Exo :

Montrer que l'ensemble des solutions à des équations suivantes est une surface regulière, dessiner la et déterminer les normales :

(1) L'ellipsoide, $a, b, c > 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(2) L'hyperboloide à une nappe

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

(3) L'hyperboloide à deux nappes

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Exo : Même exo pour

(1)

$$x^2 + y^2 = 2z$$

(2)

$$x^2 - y^2 = 2z$$

Exo : Soit $\alpha > 0$ et définir

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (\alpha - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2$$

Notons C le cercle dans le plan $z = 0$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon α.

(1) Calculer la derivée $D\phi$ de ϕ.
(2) Montrer que le rang de $D\phi_p = 0$ ssi $p \in C \cup \{(0, 0, 0)\}$.
(3) Soit

$$X = \{(x, y, z) \,|\, 1 = (\alpha - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2\} = \phi^{-1}(\{1\}), \alpha > 1.$$

. Trouver une immersion de $\mathbb{R}^2$ dans X c-à-d une application $f : \mathbb{R}^2 \to X$ telle que le rang de Df_p est 2 $\forall p \in \mathbb{R}^2$.

Pourquoi on a besoin de $\alpha > 2$?

(4) Trouver un parametrage de X.
(5) Donner deux descriptions de l'espace tangent de X. Comparer avec l'aire de la sphère.
(6) Calculer l'aire du tore.

Exo : Soit Γ une courbe plane reg. $\gamma(t) = (r(t), z(t))$. Sa surface de révolution est

$$S_\Gamma = \{(r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), z(t))\}.$$

(1) Calculer une base du plan tangent de S_Γ et son vecteur normal.
(2) Montrer que l'aire de S_Γ vaut

$$2\pi \int_0^L r(s)ds.$$

Exo : Soit X une surface de révolution. Montrer que X admet un parametrage $f(u, v)$ avec

$$\partial E/\partial u = 0, \; F = 0, \; G = 1$$

où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale.

Exo :

Soit f une fonction lisse sur une surface reg. $X = X(u, v)$. Le gradient de f, ∇f, est un champs de vecteur sur X tel que

$$< \nabla f, v >= df_p.v, \forall v \in T_p(X).$$

Trouver une expression pour ∇f en termes de E, F, G et $f_u = \partial f/\partial u$, $f_v = \partial f/\partial v$.