

**Exo :** Soit  $h(s) = (x(s), y(s))$  une courbe paramétrée par  $s$  son abscisse curvilinéaire.

- (1) Montrer qu'il existe un changement de coordonnées affine de  $\mathbb{R}^2$  tel que

$$x(\epsilon) = \epsilon + o(\epsilon) \quad y(\epsilon) = \frac{\kappa}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

pour  $\epsilon$  petit.

- (2) Soit  $(a(\epsilon), b(\epsilon))$  le centre du cercle passant par  $h(\pm\epsilon)$  et  $0 = h(0)$ . Montrer que  $a(\epsilon) = o(\epsilon)$  et en déduire que  $b(\epsilon) = 1/\kappa(0) + o(\epsilon)$ .
- (3) Donner une interprétation géométrique (faire un dessin).

**Exo :** Soit  $\Gamma$  une courbe paramétrée  $f(s) = (x(s), y(s)), s \in [a, b]$ , où  $s$  désigne l'abscisse curvilinéaire. Notons  $N(s)$  la normale à  $f(s)$ . La courbe parallèle est définie par

$$g(s) = f(s) + lN(s).$$

- (1) Soit  $s'$  l'abscisse curvilinéaire de la courbe parallèle à distance  $l > 0$  Montrer que  $\frac{ds'}{ds} = 1 - l\kappa(s)$ , où  $\kappa(s)$  est la courbure de  $f(s)$ .
- (2) Montrer que la courbure  $\kappa'(s)$  de  $g(s)$  est donnée par  $\kappa' = \frac{\kappa}{1-l\kappa}$ .

**Exo :** Déterminer la courbure  $\kappa(t)$  et l'abscisse curvilinéaire  $s(t)$

- (1) de la spirale logarithmique

$$x(t) = ae^{bt} \cos(t), \quad y(t) = ae^{bt} \sin(t)$$

. Réponse :

$$[s = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b} e^{bt}, 1/(bs)]$$

- (2) de la cardioïde

$$x(t) = r \cos(t)(1 + \cos(t)), \quad y(t) = r \sin(t)(1 + \cos(t))$$

. Réponse :

$$[\kappa = \frac{3}{4r} \frac{1}{\cos(\frac{t}{2})}, s = 4r \sin(\frac{t}{2}).]$$

- (3) de l'hypocycloïde

$$x(t) = (1-r) \cos(t) + r \cos((1/r-1)t), \quad y(t) = (1-r) \sin(t) + r \sin((1/r-1)t)$$

. Réponse :

$$[\kappa = \frac{2r-1}{4r(1-r)} \frac{1}{\sin(\frac{t}{2r})}, s = 8r(1-r) \sin^2(\frac{t}{4r}).]$$

**Exo :**

Soit  $f(t) = (bt, at^2)$ . On note  $s$  l'abscisse curvilinéaire ; calculer  $ds/dt$ . Trouver une expression pour  $s$  comme fonction de  $t$  et  $t$  comme fonction de  $s$ . Calculer la courbure  $\kappa(t)$ .

Soit  $g(s) = (r \sin(s/r), r(1 - \cos(s/r)))$ . Montrer que  $s$  est l'abscisse curv. de  $g$  Déterminer la valeur de  $r$  telle que

$$|g(s) - f(t(s))| = o(s^2).$$