaire faible $\star$ de $u_{\mathcal{T},k}$ (respectivement de $\gamma(u_{\mathcal{T},k})$). De plus, on note $\gamma\mu$ une des traces de μ (celle ci dépend de la suite (ε_l)) définie dans le lemme 6.4.
Alors :

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - F(\overline{u}(\tau,t),\overline{\mu}(\tau,t,\alpha))\Big]\,d\alpha = 0 \quad p.p.(\tau,t)\in\Gamma_v^- \tag{6.61}$$

et

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))\Big]\,d\alpha = 0 \quad p.p.(\tau,t)\in\Gamma_v^+ \tag{6.62}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\times \\ \times\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha \geq 0\end{aligned} \tag{6.63}$$

pour tout $\kappa\in I\!R$, p.p. $(\tau,t)\in\partial\Omega\times I\!R_+$.
Si de plus f est croissante, il vient :

$$f(\overline{u}(\tau,t)) = f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) \quad p.p.\ ((\tau,t),\alpha)\in\Gamma_v^-\times[0,1] \tag{6.64}$$

Démonstration du lemme 6.7 :

Soit $\varepsilon>0$, ε petit devant $\delta(\Omega)$. On rappelle que l'on note :

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{x\in\Omega\ ;\ d(x,\partial\Omega)\leq\varepsilon\Big\} \quad \text{et} \quad \Omega_{2\varepsilon} = \Big\{x\in\Omega\ ;\ \varepsilon\leq d(x,\partial\Omega)\leq 2\,\varepsilon\Big\}$$

On commence par construire une fonction qui tend vers l'indicatrice de Ω. On définit φ_ε par :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \min\left[\max\left(\frac{d(x,\partial\Omega)}{\varepsilon} - 1, 0\right), 1\right]$$

pour tout $x\in\Omega$.
Remarquons alors que :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\Omega\setminus(\Omega_\varepsilon\cup\Omega_{2\varepsilon}) \\ 0 & \text{si } x\in\Omega_\varepsilon \\ \dfrac{s(x)}{\varepsilon} - 1 & \text{si } x\in\Omega_{2\varepsilon}\cap A^{(\varepsilon)} \end{cases}$$

où l'on rappelle que $A^{(\varepsilon)}$ est l'ensemble des points x de $\Omega_\varepsilon\cap\Omega_{2\varepsilon}$ tels que $(\tau(x),s(x))\in\partial\Omega\times[0,2\,\varepsilon]$ est défini de manière unique avec $x=\tau(x)-s(x)\,n(\tau(x))$.
Soit $\Phi\in C(\partial\Omega)$, C^1 sur $\partial\Omega_i$ pour tout $i=1,\ldots,N_d$. On définit $\chi_{\varepsilon,\Phi}\ :\ \overline{\Omega}\longrightarrow I\!R$ par :

$$\chi_{\varepsilon,\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(\tau(x))\,(1-\varphi_\varepsilon(x)) & \text{si } x\in A^{(\varepsilon)} \\ 0 & \text{si } x\in\Omega\setminus(\Omega_\varepsilon\cup\Omega_{2\varepsilon}) \end{cases}$$

On raccorde alors $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ à $(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \setminus A^{(\varepsilon)}$ de telle sorte que $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ soit C^1 par morceau sur $\overline{\Omega}$ et que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\nabla_x \chi_{\varepsilon,\Phi}(x)| \leq \dfrac{C}{\varepsilon} \quad \text{pour tout } x \in \Big(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}\Big)\setminus A^{(\varepsilon)} \\ \\ \qquad\qquad \|\chi_{\varepsilon,\Phi}\|_\infty \leq \|\Phi\|_\infty \end{array} \right. \tag{6.65}$$

où C ne dépend que de Ω (voir en annexe A pour la construction de $\chi_{\varepsilon,\Phi}$).
En dimension 1, si $\Omega =]a, b[$, on a :

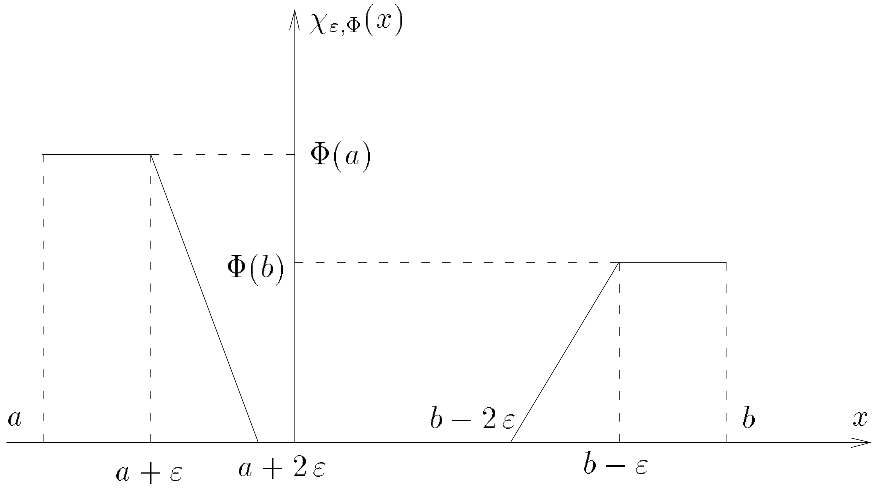

FIG. 6.1 -

Soit $\psi \in C^1_c(I\!R_+, I\!R_+)$, on choisit alors comme fonction test dans (6.60) :

$$\varphi(x,t) = \chi_{\varepsilon,\Phi}(x)\,\psi(t)$$

On obtient :

$$T_{1\varepsilon} + T_{2\varepsilon} + T_{3\varepsilon} + T_{4\varepsilon} + T_{5\varepsilon} \geq 0 \tag{6.66}$$

avec :

$$T_{1\varepsilon} = \iint_{\Omega_{2\varepsilon}\cup\Omega_\varepsilon \times I\!R_+} \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - \kappa|\,\psi_t(t)\,\chi_{\varepsilon,\Phi}(x)\,d\alpha\,dx\,dt$$

$$T_{2\varepsilon} = \int_{\Omega_{2\varepsilon}\cup\Omega_\varepsilon} |u_0(x) - \kappa|\;\psi(0)\,\chi_{\varepsilon,\Phi}(x)\,dx\,dt$$

$$T_{3\varepsilon} = \iint_{\Omega_{2\varepsilon}\times I\!R_+} \int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,v(x,t).\nabla\chi_{\varepsilon,\Phi}(x)\,\psi(t)\,d\alpha\,dx\,dt$$

$$T_{4\varepsilon} = -\iint_{\Gamma_v^-} \int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t) - \kappa)\Big(F(\overline{u}(\tau,t), \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,\chi_{\varepsilon,\Phi}(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

$$T_{5\varepsilon} = \iint_{\Gamma_v^+} \int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\kappa) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))\Big)$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,\chi_{\varepsilon,\Phi}(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

Remarquons tout d'abord que comme $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ reste bornée et que $m(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \leq C\,\varepsilon$ où C ne dépend que de Ω, donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{1\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} T_{2\varepsilon} = 0$$

De plus :

$$m\left(\Big\{\tau \in \partial\Omega\ ;\ \chi_{\varepsilon,\Phi}(\tau) \neq \Phi(\tau)\Big\}\right) \leq C\,\varepsilon$$

où C ne dépend que de Ω.
Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{4\varepsilon} = -\iint_{\Gamma_v^-} \int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(F(\overline{u}(\tau,t),\overline{\mu}(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_{5\varepsilon} = \iint_{\Gamma_v^+} \int_0^1 sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\kappa) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))\Big)$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

Il reste alors à passer à la limite sur $T_{3\varepsilon}$. Pour cela, on introduit $T_{3b\,\varepsilon}$ définit par :

$$T_{3b\,\varepsilon} = \iint_{(\Omega_{2\varepsilon}\cap A^{(\varepsilon)})\times I\!R_+} \int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)$$
$$v(x,t).\nabla\Big[(1-\varphi_\varepsilon(x))\,\Phi(\tau(x))\Big]\,\psi(t)\,d\alpha\,dx\,dt$$

On a (voir annexe A) :

(6.67) $$m((\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \setminus A^{(\varepsilon)}) \leq C\,\varepsilon^2$$

où C ne dépend que de Ω.

D'après (6.65) et (6.67) on a alors :

$$|T_{3b\,\varepsilon} - T_{3\varepsilon}| \leq C\,\varepsilon$$

où C ne dépend que de Ω, ψ, Φ, f, $\overline{u}$, u_0, κ et de v.
Notons :

$$T_{3\,c\varepsilon} = \iint_{\left(\Omega_{2\varepsilon}\cap A^{(\varepsilon)}\right)\times I\!R_+} \int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)$$
$$v(\tau(x),t).\nabla\Big(1-\varphi_\varepsilon(x)\Big)\,\Phi(\tau(x))\,\psi(t)\,d\alpha\,dx\,dt$$

Comme v est régulière, que $m(\Omega_{2\varepsilon}) \leq C\,\varepsilon$, où C ne dépend que de Ω et que Φ est $C(\partial\Omega) \cap C^1(\partial\Omega_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, N_d$, on a :

$$|T_{3b\,\varepsilon} - T_{3c\,\varepsilon}| \leq C\,\varepsilon$$

où C ne dépend que de Ω, ψ, Φ, f, $\overline{u}$, u_0, κ et des dérivées premières de v.

On définit alors $T_{3d\,\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$T_{3d\,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_0^1 \Big(f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top \kappa) - f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \bot \kappa) \Big) \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,ds\,d\tau\,dt$$

où $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\,s$.

Alors d'après la définition de φ_ε et d'après (6.67), on a :

$$|T_{3c\,\varepsilon} - T_{3d\,\varepsilon}| \leq C\,\varepsilon$$

où C ne dépend que de Ω, ψ, Φ, f, $\overline{u}$, u_0, κ et de v.

On utilise alors le résultat montré dans le lemme 6.4. Il existe donc une suite $(\varepsilon_l)_{l \in I\!N}$, telle que $\lim\limits_{l \to +\infty} \varepsilon_l = 0$ et il existe $\gamma\mu \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+ \times [0,1])$, tels que :

$$\lim_{l \to +\infty} T_{3\,d\varepsilon_l} = \iint_{\partial\Omega \times I\!R_+} \int_0^1 \Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \kappa) \Big) \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt$$

En passant à la limite sur l dans (6.66), on obtient :

$$\begin{aligned} &\iint_{\Gamma_v^-} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t) - \kappa) \times \\ &\qquad \times \Big(F(\overline{u}(\tau,t), \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa) \Big) \Big] v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt \\ (6.68)\quad &\iint_{\Gamma_v^+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \kappa) + sgn(\overline{u}(\tau,t) - \kappa) \times \\ &\qquad \times \Big(f(\kappa) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha), \overline{u}(\tau,t)) \Big) \Big] v(\tau,t).n(\tau)\,\Phi(\tau)\,\psi(t)\,d\alpha\,d\tau\,dt \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $\Phi \in C(\partial\Omega, I\!R_+)$ telle que $\Phi \in C^1(\partial\Omega_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, N_d$, tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$ et tout $\kappa \in I\!R$.
Ainsi :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t) - \kappa) \\ \Big(F(\overline{u}(\tau,t), \overline{\mu}(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa) \Big) \Big]\ v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha \geq 0$$

p.p. $(\tau, t) \in \Gamma_v^-$, et :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\perp\kappa) + sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa) \\ \Big(f(\kappa) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))\Big)\Big] v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

p.p. $(\tau, t) \in \Gamma_v^+$.
On choisit alors $\kappa > U$ puis $\kappa < U$ successivement dans les deux inégalités précédentes, on obtient alors :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - F(\overline{u}(\tau,t),\overline{\mu}(\tau,t,\alpha))]\, d\alpha = 0 \quad \text{p.p.}(\tau,t) \in \Gamma_v^- \tag{6.69}$$

et

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - F(\overline{\mu}(\tau,t,\alpha),\overline{u}(\tau,t))]\, d\alpha = 0 \quad \text{p.p.}(\tau,t) \in \Gamma_v^+ \tag{6.70}$$

En reportant dans (6.68), on obtient :

$$\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\perp\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\times \\ \times \Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big] v(\tau,t).n(\tau)\, \Phi(\tau)\, \psi(t)\, d\alpha\, d\tau\, dt \geq 0$$

pour tout $\Phi \in C(\partial\Omega, I\!R_+)$ telle que $\Phi \in C^1(\partial\Omega_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, N_d$, tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$ et tout $\kappa \in I\!R$.
Ainsi, pour tout $\kappa \in I\!R$, il existe $V_\kappa \subset \partial\Omega \times I\!R_+$ tel que $m(V_\kappa) = 0$ et tel que :

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\perp\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

pour tout $(\tau, t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V_\kappa$.
Notons $V = \cup_{\kappa\in Q} V_\kappa$, alors $m(V) = 0$ et pour tout $(\tau, t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V$ et tout $\kappa \in Q$, on a :

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\perp\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

Soit $\kappa \in I\!R$, alors il existe $(\kappa_n)_{n\in I\!N} \subset Q$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \kappa_n = \kappa$, ainsi pour tout $(\tau, t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V$ et tout $\kappa \in I\!R$ tel que $\kappa \neq \overline{u}(\tau, t)$:

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\perp\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0 \tag{6.71}$$

On va alors montrer que cette inégalité reste vraie pour $\kappa = \overline{u}$.
Soit $(\tau, t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V$. Soit $(\kappa_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R$ telle que κ_n tend vers $\overline{u}(\tau, t)$ lorsque n tend vers l'infini.

On suppose tout d'abord que pour tout $n \in I\!N$, $\kappa_n < \overline{u}(\tau,t)$ alors d'après (6.71) :

$$\int_0^1 \Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa_n\Big) - f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa_n\Big) \\ - \Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big) - f(\kappa_n)\Big]\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

En passant à la limite sur n, il vient :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\overline{u}(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\overline{u}(\tau,t))]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \\ \geq \int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\overline{u}(\tau,t))]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

De même, en supposant que pour tout $n \in I\!N$, $\kappa_n > \overline{u}(\tau,t)$ et en passant à la limite sur n, on obtient :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\overline{u}(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\overline{u}(\tau,t))]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \\ \geq - \int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\overline{u}(\tau,t))]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

Ainsi d'après les deux inégalités précédentes, on a :

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\overline{u}(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\overline{u}(\tau,t))]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

Et donc on obtient (6.63), c'est à dire que pour tout $(\tau,t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V$ et tout $\kappa \in I\!R$:

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

Montrons alors (6.64). On suppose donc f croissante. Soit $(\tau,t) \in (\Gamma_v^-) \setminus V$, remarquons que d'après la croissance de f, la négativité de $v.n$ et l'inégalité précédente, on a :

$$\int_0^1 \Big[|f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)| - sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)\Big)\Big]\, d\alpha \leq 0 \tag{6.72}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$.
On choisit alors $\kappa = \overline{u}(\tau,t)$, dans l'inégalité précédente, il vient :

$$\int_0^1 |f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa)|\, d\alpha \leq 0$$

Et donc :

$$f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) = f(\overline{u}(\tau,t)) \qquad \text{p.p. } (\tau,t,\alpha) \in \Gamma_v^+ \times]0,1[$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 6.7 ainsi que celle de la proposition 6.3 puisqu'en reportant (6.69), (6.70) dans (6.60), on obtient que $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ est solution processus entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. μ vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,\varphi_t(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt+\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\
&+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top\kappa)-f(\mu(x,t,\alpha)\bot\kappa)\Big)\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,d\alpha\,dx\,dt\\
&-\iint_{\partial\Omega}\int_0^1 \mathrm{sign}\,(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\,\Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha))-f(\kappa)\Big)\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\alpha\,d\tau\,dt\geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.

Remarquons de plus que si f est croissante, en utilisant (6.64), l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\kappa|\,d\alpha\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt+\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\,\varphi(x,0)\,dx\\
&+\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\Big|f(\mu(x,t,\alpha))-f(\kappa)\Big|\,d\alpha\,v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\qquad\qquad-\iint_{\Gamma_v^-}\Big|f(\overline{u}(\tau,t))-f(\kappa)\Big|\,v(\tau,t).n(\tau)\,\varphi(\tau,t)\,d\tau\,dt\geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et tout $\varphi \in C_c^1\Big((\Omega \times I\!R_+) \cup \Gamma_v^-, I\!R_+\Big)$.

6.7 Unicité de la solution processus entropique

On commence tout d'abord par montrer l'unicité de la solution processus entropique dans le cas où f est croissante.

6.7.1 Cas où f est croissante

Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant :

Proposition 6.4 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées et que de plus f est croissante. Soient μ et ν deux solutions processus entropiques de (6.1), (6.2), (6.3), (i.e. vérifiant (6.47)), alors*

$$\mu(x,t,\alpha)=\nu(x,t,\beta)\qquad p.p.\ x,\ t,\ \alpha,\ \beta \in \Omega \times I\!R_+ \times]0,1[\times]0,1[.$$

Démonstration de la proposition 6.4 :

Afin d'établir ce résultat, on utilise le lemme suivant que l'on démontrera par la suite :

Lemme 6.8 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées et que de plus f est croissante. Soient μ et ν deux solutions processus entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.47), alors*

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\nu(x,t,\beta)|\,d\alpha\,d\beta\,\psi_t(t)\,dx\,dt \geq 0 \tag{6.73}$$

pour tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$.

Soit $T \in I\!R_+^\star$, on choisit alors comme fonction test dans (6.73) :

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{T-t}{T} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient :

$$-\frac{1}{T}\iint_{\Omega\times[0,T]}\int_0^1\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\nu(x,t,\beta)|\,d\alpha\,d\beta\,dx\,dt \geq 0$$

Donc :

$$\mu(x,t,\alpha) = \nu(x,t,\beta) \qquad \text{p.p. } x,\ t,\ \alpha,\ \beta \in \Omega\times I\!R_+\times]0,1[\times]0,1[$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 6.4.
Montrons alors le lemme 6.8

Démonstration du lemme 6.8 :

D'après [16] :

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha)-\nu(x,t,\beta)|\,d\alpha\,d\beta\,\varphi_t(x,t)\,dx\,dt \\ +\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1\int_0^1 \Big|f\big(\mu(x,t,\alpha)\big)-f\big(\nu(x,t,\beta)\big)\Big|\,d\alpha\,d\beta \\ v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\,dx\,dt \geq 0\end{aligned} \tag{6.74}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega\times I\!R_+, I\!R_+)$.

On rappelle que l'on note :

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{x\in\Omega\ ;\ d(x,\partial\Omega)\leq\varepsilon\Big\} \quad \text{et} \quad \Omega_{2\varepsilon} = \Big\{x\in\Omega\ ;\ \varepsilon\leq d(x,\partial\Omega)\leq 2\,\varepsilon\Big\}$$

Soit φ_ε définie par :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \min\left[\max\left(\frac{d(x,\partial\Omega)}{\varepsilon} - 1, 0\right), 1\right]$$

pour tout $x \in \Omega$.
Remarquons alors que :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{s(x)}{\varepsilon} - 1 & \text{si } x \in \Omega_{2\varepsilon} \cap A^{(\varepsilon)} \end{cases}$$

où l'on rappelle que $A^{(\varepsilon)}$ est l'ensemble des points x de $\Omega_\varepsilon \cap \Omega_{2\varepsilon}$ tels que $(\tau(x), s(x)) \in \partial\Omega \times [0, 2\,\varepsilon]$ est défini de manière unique avec $x = \tau(x) - s(x)\,n(\tau(x))$ (voir annexe A).
On choisit alors comme fonction test dans (6.74) :

$$\varphi(x,t) = \varphi_\varepsilon(x)\,\psi(t)$$

où $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$. En dimension 1, si $\Omega =]a, b[$, on a :

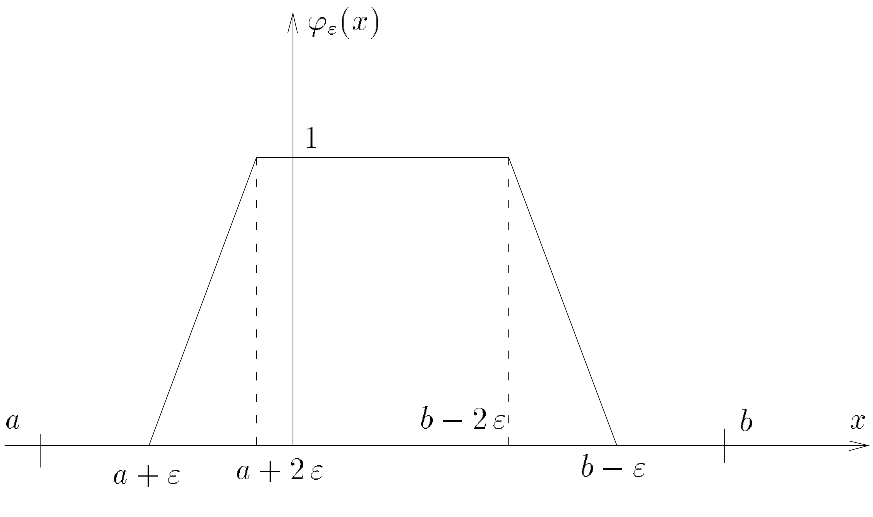

FIG. 6.2 -

On obtient alors :

$$A_{1\varepsilon} + A_{2\varepsilon} \geq 0$$

avec :

$$A_{1\varepsilon} = \iint_{(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon)\times I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - \nu(x,t,\beta)|\,d\alpha\,d\beta\,\psi_t(t)\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx\,dt$$

$$A_{2\varepsilon} = \iint_{\Omega_{2\varepsilon}\times I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \Big| f\Big(\mu(x,t,\alpha)\Big) - f\Big(\nu(x,t,\beta)\Big)\Big| \, d\alpha \, d\beta \, v(x,t).\nabla\varphi_\varepsilon(x)\,\psi(t)\,dx\,dt$$

Comme $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon})$, $\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|\mu\|_\infty \leq U$, $\|\nu\|_\infty \leq U$ et comme $m(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \leq C\,\varepsilon$ où C ne dépend que de Ω, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_{1\varepsilon} = A_1 = \iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - \nu(x,t,\beta)| \, d\alpha \, d\beta \, \psi_t(t)\,dx\,dt$$

On rappelle que $\tilde{\mu} \in L^\infty(I\!R^d \times I\!R_+ \times]0,1[)$ est telle que :

$$\tilde{\mu}(x,t,\alpha) = \begin{cases} \mu(x,t,\alpha) & \text{si } x \in \Omega,\ t \in I\!R_+,\ \alpha \in]0,1[\\ \\ 0 & \text{si } x \in (I\!R^d \setminus \Omega),\ t \in I\!R_+,\ \alpha \in]0,1[\end{cases}$$

et $\tilde{\nu} \in L^\infty(I\!R^d \times I\!R_+ \times]0,1[)$ est telle que :

$$\tilde{\nu}(x,t,\beta) = \begin{cases} \nu(x,t,\beta) & \text{si } x \in \Omega,\ t \in I\!R_+,\ \beta \in]0,1[\\ \\ 0 & \text{si } x \in (I\!R^d \setminus \Omega),\ t \in I\!R_+,\ \beta \in]0,1[\end{cases}$$

On définit alors :

$$A_{3\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \Big| f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big) - f\Big(\tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big)\Big| \, d\alpha \, d\beta \\ v(x(\tau,s),t).n(\tau)\,\psi(t)\,ds\,d\tau\,dt$$

où $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\,s$.
D'après la définition de φ_ε, il existe C ne dépendant que de Ω, f, U, v et de ψ telle que :

$$|A_{2\varepsilon} - A_{3\varepsilon}| \leq C\,\varepsilon$$

On définit $A_{4\varepsilon}$ par :

$$A_{4\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \Big| f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big)\Big| \, d\alpha \, d\beta \\ v(\tau,t).n(\tau)\,\psi(t)\,ds\,d\tau\,dt$$

D'après la régularité de v, il existe C qui ne dépend que de Ω, f, U, ψ et des dérivées premières de v telle que :

$$|A_{3\varepsilon} - A_{4\varepsilon}| \leq C\,\varepsilon$$

En utilisant la croissance de f, on obtient :

$$A_{4\varepsilon} \leq A_{5\varepsilon} + A_{6\varepsilon}$$

avec :

$$A_{5\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big| f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big)\Big| \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, ds\, d\tau\, dt$$

$$A_{6\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big| f\Big(\tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big) - f\Big(\tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big)\Big| \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\beta\, ds\, d\tau\, dt$$

On va alors montrer que ces deux termes tendent (à une sous suite près) vers 0 lorsque ε tend vers 0.
Pour cela, on montre le résultat suivant :

Lemme 6.9 *Soit $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$, $w \in C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$, $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$, $f \in C^1(I\!R, I\!R)$ et $v \in C^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R^d)$ telle que $\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times I\!R_+} |v(x,t)| = V < +\infty$. On définit pour tout $i = 1,\ldots,N_d$ et tout $\varepsilon > 0$:*

$$F_i^{(\varepsilon)} = \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big[f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\top w(\tau,t)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\bot w(\tau,t)\Big)\Big] \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, ds\, d\tau\, dt$$

Alors, il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$ et telle que :

$$\lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} F_i^{(\varepsilon_l)} = \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i\times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top w(\tau,t)\Big) - f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot w(\tau,t)\Big)\Big] \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, d\tau\, dt \tag{6.75}$$

Démonstration du lemme 6.9 :

Soit $T \in I\!R_+^\star$ tel que $supp(\psi) \subset [0,T]$. Soit $i \in \Big\{1,\ldots,N_d\Big\}$, on note :

$$\Gamma_{i,v,T}^- = \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times [0,T]\ ;\ v(\tau,t).n(\tau) < 0\Big\}$$

Remarquons alors que puisque v est continue par rapport à ses deux arguments :

$$\overline{\Gamma_{i,v,T}^-} \subset \Big\{(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times [0,T]\ ;\ v(\tau,t).n(\tau) \le 0\Big\}$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$:

$$F_i^{(\varepsilon)} = \iint_{\overline{\Gamma_{i,v,T}^-}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_0^1 \Big[f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\top w(\tau,t)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\bot w(\tau,t)\Big)\Big] \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, ds\, d\tau\, dt$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 6.10 *Soient A un sous ensemble de $I\!R^d$ $(d \geq 1)$, B un sous ensemble de $I\!R^p$ $(p \geq 1)$ et $f \in C_c(A \times B)$, alors il existe une suite $(f_q)_{q\in I\!N}$ qui converge uniformément vers f lorsque q tend vers l'infini telle que f_q est une somme de q produits de fonctions de $C_c(A)$ et de $L^1(B)$.*

Voir démonstration en annexe B.
On applique ce résultat à :

$$\begin{array}{rcl} G_i \ : \ [-U,U] \times \overline{\Gamma^-_{i,v,T}} & \longrightarrow & I\!R \\ \Big(\mu,(\tau,t)\Big) & \longrightarrow & G_i(\mu,\tau,t) = f\Big(\mu \top w(\tau,t)\Big) - f\Big(\mu \bot w(\tau,t)\Big) \end{array}$$

Alors il existe $(G_{r,i})_{r\in I\!N}$, qui converge uniformément vers G_i lorsque r tend vers $+\infty$, telle que :

$$G_{r,i}(\mu,\tau,t) = \sum_{j=1}^{r} \rho_j(\mu)\, \chi^i_j(\tau,t)$$

où $\rho_j \in C([-U,U])$ et $\chi^i_j \in L^1\left(\overline{\Gamma^-_{i,v,T}}\right)$.

Alors d'après le lemme 6.4, il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$ et telle que :

$$\begin{aligned} \lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\overline{\Gamma^-_{i,v,T}}} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\varepsilon_l} \int_0^1 G_{r,i}\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),\tau,t)\Big)\, d\alpha\, \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, ds\, d\tau\, dt \\ = \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\overline{\Gamma^-_{i,v,T}}} \int_0^1 G_{r,i}\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha),\tau,t\Big)\, d\alpha\, \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\tau\, dt \end{aligned}$$

et donc en passant à la limite sur r, on obtient (6.75). Ce qui termine la démonstration du lemme 6.9.
On peut alors terminer la démonstration du lemme 6.8, c'est à dire montrer que les limites (à une sous suite près) de $A_{5\varepsilon}$ et $A_{6\varepsilon}$ sont nulles.
Comme $\overline{u} \in L^1_{loc}(\partial\Omega \times I\!R_+)$, il existe $(\overline{u}_n)_{n\in I\!N} \subset C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$ telle que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $L^1_{loc}(\partial\Omega \times I\!R_+)$ lorsque n tend vers l'infini.
D'après le lemme 6.9, il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ et telle que $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\varepsilon_l} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big| f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)\Big)\Big| \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, ds\, d\tau\, dt = \\ \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i\times I\!R_+} \int_0^1 \Big| f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big) - f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)\Big|\, d\alpha\, \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\tau\, dt \end{aligned}$$

En passant à la limite sur n, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{l\to+\infty} A_{5\varepsilon_l} = \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i\times I\!R_+} \int_0^1 \Big| f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big) - f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)\Big] \\ \Big((-v(\tau,t).n(\tau))\top 0\Big)\, \psi(t)\, d\alpha\, d\tau\, dt \end{aligned}$$

et comme d'après (6.64), sur $\Gamma_v^- \times [0,1]$, $f(\overline{u}) = f(\gamma\mu)$ p.p., on a :

$$\lim_{l\to+\infty} A_{5\varepsilon_l} = 0$$

De la même façon, il existe une sous suite encore notée $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que :

$$\lim_{l\to+\infty} A_{6\varepsilon_l} = 0$$

Ainsi, pour tout $l \in I\!N$:

$$A_{1\varepsilon_l} + |A_{2\varepsilon_l} - A_{3\varepsilon_l}| + A_{3\varepsilon_l} - A_{4\varepsilon_l}| + A_{5\varepsilon_l} + A_{6\varepsilon_l} \geq 0$$

en passant à la limite sur l, on obtient :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - \nu(x,t,\beta)|\, d\alpha\, d\beta\, \psi_t(t)\, dx\, dt \geq 0$$

pour tout $\psi \in C_c(I\!R_+, I\!R_+)$.
Ce qui termine la démonstration du lemme 6.8 et donc celle de la proposition 6.4.

6.7.2 Cas où f est quelconque

On traite alors le cas où f est quelconque. Comme on le verra dans le paragraphe 6.9, on ne peut pas utiliser la même technique que dans le cas où f est croissante.

Proposition 6.5 *On suppose les hypothèses (6.4), on suppose de plus les hypothèses (6.7) satisfaites. Soient $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ solution processus entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.46). Soit $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$, pour tout $T > 0$ solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.5).*

Alors
$$\mu(x,t,\alpha) = u(x,t) \qquad p.p.\ (x,t,\alpha) \in \Omega \times I\!R_+ \times]0,1[.$$

Démonstration de la proposition 6.5 :

Afin d'établir la proposition 6.5, on utilise le lemme suivant que l'on démontrera par la suite :

Lemme 6.11 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées, on suppose de plus les hypothèses (6.7) satisfaites.*
Soient $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$ solution processus entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.46). Soit $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$, pour tout $T > 0$ solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.5).
Alors

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, \psi_t(t)\, dx\, dt \geq 0 \tag{6.76}$$

pour tout $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$

Soit $T \in I\!R_+^\star$, on choisit alors comme fonction test dans (6.76):

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{T-t}{T} & \text{si } 0 \le t \le T \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient:

$$-\frac{1}{T}\iint_{\Omega\times[0,T]}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, dx\, dt \ge 0$$

Donc:

$$\mu(x,t,\alpha) = u(x,t) \qquad \text{p.p. } x,\ t,\ \alpha \in \Omega \times I\!R_+ \times]0,1[$$

Montrons alors le lemme 6.11.

Démonstration du lemme 6.11 :

D'après [16]:

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top u(x,t)) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot u(x,t))\Big)\, d\alpha\; v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt \ge 0 \tag{6.77}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega \times I\!R_+, I\!R_+)$.

On procède alors comme dans le cas où f est croissante, on choisit comme fonction test dans (6.77) $\varphi(x,t) = \varphi_\varepsilon(x)\,\psi(t)$, où $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$, où φ_ε est définie dans la démonstration du lemme 6.8.
On obtient alors:

$$A_{1\varepsilon} + A_{2\varepsilon} \ge 0$$

avec:

$$A_{1\varepsilon} = \iint_{(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon)\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, \psi_t(t)\, \varphi_\varepsilon(x)\, dx\, dt$$

$$A_{2\varepsilon} = \iint_{\Omega_{2\varepsilon}\times I\!R_+}\int_0^1 \Big(f(\mu(x,t,\alpha)\top u(x,t)) - f(\mu(x,t,\alpha)\bot u(x,t))\Big)\, d\alpha\; v(x,t).\nabla\varphi_\varepsilon(x)\,\psi(t)\, dx\, dt$$

Comme $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon})$, $\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = 1$, $\|\mu\|_\infty \le U$, $\|u\|_\infty \le U$ et comme $m(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \le C\,\varepsilon$ où C ne dépend que de Ω, on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_{1\varepsilon} = A_1 = \iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, \psi_t(t)\, dx\, dt$$

On définit alors :

$$A_{3\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top \tilde{u}(x(\tau,s),t)) - f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \bot \tilde{u}(x(\tau,s),t)) \Big] \, d\alpha \, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, ds\, d\tau\, dt$$

où $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\,s$.
D'après la définition de φ_ε et la régularité de v, il existe C ne dépendant que de Ω, f, U, v et de ψ telle que :

$$|A_{2\varepsilon} - A_{3\varepsilon}| \le C\,\varepsilon$$

On définit alors $A_{4\varepsilon}$ par :

$$A_{4\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) - f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \bot \gamma u(\tau,t)) \Big] \, d\alpha \, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, ds\, d\tau\, dt$$

où γu est la trace de u qui existe puisque $u \in BV(\Omega \times [0,T])$ pour tout $T > 0$, elle est définie par (6.6). Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |A_{3\varepsilon} - A_{4\varepsilon}| = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(V\, \|\psi\|_\infty\, M \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} |\tilde{u}(x(\tau,s),t) - \gamma u(\tau,t)|\, ds\, d\tau\, dt \right) = 0$$

On va alors passer à la limite dans $A_{4\varepsilon}$. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Lemme 6.12 *Soit $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[)$, $w \in C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$, $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$ telle que supp(φ) $\subset [0,T]$. On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées. On définit pour tout $i = 1, \ldots, N_d$ et tout $\varepsilon > 0$:*

$$F_i^{(\varepsilon)} = \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top w(\tau,t)) - f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \bot w(\tau,t)) \Big] \, d\alpha \, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, ds\, d\tau\, dt$$

Alors, il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$ et telle que :

$$\lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} F_i^{(\varepsilon_l)} = \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top w(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot w(\tau,t)) \Big] \, d\alpha \, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt \tag{6.78}$$

Démonstration du lemme 6.12 :

Ce lemme se démontre comme le lemme 6.9.
On peut donc déterminer la limite de $A_{4\varepsilon}$.
Comme $\gamma u \in L^1_{loc}(\partial\Omega \times I\!R_+)$, il existe $(\gamma u_n)_{n\in I\!N} \subset C_c(\partial\Omega \times I\!R_+)$ telle que $\gamma u_n \to \gamma u$ dans $L^1_{loc}(\partial\Omega \times I\!R_+)$ lorsque n tend vers l'infini.
D'après le lemme 6.12, il existe une suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$ et telle que :

$$\lim_{l\to+\infty} \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\,\varepsilon_l} \int_0^1 \Big[f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top \gamma u_n(\tau,t)) \\ - f(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \bot \gamma u_n(\tau,t)) \Big]\, d\alpha\, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, ds\, d\tau\, dt = \\ \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u_n(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \gamma u_n(\tau,t)) \Big]\, d\alpha \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt$$

En passant à la limite sur n, on obtient :

$$\lim_{l\to+\infty} A_{4\varepsilon_l} = - \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \gamma u(\tau,t)) \Big]\, d\alpha \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt$$

Ainsi, pour tout $l \in I\!N$:

$$A_{1\varepsilon_l} + |A_{2\varepsilon_l} - A_{3\varepsilon_l}| + A_{3\varepsilon_l} - A_{4\varepsilon_l}| + A_{4\varepsilon_l} \geq 0$$

en passant à la limite sur l, on obtient :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 |\mu(x,t,\alpha) - u(x,t)|\, d\alpha\, \psi_t(t)\, dx\, dt \geq \iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) \\ - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \gamma u(\tau,t)) \Big]\, d\alpha\, v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt \tag{6.79}$$

pour tout $\psi \in C_c(I\!R_+, I\!R_+)$.
En utilisant une technique introduite dans [34], on montre à l'aide de (6.5) et de (6.63) que :

$$\iint_{\partial\Omega\times I\!R_+} \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \gamma u(\tau,t)) \Big]\, d\alpha \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt \geq 0 \tag{6.80}$$

Rappelons que (6.63) donne l'existence de $V_1 \subset \partial\Omega \times I\!R_+$ tel que $m(V_1) = 0$ et tel que

$$\int_0^1 [f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \kappa) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \bot \kappa) - sgn(\overline{u}(\tau,t) - \kappa) \times \\ \times \Big(f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)) - f(\kappa) \Big) \Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0 \tag{6.81}$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ et pour tout $(\tau,t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V_1$.
De plus, de la même façon que l'on a établit ce résultat, en utilisant (6.5), on montre qu'il existe $V_2 \subset \partial\Omega \times I\!R_+$ tel que $m(V_2)=0$ et tel que :

$$\Big[f(\gamma u(\tau,t)\top\kappa)-f(\gamma u(\tau,t)\bot\kappa)-sgn(\overline{u}(\tau,t)-\kappa)\Big(f(\gamma u(\tau,t))-f(\kappa)\Big)\Big] \tag{6.82}$$
$$v(\tau,t).n(\tau) \geq 0$$

pour tout $\kappa \in I\!R$, p.p. $(\tau,t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus V_2$.

Soit donc $(\tau,t) \in (\partial\Omega \times I\!R_+) \setminus (V_1 \cup V_2)$. On note

$$\mathcal{B}(\tau,t) = \int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\gamma u(\tau,t))-f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\gamma u(\tau,t))\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

On va montrer que :

$$\mathcal{B}(\tau,t) \geq 0$$

On procède en trois étape suivant le signe de la différence entre $\gamma u(\tau,t)-\overline{u}(\tau,t)$.

Etape 1 : $\gamma u(\tau,t) = \overline{u}(\tau,t)$

Il suffit de choisir $\kappa = \overline{u}(\tau,t) = \gamma u(\tau,t)$ dans (6.81), il vient :

$$\mathcal{B}(\tau,t) \geq 0$$

Ce qui termine la première étape.

Etape 2 : $\gamma u(\tau,t) < \overline{u}(\tau,t)$

On décompose alors $\mathcal{B}$ en trois termes, de la façon suivante :

$$\mathcal{B}(\tau,t) = \mathcal{B}_1(\tau,t) + \mathcal{B}_2(\tau,t) + \mathcal{B}_3(\tau,t)$$

où :

$$\mathcal{B}_1(\tau,t) = \int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\,\gamma\mu(\tau,t,\alpha)<\gamma u(\tau,t)\}} \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\gamma u(\tau,t))-f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\gamma u(\tau,t))\Big]$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

$$\mathcal{B}_2(\tau,t) = \int_{\Big\{\alpha\in[0,1]\,;\,\gamma u(\tau,t)\leq\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\leq\overline{u}(\tau,t)\Big\}} \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\gamma u(\tau,t))$$
$$-f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\gamma u(\tau,t))\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

et

$$\mathcal{B}_3(\tau,t) = \int_{\Big\{\alpha\in[0,1]\,;\,\gamma\mu(\tau,t,\alpha)>\overline{u}(\tau,t)\Big\}} \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\gamma u(\tau,t))-f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\gamma u(\tau,t))\Big]$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha$$

Montrons tout d'abord que :

$$\mathcal{B}_1(\tau,t) \geq 0$$

Pour cela, il suffit de choisir $\kappa = \gamma u(\tau,t)$ dans (6.81), on obtient :

$$\int_0^1 \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \perp \gamma u(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\big) f(\gamma u(\tau,t)\big) + \Big] \\ v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha \geq 0$$

En remarquant que :

$$\int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\,\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\geq\gamma u(\tau,t)\}} \Big[f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \top \gamma u(\tau,t)) - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha) \perp \gamma u(\tau,t)) \\ - f(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\big) + f(\gamma u(\tau,t)\big) + \Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, d\alpha = 0$$

on a :

$$\mathcal{B}_1(\tau,t) \geq 0$$

Montrons alors que :

$$\mathcal{B}_2(\tau,t) \geq 0$$

Soit $\alpha \in [0,1]$ tel que $\gamma u(\tau,t) \leq \gamma\mu(\tau,t,\alpha) \leq \overline{u}(\tau,t)$, on choisit alors $\kappa = \gamma\mu(\tau,t,\alpha)$ dans (6.82), il vient :

$$2\left[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big) - f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big)\, v(\tau,t).n(\tau) \right] \geq 0$$

et donc :

$$\mathcal{B}_2(\tau,t) \geq 0$$

On montre enfin que :

$$\mathcal{B}_3(\tau,t) \geq 0$$

Remarquons qu'en choisissant $\kappa = \overline{u}(\tau,t)$ dans (6.82), on a :

$$\left[f\Big(\overline{u}(\tau,t)\Big) - f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big) \right] v(\tau,t).n(\tau) \geq 0$$

On suppose que :

$$\left\{ w \in I\!R\,;\, w > \overline{u}(\tau,t) \text{ et tel que } \left[f(w) - f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big) \right] v(\tau,t).n(\tau) = 0 \right\} \neq \emptyset$$

et que :

$$\min_{w>\overline{u}(\tau,t)} \left\{ w \in I\!R\,;\, \left[f(w) - f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big) \right] v(\tau,t).n(\tau) = 0 \right\} < +\infty$$

On définit alors $u^\star$ tel que

$$u^\star = \min_{w>\overline{u}(\tau,t)} \left\{ w \in I\!R\,;\, \left[f(w) - f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big) \right] v(\tau,t).n(\tau) = 0 \right\}$$

Alors, par définition de $u^\star$, on a :

$$(6.83)\quad \int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\,\overline{u}(\tau,t)\leq\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\leq u^\star\}}\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha\geq 0$$

De plus en choisissant $\kappa = u^\star$ dans (6.81), il vient :

$$\int_0^1\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top u^\star\Big)-f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot u^\star\Big)+f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f(u^\star)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha\geq 0$$

Remarquons que :

$$\int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\leq u^\star\}}\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top u^\star\Big)-f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot u^\star\Big)+f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f(u^\star)\Big]$$
$$v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha=0$$

Ainsi :

$$\int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\gamma\mu(\tau,t,\alpha)>u^\star\}}\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f(u^\star)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha\geq 0$$

De plus, puisque

$$\Big[f(u^\star)-f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)=0$$

on a :

$$\int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\gamma\mu(\tau,t,\alpha)>u^\star\}}\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f(u^\star)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha$$
$$(6.84)\qquad =\int_{\{\alpha\in[0,1]\,;\gamma\mu(\tau,t,\alpha)>u^\star\}}\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\Big)-f\Big(\gamma u(\tau,t)\Big)\Big]\,v(\tau,t).n(\tau)\,d\alpha=0$$

Ainsi d'après (6.83) et (6.84), il vient :

$$\mathcal{B}_3(\tau,t)\geq 0$$

Ce qui termine l'étape 2.

Etape 3 : $\gamma u(\tau,t) > \overline{u}(\tau,t)$

On procède comme dans l'étape 2.
Ainsi en utilisant (6.79) et (6.80) :

$$\iint_{\Omega\times I\!R_+}\int_0^1|\mu(x,t,\alpha)-u(x,t)|\,d\alpha\,\psi_t(t)\,dx\,dt\geq$$

Ceci termine la démonstration du lemme 6.11 et donc celle de la proposition 6.5.

6.8 Démonstration de la convergence du schéma numérique

6.8.1 Démonstration du théorème 6.2

D'après la proposition 6.5, si μ est une solution processus entropique, i.e. vérifiant (6.46) alors $\mu = u$ p.p. où $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+) \cap BV(\Omega \times [0,T])$, pour tout $T \in]0,+\infty[$, est l'unique solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3), i.e. vérifiant (6.5).
Donc d'après la proposition 6.3 :

$$\lim_{h \to 0} u_{\mathcal{T},k} = u$$

non linéaire faible $\star$, et donc dans L^r_{loc} pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$ (voir démonstration de (5.62) page 170). Ce qui termine la démonstration du théorème 6.2.

6.8.2 Démonstration du théorème 6.1

D'après la proposition 6.4, si μ est une solution processus entropique, i.e. vérifiant (6.47) alors μ ne dépend pas de son troisième argument et donc μ est solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3) (remarquons que ce lemme donne aussi l'unicité de la solution entropique).
Donc d'après la proposition 6.3, il existe $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} u_{\mathcal{T},k} = u$$

non linéaire faible $\star$, et donc dans L^r_{loc} pour tout r tel que $1 \leq r < +\infty$ (voir démonstration de (5.62) page 170). De plus u est l'unique solution entropique de (6.1), (6.2), (6.3). Ce qui termine la démonstration du théorème 6.1.

6.9 Quelques remarques sur la trace de la solution entropique

Remarquons que comme on a défini une trace pour $\mu \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+ \times [0,1])$, on peut définir une trace pour $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$. Cette trace n'est pas unique mais, comme u est solution entropique de (6.1), (6.2) et (6.3), son action sur f l'est. On peut montrer les deux lemmes suivants, qui se démontrent comme les lemmes 6.4 et 6.5 :

Lemme 6.13 *Comme Ω est un domaine polygonal ($d = 2$) ou polyèdrique ($d = 3$), il existe N_d sous ensembles de $\partial\Omega$ inclus dans différents hyperplans de $I\!R^d$. Notons $\partial\Omega_1$, …, $\partial\Omega_{N_d}$ ces ensembles, on a alors $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{N_d} \partial\Omega_i$.*

Soit $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$, *on note* $U = \|u\|_\infty$ *et* $\tilde{u} \in L^\infty(I\!R^d \times I\!R_+)$ *telle que :*

$$\tilde{u}(x,t,\alpha) = \begin{cases} u(x,t) & si\ x \in \Omega,\ t \in I\!R_+ \\ \\ 0 & si\ x \in (I\!R^d \setminus \Omega),\ t \in I\!R_+ \end{cases}$$

Alors, il existe $\overline{\gamma}u \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$, *et il existe une suite* $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$, $\lim_{l\to+\infty} \varepsilon_l = 0$, *telle que, pour tout* $g \in C([-U,U])$ *:*

$$\lim_{l\to+\infty} \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\,\varepsilon_l} g(\tilde{u}(x(\tau,s),t))\, ds\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$
$$= \sum_{i=1}^{N_d} \iint_{\partial\Omega_i \times I\!R_+} \int_0^1 g(\overline{\gamma}u(\tau,t,\alpha) d\alpha\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\partial\Omega \times I\!R_+)$, *où* $x(\tau,s) = \tau - n(\tau)\, s$ *pour tout* $\tau \in \partial\Omega$ *et* $s \in [\varepsilon_l, 2\,\varepsilon_l]$ *pour tout* $l \in I\!N$ *et où on rappelle que* n *est la normale à* $\partial\Omega$ *extérieure à* Ω.

On note alors pour tout $g \in C([-U,U])$

$$\gamma g(u)(\tau,t) = \int_0^1 g\Big(\overline{\gamma}u(\tau,t,\alpha)\Big)\, d\alpha \quad p.p.\ \tau,t \in \partial\Omega \times I\!R_+$$

$\overline{\gamma}u$ n'est pas définie de manière unique, elle dépend de la suite $(\varepsilon_l)_{l\in I\!N}$ considérée. Mais comme le montre le lemme suivant, son action sur f est "unique".

Lemme 6.14 *On suppose les hypothèses (6.4) vérifiées. Soit* $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *solution entropique de (6.1), (6.3) et (6.2), i.e. vérifiant (6.5).*
Soit $T \in]0,+\infty[$, $i \in \Big\{1,\dots,N_d\Big\}$ *et* $\Phi \in L^1(\partial\Omega_i \times [0,T])$. *On définit :*

$$T_i^{(\varepsilon)}(\Phi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \iint_{\partial\Omega_i \times [0,T]} \Big[f\Big(\tilde{u}(x(\tau,s),t) \top \kappa\Big) - f\Big(\tilde{u}(x(\tau,s),t) \perp \kappa\Big)\Big]$$
$$v(x(\tau,s),t).n(\tau)\, \Phi(\tau,t)\, d\tau\, dt\, ds$$

Alors $\lim_{\varepsilon\to 0} T_i^{(\varepsilon)}(\Phi)$ *existe.*

Remarque 6.6

1. $u \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+)$ *est alors solution entropique si :*

$$\iint_{\Omega \times I\!R_+} |u(x,t) - \kappa|\, \varphi_t(x,t)\, dx\, dt + \int_\Omega |u_0(x) - \kappa|\, \varphi(x,0)\, dx$$
$$+ \iint_{\Omega \times I\!R_+} \Big[f\Big(u(x,t) \top \kappa\Big) - f\Big(u(x,t) \perp \kappa\Big)\Big]\, v(x,t).\nabla\varphi(x,t)\, dx\, dt$$
$$- \iint_{\partial\Omega \times I\!R_+} sign\Big[\overline{u}(\tau,t) - \kappa\Big]\Big[\gamma f(u)(\tau,t) - f(\kappa)\Big]\, v(\tau,t).n(\tau)\, \varphi(\tau,t)\, d\tau\, dt \geq 0$$

pour tout $\kappa \in I\!R$ *et tout* $\varphi \in C_c^1(\overline{\Omega} \times I\!R_+, I\!R_+)$.

2. *Si $u \in BV(\Omega \times [0,T])$, pour tout $T > 0$, alors la trace de u (notée γu) classiquement définie pour les fonctions à variations bornées coïncide avec celle définie dans le lemme 6.13. On a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \left| \tilde{u}\Big(x(\tau,s),t\Big) - \gamma u(\tau,t) \right| ds = 0 \qquad p.p.\ \tau, t \in \partial\Omega \times I\!R_+$$

et

$$\gamma u(\tau,t) = \overline{\gamma} u(\tau,t,\alpha) \qquad p.p.\ \tau,t,\alpha \in \partial\Omega \times I\!R_+ \times]0,1[$$

Toutefois l'existence d'une telle solution entropique est encore un problème ouvert. L'application de la technique utilisée pour f croissante, c'est à dire la méthode utilisée pour démontrer le lemme 6.8, pourrait permettre d'établir l'existence d'une telle solution. Mais on va montrer que cette méthode ne permet pas d'aboutir.

En reprenant la démonstration du lemme 6.8, on remarque qu'il faut passer à la limite dans le terme suivant (seul terme posant un problème) :

$$A_{4\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{N_d} \int_{\partial\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \Big[f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \top \tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big) - f\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha) \perp \tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big)\Big] \, d\alpha \, d\beta \, v(\tau,t).n(\tau) \, \psi(t) \, ds \, d\tau \, dt$$

oú $\psi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R_+)$.
On ne peut plus décomposer ce terme en deux termes $A_{5\varepsilon} + A_{6\varepsilon}$ puisque le signe du flux n'est plus seulement dépendant du signe de $v.n$.
On passe donc directement à la limite dans $A_{4\varepsilon}$. Pour cela remarquons que pour tout $g \in C([-U,U]^2, I\!R)$, on a :

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 g\Big(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha), \tilde{\nu}(x(\tau,s),t,\beta)\Big) \, d\alpha \, d\beta \, ds \right| \le \|g\|_{C([-U,U]^2)}$$

Donc, d'après la séparabilité de l'ensemble des fonctions continues sur $[-U,U]^2$ et d'après la relative sequentielle compacité des bornés de $L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$ pour la topologie faible $\star$, en utilisant un procédé diagonal, il existe une suite, $(\varepsilon_l)_{l \in I\!N}$ telle que $\lim_{l \to +\infty} \varepsilon_l = 0$ et telle que pour tout $g \in C([-U,U])$ il existe $U_g \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+)$ tels que :

$$\lim_{l \to +\infty} \iint_{\partial\Omega \times I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon_l} \int_{\varepsilon_l}^{2\varepsilon_l} \int_0^1 g(\tilde{\mu}(x(\tau,s),t,\alpha)) \, d\alpha \, ds \, \varphi(\tau,t) \, d\tau \, dt = \iint_{\partial\Omega \times I\!R_+} U_g(\tau,t) \, \varphi(\tau,t) \, d\tau \, dt$$

pour tout $\varphi \in L^1(\partial\Omega \times I\!R_+)$.
Soit $i = 1, \ldots, N_d$, et $(\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+$, on suppose $\tau \notin \partial(\partial\Omega_i)$, où $\partial(\partial\Omega_i)$ est le bord de $\partial\Omega_i$ dans $I\!R^{d-1}$.

On note alors :

$$F_{(\tau,t)} = \left\{ g \in C([-U,U]^2) \ ; \ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(B_d((\tau,t),\varepsilon))} \int_{B_d((\tau,t),\varepsilon)} U_g(\tau,t)\, d\tau\, dt \text{ est fini.} \right\}$$

où :

$$B_d((\tau,t),\varepsilon) = \{(\gamma,s) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+ \ ; \ \|(\tau,t)-(\gamma,s)\|_d \leq \varepsilon\}$$

en notant $\|.\|_d$ la norme Euclidienne de $I\!R^d$.
Si $g \in F_{(\tau,t)}$, on note :

$$\overline{U}_g(\tau,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(B_d((\tau,t),\varepsilon))} \int_{B_d((\tau,t),\varepsilon)} U_g(\tau,t)\, d\tau\, dt$$

On définit $\begin{array}{rccl} T_{(\tau,t)} : & F_{(\tau,t)} & \longrightarrow & I\!R \\ & g & \longmapsto & \overline{U}_g(\tau,t) \end{array}$, alors $F_{(\tau,t)}$ est un espace vectoriel qui contient les constantes et $T_{(\tau,t)}$ est une forme linéaire positive sur $F_{(\tau,t)}$ donc d'après une version modifiée du théorème de Hahn-Banach (voir [16]), on peut prolonger $T_{(\tau,t)}$ en $\overline{T}_{(\tau,t)}$ forme linéaire et positive sur $C([-U,U]^2)$.
Alors d'après le théorème de Riesz, il existe une mesure (ici de probabilité) sur les boréliens de $[-U,U]^2$ telle que :

$$\overline{T}_{(\tau,t)}(g) = \overline{U}_g(\tau,t) = \int_{-U}^{U} \int_{-U}^{U} g(\lambda,\xi)\, d\Lambda_{(\tau,t)}(\lambda,\xi) \quad \text{pour tout } g \in F_{(\tau,t)}$$

Soit $g \in C([-U,U]^2)$, si (τ,t) est un point de Lebesgue de U_g (i.e. $\overline{U}_g(\tau,t)$ existe) alors $g \in F_{(\tau,t)}$. Or une propriété des points de Lebesgue est que

$$\overline{U}_g(\tau,t) = U_g(\tau,t) \quad \text{p.p. } (\tau,t) \in \partial\Omega_i \times I\!R_+$$

Donc :

$$U_g(\tau,t) = \int_{-U}^{U} \int_{-U}^{U} g(\lambda)\, d\Lambda_{(\tau,t)}(\lambda,\xi)$$

pour tout $g \in C([-U,U]^2)$, p.p. $(\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+$.

Ainsi

$$\lim_{l \to 0} A_{4\,\varepsilon_l} = A_4 = -\iint_{\partial\Omega \times I\!R_+} \int_{-U}^{U} \int_{-U}^{U} \Big[f(\lambda \top \xi) - f(\lambda \bot \xi) \Big]\, d\Lambda_{(\tau,t)}(\lambda,\xi) \\ v(\tau,t).n(\tau)\, \psi(t)\, d\tau\, dt$$

Pour conclure, il faut déterminer le signe de A_4.
Remarquons que si $g(\lambda,\xi) = G_1(\lambda)$, d'après le lemme 6.4, il existe $\gamma\mu \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+ \times [0,1])$ telle que :

$$U_{G_1(\tau,t)} = \int_0^1 G_1(\gamma\mu(\tau,t,\alpha))\, d\alpha$$

p.p. en $(\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+$.

De même si $g(\lambda,\xi) = G_2(\lambda)$, d'après le lemme 6.4, il existe $\gamma\nu \in L^\infty(\partial\Omega \times I\!R_+ \times [0,1])$ telle que :

$$U_{G_2(\tau,t)} = \int_0^1 G_2(\gamma\nu(\tau,t,\beta))\,d\beta$$

p.p. en $(\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+$.

De plus toute l'information, pour conclure sur le signe de A_4, que l'on a est sur $\gamma\nu$ et $\gamma\mu$. Il faudrait donc montrer que :

$$\int_{-U}^{U}\int_{-U}^{U}\Big[f(\lambda\top\xi) - f(\lambda\bot\xi)\Big]\,d\Lambda_{(\tau,t)}(\lambda,\xi)$$
$$= \int_0^1\int_0^1\Big[f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\top\gamma\nu(\tau,t,\beta)\Big) - f\Big(\gamma\mu(\tau,t,\alpha)\bot\gamma\nu(\tau,t,\beta)\Big)\Big]\,d\alpha\,d\beta$$

p.p. en $(\tau,t) \in \partial\Omega \times I\!R_+$.

Le contre exemple suivant (adapté d'un contre exemple de [4]) montre que ceci n'est pas possible :
On définit $u \in L^\infty(I\!R_+ \times I\!R_+)$ par :

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } p \in I\!N \text{ tel que } 2\,p\,x \le t \le (2\,p+1)\,x, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

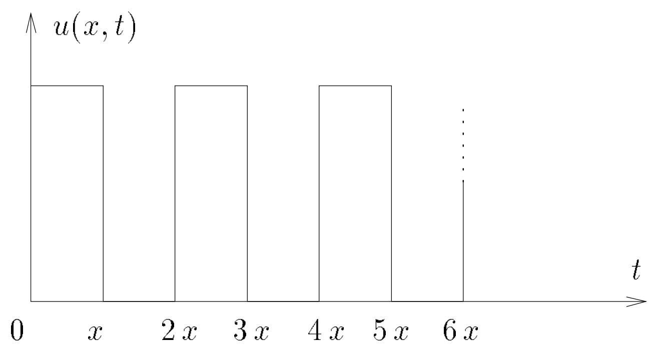

FIG. 6.3 -

et $v \in L^\infty(I\!R_+ \times I\!R_+)$ par :

$$v(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } p \in I\!N \text{ tel que } 2\,p\,x \le t \le (2\,p+1)\,x, \\ \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

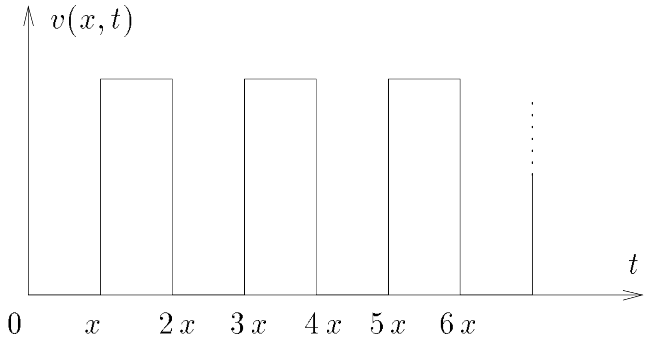

Fig. 6.4 -

On va montrer qu'il existe $\varphi \in L^1(I\!R_+)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon}\int_{I\!R_+} u(x,t)\top v(x,t)\,\varphi(t)\,dx\,dt \neq \int_{I\!R_+}\int_0^1\int_0^1 \gamma u(0,t,\alpha)\top\gamma v(0,t,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,\varphi(t)\,dt$$

où γu et γv sont les traces de u et v définies par le lemme 6.4.

En effet, pour tout $(x,t) \in I\!R_+ \times I\!R_+$:

$$u(x,t)\top v(x,t) = 1$$

donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon}\int_{I\!R_+} u(x,t)\top v(x,t)\,\varphi(t)\,dx\,dt = \int_{I\!R_+}\varphi(t)\,dt$$

Soit $g \in C([0,1], I\!R)$, on va alors montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} g\big(u(x,t)\big)\,dx = \int_0^1 g\big(u(\alpha)\big)\,d\alpha$$

$L^\infty(I\!R_+)$ faible $\star$, où :

$$u(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le \alpha \le \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} < \alpha \le 1 \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_c^1(I\!R_+, I\!R)$, on note :

$$E_\varphi = \left| \int_{I\!R_+} \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} g\big(u(x,t)\big)\,dx\,\varphi(t)\,dt - \int_{I\!R_+}\frac{1}{2}\,\big(g(0)-g(1)\big)\,\varphi(t)\,dt \right|$$

alors :

$$E_\varphi = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_{2\,k\,x}^{(2\,k+1)\,x} g(1)\,\varphi(t)\,dt + \int_{(2\,k+1)\,x}^{(2\,k+2)\,x} g(0)\,\varphi(t)\,dt \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2} \int_{2\,k\,x}^{(2\,k+1)\,x} \Big(g(0)+g(1)\Big)\,\varphi(t)\,dt - \frac{1}{2} \int_{(2\,k+1)\,x}^{(2\,k+2)\,x} \Big(g(0)+g(1)\Big)\,\varphi(t)\,dt \right] dx \right|$$

donc :

$$E_\varphi = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{g(1)}{2} \left(\int_{2\,k\,x}^{(2\,k+1)\,x} \varphi(t)\,dt - \int_{(2\,k+1)\,x}^{(2\,k+2)\,x} \varphi(t)\,dt \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{g(1)}{2} \left(\int_{(2\,k+1)\,x}^{(2\,k+2)\,x} \varphi(t)\,dt - \int_{2\,k\,x}^{(2\,k+1)\,x} \varphi(t)\,dt \right) \right] dx \right|$$

En utilisant la régularité de φ, il vient :

$$E_\varphi \leq |g(1)+g(2)|\,\|\varphi'\|_\infty\, m\Big(supp(\varphi)\Big) \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} x\,dx$$

Et donc :

$$E_\varphi \leq C\,x$$

où C ne dépend que de g et de φ.

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} g\Big(u(x,t)\Big)\,dx = \int_0^1 g\Big(u(\alpha)\Big)\,d\alpha$$

$L^\infty(I\!R_+)$ faible $\star$, où :

$$u(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

De même, on montre que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} g\Big(v(x,t)\Big)\,dx = \int_0^1 g\Big(u(\alpha)\Big)\,d\alpha$$

$L^\infty(I\!R_+)$ faible $\star$.
Et donc :

$$\int_{I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \gamma u(0,t,\alpha) \top \gamma v(0,t,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,\varphi(t)\,dt = \frac{3}{4} \int_{I\!R_+} \varphi(t)\,dt$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\,\varepsilon} \int_{I\!R_+} u(x,t) \top v(x,t)\,\varphi(t)\,dx\,dt$$
$$\neq \int_{I\!R_+} \int_0^1 \int_0^1 \gamma u(0,t,\alpha) \top \gamma v(0,t,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,\varphi(t)\,dt$$

pour tout $\varphi \in L^1$ tel que $\varphi \not\equiv 0$.
On peut même remarquer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \int_{I\!R_+} u(x,t) \top v(x,t)\, \varphi(t)\, dx\, dt \neq \int_{I\!R_+} \int_0^1 \gamma u(0,t,\alpha) \top \gamma v(0,t,\alpha)\, d\alpha\, \varphi(t)\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^1$ tel que $\varphi \not\equiv 0$, puisque :

$$\int_{I\!R_+} \int_0^1 \gamma u(0,t,\alpha) \top \gamma v(0,t,\alpha)\, d\alpha\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{I\!R_+} \varphi(t)\, dt$$

Ce qui termine le contre exemple.

On ne peut donc pas utiliser l'information sur $\gamma\mu$ et $\gamma\nu$ pour déterminer le signe de A_4. Cette technique ne semble donc pas applicable au cas f quelconque.

A. Construction de $\chi_{\varepsilon,\Phi}$

Par souci de simplicité, on se limite au cas $d = 2$.

A.1 Caractérisation de $A^{(\varepsilon)}$

Soit $\varepsilon > 0$, on rappelle que l'on note :

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{ x \in \Omega \ ; \ d(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon \Big\} \quad \text{et} \quad \Omega_{2\varepsilon} = \Big\{ x \in \Omega \ ; \ \varepsilon \leq d(x, \partial\Omega) \leq 2\,\varepsilon \Big\}$$

On rappelle de plus que $A^{(\varepsilon)}$ est l'ensemble des points x de $\Omega_\varepsilon \cap \Omega_{2\varepsilon}$ tels que $(\tau(x), s(x)) \in \partial\Omega \times [0, 2\,\varepsilon]$ est défini de manière unique avec $x = \tau(x) - s(x)\, n(\tau(x))$.
Soient $i, j \in \Big\{1, \ldots, N_d\Big\}$, on note :

$$\tau_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad \text{et} \quad P_{ij}^{(\varepsilon)} = \Big\{ x \in \Omega \ ; \ d(x, \tau_{ij}) \leq 2\,\varepsilon \Big\}$$

On distingue alors deux cas, suivant si $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ est convexe, cas de la figure A.2, ou non, cas de la figure A.1.
Si $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ n'est pas convexe, on définit $A_{ij}^{(\varepsilon)}$ (voir figure A.1) par :

$$A_{ij}^{(\varepsilon)} = \Big\{ x \in \Omega \ ; \ d(x, \partial\Omega) \leq 2\,\varepsilon \text{ et tels que } d(x, \partial\Omega_j) = d(x, \partial\Omega_i) = d(x, \tau_{ij}) \Big\}$$

Si $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ est convexe, on définit $A_{ij}^{(\varepsilon)}$ comme sur la figure A.2.
Alors

$$A^{(\varepsilon)} = \Omega_{2\varepsilon} \setminus \left(\cup_{i,j=1}^{N_d} A_{ij}^{(\varepsilon)} \right)$$

On définit de plus, si $A_{ij}^{(\varepsilon)}$ est convexe :

$\tau_{ij}^{(\varepsilon)}$ le point de $\Omega_{2\varepsilon}$ tel que $d(x_{ij}^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_i) = d(x_{ij}^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_j) = 2\,\varepsilon$,

τ_i le point de $\partial\Omega_i$ tel que $d(\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_i) = d(\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_i)$

τ_j le point de $\partial\Omega_j$ tel que $d(\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_j) = d(\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_j)$

$\tau_i^{(\varepsilon)}$ le point du segment $[\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_i]$ tel que $d(\tau_i^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_i) = \varepsilon$

$\tau_j^{(\varepsilon)}$ le point du segment $[\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_j]$ tel que $d(\tau_j^{(\varepsilon)}, \partial\Omega_j) = \varepsilon$

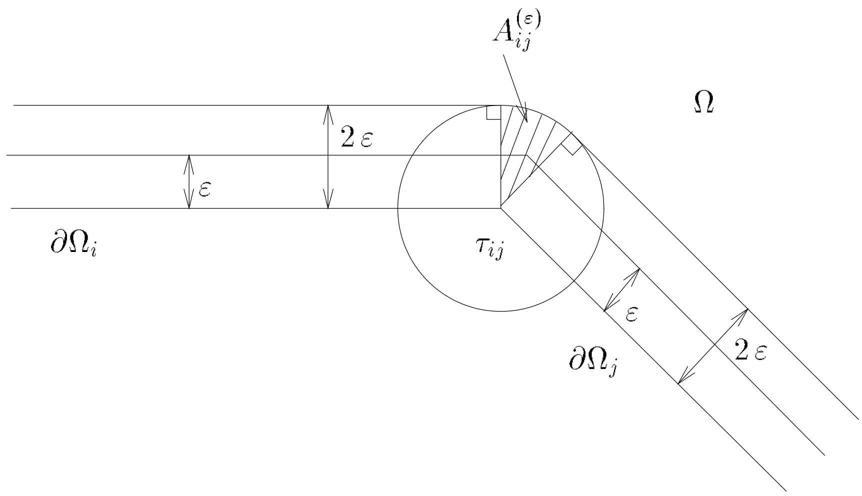

FIG. A.1 - $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ non convexe

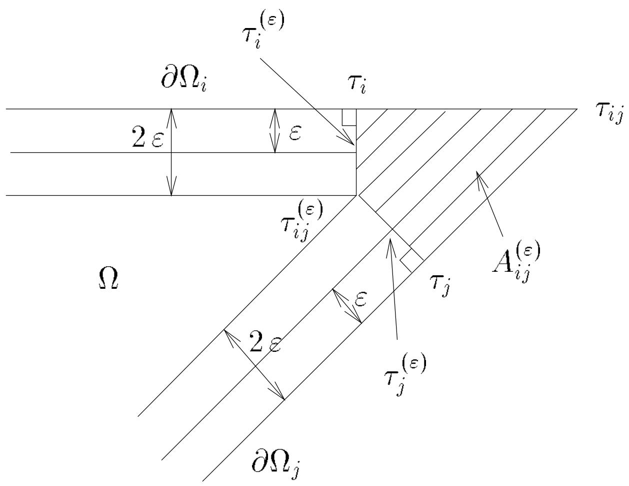

FIG. A.2 - $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ convexe

On a bien :

$$m((\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \setminus A^{(\varepsilon)}) \leq C\,\varepsilon^2$$

où C ne dépend que de Ω, puisque pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N_d\}$, si $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ n'est pas convexe :

$$m(A_{ij}^{(\varepsilon)}) \leq \pi\,(2\,\varepsilon)^2$$

et si $P_{ij}^{(\varepsilon)}$ est convexe :

$$m(A_{ij}^{(\varepsilon)}) \leq 8\,\frac{\theta_{ij}}{2}\,\varepsilon^2$$

où $\theta_{ij} < \pi$ est l'angle entre $\partial\Omega_i$ et $\partial\Omega_j$.

A.2 Construction de $\chi_{\varepsilon,\Phi}$

Soit $\Phi \in C(\partial\Omega)$, $C^1(\partial\Omega_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, N_d$. On peut alors définir $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ pour tout $x \in \Omega$.
On a :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{s(x)}{\varepsilon} - 1 & \text{si } x \in \Omega_{2\varepsilon} \cap A^{(\varepsilon)} \end{cases}$$

Soit $\chi_{\varepsilon,\Phi}\ :\ \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R$ telle que :

$$\chi_{\varepsilon,\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(\tau(x))\,(1 - \varphi_\varepsilon(x)) & \text{si } x \in A^{(\varepsilon)} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}) \end{cases}$$

De plus, on veut que $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ soit C^1 par morceau sur $\overline{\Omega}$ et que :

$$|\nabla_x \chi_{\varepsilon,\Phi}(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{p.p. } x \in \Big(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}\Big) \backslash A^{(\varepsilon)}$$

$$\|\chi_{\varepsilon,\Phi}\|_\infty \leq \|\Phi\|_\infty$$

où C ne dépend que de Ω.
Il ne reste plus qu'à définir $\chi_{\varepsilon,\Phi}$ sur $\Big(\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{2\varepsilon}\Big) \backslash A^{(\varepsilon)}$.
S'il existe $i, j \in \Big\{1, \ldots, N_d\Big\}$, $i \neq j$, tels que $x \in A_{ij}^{(\varepsilon)}$ et tels que $A_{ij}^{(\varepsilon)}$ n'est pas convexe alors :

$$\chi_{\varepsilon,\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(\tau_{ij}) & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon \\ \Phi(\tau_{ij})\,\left(2 - \dfrac{d(x, \tau_{ij})}{\varepsilon}\right) & \text{si } x \in \Omega_{2\varepsilon} \end{cases}$$

Sinon, il existe $i, j \in \Big\{1, \ldots, N_d\Big\}$, $i \neq j$, tels que $x \in A_{ij}^{(\varepsilon)}$ et $A_{ij}^{(\varepsilon)}$ est convexe. On note $T_{ij}^{(\varepsilon)}$ le triangle défini par les points $\tau_{ij}^{(\varepsilon)}$, τ_i et τ_j. De plus, si $x \in T_{ij}^{(\varepsilon)}$ (respectivement $x \notin T_{ij}^{(\varepsilon)}$) on note $x_i(x)$ le point du segment $[\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_i]$ (respectivement de $\partial\Omega_i$) tel que $[x, x_i(x)]$ est parallèle à $[\tau_i, \tau_j]$. De même, si $x \in T_{ij}^{(\varepsilon)}$ (respectivement $x \notin T_{ij}^{(\varepsilon)}$) on

note $x_j(x)$ le point du segment $[\tau_{ij}^{(\varepsilon)}, \tau_j]$ (respectivement de $\partial\Omega_j$) tel que $[x, x_j(x)]$ est parallèle à $[\tau_i, \tau_j]$.
Alors :

$$\chi_{\varepsilon,\Phi}(x) = \Phi(\tau_i)\, d(x, x_i(x)) + \Phi(\tau_j)\, d(x, x_j(x)) \qquad \text{si } x \notin T_{ij}^{(\varepsilon)}$$

et :

$$\chi_{\varepsilon,\Phi}(x) = \Phi(\tau_i)\, d(x, x_i(x)) \Big(1 - \varphi_\varepsilon(x_i(x)\Big) + \Phi(\tau_j)\, d(x, x_j(x)) \Big(1 - \varphi_\varepsilon(x_j(x)\Big) \qquad \text{si } x \in T_{ij}^{(\varepsilon)}$$

B. Démonstration du lemme 6.10

On rappelle que le lemme 6.10 est le suivant :

Lemme B.1 *(voir [28]) Soient A un sous ensemble de $I\!R^d$ $(d \geq 1)$, B un sous ensemble de $I\!R^p$ $(p \geq 1)$ et $f \in C_c(A \times B)$, alors il existe une suite $(f_q)_{q \in I\!N}$ qui converge uniformément vers f lorsque q tend vers l'infini telle que f_q est une somme de q produits de fonctions de $C_c(A)$ et de $L^1(B)$.*

Démonstration :
Soit K_f^B (respectivement K_f^A) la projection sur B (respectivement sur A) du support de f. On partitionne alors K_f^B en q parties disjointes $K_f = \bigcup_{j=1}^{q} X_j$, et on note $\delta(X_j)$ le diamètre de X_j, $j = 1, \ldots, q$.
On pose alors :

$$f_q(x,t) = \sum_{j=1}^{q} f(x,t_j)\, 1_{X_j}(t) \qquad \forall\ (x,t) \in A \times B$$

où t_j est un point fixé de X_j, par exemple si on est en dimension une on pourra prendre le milieu de X_j.

Il est clair que $f(x,t_j) \in C_c(A)$ et que $1_{X_j} \in L^1(B)$. Montrons que f_q converge uniformément vers f :

Soient $(x,t) \in K_f^A \times K_f^B$

$$|f_q(x,t) - f(x,t)| = |f_q(x,t_j) - f(x,t)| \qquad \text{si } t \in X_j$$

et comme f est uniformément continue sur $K_f^A \times K_f^B$ alors :

$$||f_q - f||_\infty \leq C_f \sup_{j=1}^{q} \Big(\delta(X_j)\Big)$$

où C_f est le module de continuité de f.
Ce qui termine la démonstration du lemme 6.10.

Bibliographie

[1] J. Baranger, J.F. Maitre, F. Oudin, *Application de la théorie des éléments finis mixtes à l'étude d'une classe de schémas aux volumes différences finis pour les problèmes elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **319**, 1994, no. I, 401–404.

[2] C. Bardos, A.Y. Leroux, J.C. Nedelec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Partial Differential Equations, **4**, 1979, no. 9, 1017–1034.

[3] S. Benharbit, A. Chalabi, J.P. Vila, *Numerical viscosity and convergence of finite volume methods for conservation laws with boundary conditions*, SIAM journal of Num. Anal., **6**, 1995, 123–124.

[4] F. Bocquin, T. Gallouët, *Prolongement d'applications linéaires positives , théorème de Kuhn-Tucker et mesures de Young*, Stage de maîtrise, 1995.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. théorie et applications*, 1993.

[6] R.H. Brooks, A.T. Corey, *Properties of porous media affecting fluid flow*, no. 92, 1966.

[7] C. Chainais-Hillairet, *Finite volume scheme for a on a nonlinear hyperbolic equation. convergence towards the entropy solution and error estimate*, Rapport de Recherche 205, UMPA, ENS Lyon, 1997.

[8] S. Champier, T. Gallouët, R. Herbin, *Convergence of an upstream finite volume scheme on a triangular mesh for nonlinear hyperbolic equations*, Numer. Math., **66**, 1993, 139–157.

[9] B. Cockburn, F. Coquel, P. Lefloch, *An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws*, Math. of Comp., **63**, 1994, 77–103.

[10] B. Cockburn, A. Gremaud, *A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation laws. I. The general approach.*, à paraître Math. Comput.

[11] Y. Coudière, J.P. Vila, P. Villedieu, *Convergence of a finite volume scheme for a diffusion-convection problem*, soumis.

[12] R. J. DiPerna, *Measure-valued solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal., **88**, 1985, 223–270.

[13] R. J. DiPerna, P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.*, [J] Invent. Math., **98**, 1989, no. 3, 511–547.

[14] R. Eymard, T. Gallouët, *Convergence d'un schéma de type eléments finis-volumes finis pour un système formé d'une équation elliptique et d'une équation hyperbolique*, M^2AN, **27**, 1993, no. 7, 843–861.

[15] R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, R. Herbin, *Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by some finite volume schemes*, soumis.

[16] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *The finite volume method*, Ph. Ciarlet and J.L. Lions ed., in preparation for the Handbook of Numerical Analysis.

[17] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation*, Chin. Ann. of Math., **16B : 1**, 1995, 1–14.

[18] J.M. Fiard, R. Herbin, *Comparison between finite volume and finite element methods for the numerical computation of an elliptic problem arising in electrochemical engineering*, Comput. Math. Appl. Mech. Engin., **115**, 1994, 315–338.

[19] P.A. Forsyth, P.H. Sammon, *Quadratic convergence for cell-centered grids*, Appl. Num. Math., **4**, 1988, 377–394.

[20] P. Grisvard, *Elliptic problems in non smooth domains*, Pitman ed., London, 1985.

[21] D. Guérillot, J.L. Rudkiewicz, C. Ravenne, G. Renard, *An integrated model for computer aided reservoir description from outcrop study to fluid flow simulation*, Rev IFP, **45–1**, 1989, 71–77.

[22] D. Guérillot, S. Verdière, *Adaptive upscaling with the dual mesh method*, San Antonio ed., Proceedings of Niper II, 1997.

[23] R. Herbin, *An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion convection problem on a triangular mesh*, Num. Meth. in P.D.E., 1995, 153–160.

[24] R. Herbin, O. Labergerie, *Finite volume and finite element schemes for elliptic-hyperbolic problems*, submitted.

[25] D. Kröner, M. Rokita, *Convergence of upwind finite volume schemes for scalar conservation laws in 2-d*, SIAM J. Num. Anal., **31**, 1994, 324–343.

[26] S.N. Kruskov, *First order quasilinear equations with several space variables*, Math. USSR. Sb., **10**, 1970, 217–243.

[27] R. D. Lazarov, I. D. Mishev, P. S. Vassilevski, *Finite volume method for converction-diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal., **33**, 1996, 31–55.

[28] J. Michel, *Processus et mesures de young*, communication personnelle.

[29] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.*, 1967.

[30] F. Oudin, *Schémas volumes finis pour problèmes elliptiques : Analyse a priori et a posteriori par eléments finis mixtes, méthode de décomposion de domaines.*, 1995.

[31] P. Rabier, J.-M. Thomas, *Exercices d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1985.

[32] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.

[33] W. Rudin, *Real and complex analysis*, MacGraw-Hill, 1966.

[34] A. Szepessy, *Measure valued solution of scalar conservation laws with boundary conditions*, Arch. Rat. Mech. Anal., **107**, 1989, no. 2, 182–193.

[35] J.-M. Thomas, D. Trujillo, *Finite volume variational formulation. applications to domain decomposition methods*, Contemporary Mathematics, 1994, no. 157, 127–132.

[36] J.-M. Thomas, D. Trujillo, *Analysis of finite volumes methods*, world Scientific, A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckaus, A. Michelic ed., Proceedings of Mathematical Modeling through Porous Media (St Etienne), 1995.

[37] P.S. Vassilevski, S.I. Petrova, R.D. Lazarov, *Finite difference schemes on triangular cell-centered grids with local refinement*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., **13**, 1992, no. 6, 1287–1313.

[38] S. Verdière, D. Guérillot, *Different pressure and saturation grids in heterogeneous porous media*, world Scientific, A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckaus, A. Michelic ed., Proceedings of Mathematical Modeling through Porous Media (St Etienne), 1995.

[39] S. Verdière, D. Guérillot, J.-M. Thomas, *Dual mesh method in heterogeneous porous media*, Leoben (Austria) ed., Proceedings of the 5th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 1996.

[40] S. Verdière, M. H. Vignal, *Numerical and theoretical study of a dual mesh method using finite volume schemes for two phase flow problems in porous media*, accepté pour publication dans Numerische Matematik.

[41] M. H. Vignal, *Convergence of a finite volume scheme for an elliptic hyperbolic system*, M^2AN, **30**, 1996, no. 7, 841–872.

[42] M. H. Vignal, *Convergence of finite volumes schemes for an elliptic hyperbolic system with boundary conditions*, Hermes, F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier ed., Proceeding of the "First International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications", 1996.

[43] J. P. Vila, *Convergence and error estimate in finite volume schemes for general multidimensionnal conservation laws*, M^2AN, **28**, 1994, 267–285.

ERRATUM

Dans les hypothèses (2.7) page 17, (4.5) page 116 et (5.9) page 132 au lieu de lire

- Pour tout $p \in \mathcal{T}$ il existe $x_p \in p$ tel que pour tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$

il faut lire

- Il existe une famille de points $(x_p)_{p \in \mathcal{T}}$ telle que pour tout $p \in \mathcal{T}$, $x_p \in p$ et pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$.

Dans le lemme 3.2 page 75 au lieu de lire

On suppose que, pour tout $p \in \mathcal{T}$, il existe $x_p \in p$ tel que, pour tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$.

il faut lire

On suppose qu'il existe une famille de points $(x_p)_{p \in \mathcal{T}}$ telle que pour tout $p \in \mathcal{T}$, $x_p \in p$ et pour tout $p \in \mathcal{T}$ et tout $q \in N(p)$, $[x_p, x_q]$ est orthogonal à σ_{pq} et $[x_p, x_q] \cap \sigma_{pq} \neq \emptyset$.

Dans le théorème 2.3 page 42, les lemmes 2.5 page 43, 2.6 page 44 et 2.7 page 53 au lieu de lire

On note $P(\cdot)$ la solution de (2.1), (2.3) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_\mathcal{T}$ satisfaisant (2.8) et (2.9) et telle que $\sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, P_p = \sum_{p \in \mathcal{T}} m(p)\, P(x_p)$.

il faut lire

On note $P(\cdot)$ une solution de (2.1). On suppose les hypothèses (2.6) vérifiées. Soit $P_{\mathcal{T}}$ satisfaisant (2.8) et (2.9).

Dans la proposition 3.3 page 80, le théorème 3.2 page 91 et le lemme 3.7 page 92 au lieu de lire

On note $P(.)$ la solution de (3.9) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13) et telle que $\sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\,P_Q = \sum_{Q\in\mathcal{T}_H} m(Q)\,P(x_Q)$. Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ satisfaisant (3.19) et (3.20) et telle que pour tout $Q \in \mathcal{T}_H$: $\sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} m(q)\,p_q = \sum_{\substack{q\in\mathcal{T}_h\\ q\subset Q}} m(q)\,P(x_q)$

il faut lire

On note $P(.)$ une solution de (3.9). On suppose de plus que g est telle que P soit dans $H^2(\Omega)$. Soient $P_{\mathcal{T}_H}$ solution de (3.12) et (3.13). Soient $p_{\mathcal{T}_h}$ satisfaisant (3.19) et (3.20).

Dans les théorèmes 5.1 page 135, 5.2 page 135 et 5.3 page 168, les lemmes 5.1 page 136, 5.2 page 136, 5.3 page 142 et le lemme 5.4 page 143 au lieu de lire

On note P la solution de (5.1) et (5.3) telle que $\int_\Omega P(x)\,dx = 0$. On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ la solution de (5.10), (5.11) telle que $\sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P_p = \sum_{p\in\mathcal{T}} m(p)\,P(x_p)$.

il faut lire

On note P une solution de (5.1) et (5.3). On suppose les hypothèses (5.6) vérifiées. Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω satisfaisant la propriété (5.9), et k un pas de temps vérifiant la condition de stabilité (5.12). Soit $P_{\mathcal{T}}$ solution de (5.10), (5.11).