Bonjour, voici quelques exercises. J'ai pas (vraiement) relu le français. Si vous avez un pb, me le signaler par e-mail et je repondrai lundi. D'ici la je rajouterai les énoncés des lemmes qui je vous ai données "en exo"

G.Mc

Exercise : Donner la classification des isométries de $\mathbb{H}$.

Exercise :

(1) Trouver un domaine fondamental pour le groupe
$$\langle z \mapsto z+1 \rangle.$$
(2) Trouver un domaine fondamental pour le groupe
$$\langle z \mapsto z+2 \rangle.$$
‘

(3) Montrer que
$$\mathbb{H}/\langle z \mapsto z+1 \rangle,\ \mathbb{H}/\langle z \mapsto z+2 \rangle$$
sont isométrique.

Exercise :

(1) Trouver un domaine fondamental pour le groupe
$$\langle z \mapsto z+1 \rangle.$$
(2) Trouver un domaine fondamental pour le groupe
$$\langle z \mapsto z+2 \rangle.$$
‘

(3) Montrer que
$$\mathbb{H}/\langle z \mapsto z+1 \rangle,\ \mathbb{H}/\langle z \mapsto z+2 \rangle$$
sont isométrique.

Exercise : Les surfaces
$$\mathbb{H}/\langle z \mapsto 2z \rangle,\ \mathbb{H}/\langle z \mapsto (7z-5)/(3z-2) \rangle$$
sont-elles isométriques?

Exercise : Soit
$$\Gamma = \langle z \mapsto \lambda^2 z \rangle,\ \lambda > 0.$$
(1) Trouver un domaine fondamental pour le groupe Γ.

(2) Déterminer la surface de Riemann $\mathbb{H}/\Gamma$.
(3) Calculer la longuer de la géodésique qui corresponde au générateur de Γ.

Exercise : Un triangle idéal est l'enveloppe convexe de trois points distincts (*ses sommets*) de $\partial\mathbb{H}$.

Montrer qu'il y a un unique triangle idéal à isométrie de $\mathbb{H}$ près. [soit w_i les sommets et trouver une isométrie qui envoie les sommets sur $0, 1, \infty$.]

Soit Δ_0 le triangle idéal avec sommets $0, 1, \infty$. Montrer que si $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ que

$$A(\Delta_0) = \Delta_0 \,\text{ou}\, \emptyset.$$

En en déduire que Δ_0 contient un domaine fondamental pour $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Montrer que le stabilisateur de Δ_0 est le groupe cyclique engendré par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercise : Soient $s, t > 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les longueurs de translation des isométries de $\mathbb{H}$ associées à A et à B.
(2) Déterminer les axes des isométries de $\mathbb{H}$ associées à A et à B. Déterminer l'angle qui font à l'intersection qu'on note c.
(3) Notons $C = AB^{-1}$.
Montrer que C est hyperbolique $\forall s, t > 0$.
(4) Soient b, c le point d'intersection des axes de B et C et des axes de A et C respectivement.
Montrer que C envoie b sur c, et en déduire que

$$d_{\mathbb{H}}(b, c) = \text{distance de translation de} C$$

(5) En déduire le théorème de Pythagore pour la métrique hyperbolique : pour un triangle à angle droit, avec cotés de longueur $z > x, y > 0$

$$\mathrm{ch}(z) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y).$$

Exercise : Soient M une surface hyperbolique compacte et $\alpha \neq 1 \in \pi_1(M)$ une courbe fermée dans la surface.

- Donner l'allure (faire un dessin) d'un relvé, $\hat{\alpha} \subset \mathbb{H}$, de α.

- Justifier : α est librement homotope à une unique géodésique dans la surface M

Exercise : Soient $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un goupe discret, notons $M = \mathbb{H}/\Gamma$.

(1) Rappeler la définition
- de l'enveloppe convexe de $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$.
- du coeur convexe de $\mathbb{H}/\Gamma$.

(2) On suppose que $\partial M \neq \emptyset$ et que $\delta \in \pi_1$ est peripherique. Montrer que l'axe de $\delta \subset \partial C(\Lambda)$.

(3) Montrer que si ∂M n'a qu'une composante connexe alors tout élément peripherique, primitif de π_1 est conjugue à δ ou δ^{-1}.

Exercise :

Soit $\alpha \subset M$ une courbe.

(1) Rappeler la définition d'une courbe simple.

(2) Montrer que α est simple si et seulement si $\forall, \beta \in \pi_1$ et un relevé $\hat{\alpha} \subset \mathbb{H}$

$$\beta(\hat{\alpha}) \cap \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \quad \text{ou } \emptyset.$$

(3) Montrer que 2 géodésiques β_i dans $\mathbb{H}$ s'intersectent si et seulement si

$$B(\beta_1^+, \beta_1^-, \beta_2^-, \beta_2^+) < 0$$

Exercise :

Soient C_i, $i = 1 \dots 4$ des géodésiqiues disjointes dans $\mathbb{H}$.

(1) Montrer qu'il y a 2 configurations possibles pour les C_i et les dessiner.

(2) Une de ces configurations est l'envelope convexe de 4 intervalles dans $\partial\mathbb{H}$. Marquer les identifications des C_i (vus comme côtés d'un polygône fondamental) telles que le surface quotient est
- Un sphere à 3 trous
- Un tore à un trou (homéomorphe au tore usuel moins un disque plongé)

(3) Choisir 4 géodésiques qui realisent cette configuration et donner des isométries de $\mathbb{H}$ qui realisent les identifications de question precedente.

Exercise :

Soit $x_i \in \mathbb{H}$, $i = 1 \dots 4$

(1) Montrer que le birrapport de x_i détermine les 4 points à isométrie de $\mathbb{H}$ près.
(2) Montrer qu'on a le droit de supposer que $x_1 = 0, x_2 = 1, x_4 = \infty$.
(3) Donner la forme générale de la matrice $P_i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que l'isométrie de $\partial\mathbb{H}$ associe fixe x_i.
(4) Déterminer des matrices P_2, P_4 telles que
$$P_2(x_2) = x_2,\ P_2(x_1) = x_3\, P_4(x_4) = x_4,\ P_4(x_1) = x_3$$
(5) Montrer que le groupe engendré par P_2, P_4 est discret

Exercise :
Soient $a, b, c > 0$ et posons
$$\gamma = \begin{pmatrix} ab & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ b(c+1) & 1 \end{pmatrix}$$
(1) Montrer que
$$\gamma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} ac - (a+1)(c+1) & (a+1)c \\ -(c+1) & c \end{pmatrix}$$
(2) Montrer que γ fixe $\infty \in \partial\mathbb{H}$ et trouver une condition sur a, b, c telle que $\infty = \gamma^+$
(3) Montrer que α fixe $0 \in \partial\mathbb{H}$ et trouver une condition sur a, b, c telle que $0 = \alpha^+$
(4) Déterminer les points fixes de $\gamma, \alpha, \gamma\alpha^{-1}$
(5) (**) En considerant l'envelope convexe de $0, 1, \gamma(1)$, montrer que le groupe engendré par γ, α est libre $\forall a, b, c > 0$.
(6) Trouver un domaine fondamental pour le groupe engendré par γ, α.
(7) La surface quotient est un pantalon ou un tore troué ?

Exercise : Rappeler l'énoncé du théorème de CAYLEY-HAMILTON et en déduire que

(1) (a)
$$\mathrm{tr}A^2 - (\mathrm{tr}A)^2 + 2 = 0,\ \forall A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$
(b)
$$\mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B + \mathrm{tr}AB^{-1} = 0\ \forall A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$
(2) D'après la question precedcente on a que
$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}AB^{-1}.$$

Montrer que, $\forall X, Y \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{tr} XYX^{-1}Y^{-1} = (\mathrm{tr} Y)^2 - \mathrm{tr} XYX^{-1}Y,$$

et en déduire que

$$\mathrm{tr} XYX^{-1}Y^{-1} = (\mathrm{tr} Y)^2 + \mathrm{tr} X^2 - \mathrm{tr} XY \mathrm{tr} Y^{-1}X.$$

(3) En déduire que

$$2 + \mathrm{tr} XYX^{-1}Y^{-1} = (\mathrm{tr} X)^2 + (\mathrm{tr} Y)^2 + (\mathrm{tr} XY)^2 - \mathrm{tr} X \mathrm{tr} Y \mathrm{tr} XY.$$

Exercise : (*)

Soient M une surface hyperbolique compacte, $\alpha, \beta \in \pi_1$ une paire de courbes fermées qui se rencontre dans un seul point.

(1) Donner l'allure d'un petit voisinage (regulière) N de $\alpha \subset \beta$. ∂N, combien de composante connexe a-t-il?

(2) On admet que ∂N a une seule composante, représentée par $\delta = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1$. Soit ρ une représentation de π_1 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{tr}\rho(\alpha) > 0,\ \mathrm{tr}\rho(\beta) > 0,\ \mathrm{tr}\rho(\beta\alpha) > 0,\ \mathrm{tr}\rho(\delta) < 0.$$

En utilisant l'exo precedente montrer que

$$\mathrm{sh}(\ell_\alpha/2)\mathrm{sh}(\ell_\beta/2)|\sin(\theta)| = \mathrm{ch}(\ell_\delta/4),$$

où θ est l'angle entre α, β.

[On peut utiliser

$$\mathrm{ch}(\ell_{\beta\alpha}/2) = \mathrm{ch}(\ell_\alpha/2)\mathrm{sh}(\ell_\beta/2) + \cos(\theta)\mathrm{sh}(\ell_\alpha/2)\mathrm{sh}(\ell_\beta/2)$$

]

(3) En déduire que si 2 courbes que

$$\mathrm{sh}(\ell_\alpha/2)\mathrm{sh}(\ell_\beta/2) \geq 1.$$