Exo : Soit Γ une courbe paramétrée

$$f(t) = (x(t), y(t)), t \in [0,1],$$

où $x, y \in C^1([0,1])$. La longueur de la courbe est définie par

$$\sup_{(t_i)} \left(\sum_i \mid f(t_{i+1}) - f(t_i) \mid \right)$$

où $= t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = 1$ est une sous-division de $[0,1]$. Montrer que la longueur vaut

$$\int_0^1 \mid \frac{df}{dt} \mid dt.$$

Exo : Soit Γ une courbe paramétrée

$$f(t) = (x(t), y(t)).$$

Montrer que sa courbure $\kappa(s)$ vaut

$$\frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculer la courbure d'une ellipse :

$$f(t) = (acos(t), bsin(t)),\ a, b > 0.$$

Calculer la courbure d'une spirale logarithmique :

$$f(t) = e^{mt}(cos(t), sin(t)), m > 0.$$

Exo : Soit Γ une courbe paramétrée. On note $C(\epsilon)$ le cercle passant par les points

$$f(-\epsilon), f(0), f(\epsilon.)$$

Montrer que $C(\epsilon)$ a une limite quand $\epsilon \to 0$. C'est *le cercle osculateur à* Γ en $f(0)$. Son centre c'est *le centre de courbure*.