



Travaux dirigés - Polynômes

TD n°16

Pré-requis :

- Maîtriser les opérations algébriques élémentaires
- Savoir poser une division euclidienne

Objectifs :

- Maîtriser les opérations sur les degrés
- Connaître la notion de divisibilité pour des polynômes
- Savoir effectuer une division euclidienne avec des polynômes

Exercice 1

1. Calculez le reste et le quotient de la division euclidienne de $1 + X + X^2 + X^3$ par $2 + X$.
2. Posez la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 - X^2 + 2X + 1$ par $2X^2 - 3X + 1$.

Exercice 2

Effectuez la division euclidienne de $X^5 + 3X^4 + 5X^3 + X - 1$ par $X^3 - 2X + 1$

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer le reste R de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$.

1. Quel est le degré de R ? Déduisez en sa forme.
2. Démontrez que R satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} 3 &= R(1) \\ n+1 &= R'(1) \end{cases}$$

3. Concluez en déterminant R .

Exercice 4

Trouvez^a $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1$,
2. $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = X$,
3. $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = X^2$,
4. $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1 + 2X + X^2$.

^a. leur existence est admise

Exercice 5

1. Calculez le reste et le quotient de la division euclidienne de $1 + X + X^2 + X^3$ par $2 + X$.
2. Écrivez la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 - X^2 + 2X + 1$ par $2X^2 - 3X + 1$.

Exercice 6

1. Calculez les racines du polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$.
2. Le polynôme P est-il un diviseur de $(X^8 + 1)^8 - X^8$?
3. Le polynôme P est-il un diviseur de $(X^5 + 1)^5 - X^5$?

Exercice 7

Pour $a \neq b$, sachant que le reste de la division de P par $(X - a)$ est 1 et que celui de la division de P par $(X - b)$ est -1 quel est le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 8

1. Soient P et Q deux polynômes. Montrez que pour tout entier k , $P - Q$ divise $P^k - Q^k$.
2. En déduire que pour tout $P \in K[X]$, $P - X$ divise $P(P) - P$.

Pré-requis :

- Maîtriser les opérations sur les degrés
- Connaître la notion de divisibilité pour des polynômes
- Savoir effectuer une division euclidienne
- Savoir dériver un polynôme

Objectifs :

- Savoir exhiber certains diviseurs d'un polynôme à l'aide de ses racines
- Savoir déterminer la multiplicité d'une racine
- Savoir utiliser les racines d'un polynôme pour le factoriser

Exercice 9

Soit P le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ suivant : $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$. Déterminez les coefficients a, b dans \mathbb{Z} de façon que $(X - 1)^2$ divise P . Même question avec le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 10

Pour quelles valeurs de n le polynôme $(X + 1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

(Indication : on pourra utiliser le fait que les racines complexes de $X^2 + X + 1 = 0$ sont des racines de l'unité qu'on pourra expliciter.)

Exercice 11

Démontrez qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ admet $a \in K$ comme racine double si, et seulement si, $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$ et $P''(a) \neq 0$.

Exercice 12

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n .

1. Démontrez qu'entre deux racines réelles de P il y a une racine réelle de P' .
2. Déduisez-en que si P a toutes ses racines réelles, il en va de même de P' .
3. Est-ce que si P' a toutes ses racines réelles, il en va de même pour P ?

Exercice 13

Factorisez sur \mathbb{C} les polynômes $P = 6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4$ et $Q = 6X^4 - 31X^3 + 46X^2 - 11X - 10$.

Exercice 14

2 est racine de

$$P = X^8 - 9X^7 + 28X^6 - 20X^5 - 80X^4 + 208X^3 - 192X^2 + 64X$$

Déterminez sa multiplicité.

Pré-requis :

- Savoir reconnaître des racines évidentes
- Savoir calculer la multiplicité d'une racine
- Savoir trouver les racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels ou complexes et le factoriser
- Maîtriser les nombres complexes (conjugué, partie réelle, module)

Objectifs :

- Connaître les polynômes irréductibles de \mathbb{C} et de \mathbb{R}
- Savoir décomposer sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} un polynôme en produit d'irréductibles
- Connaître les relations entre nombre de racines et degré d'un polynôme

Exercice 15

1. Démontrez que $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^4 - \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X - 1$. Donnez, sans calcul, une autre racine complexe de ce polynôme.
2. Effectuez la division euclidienne du polynôme $P(X)$ par le polynôme $Q(X) = X^2 - \sqrt{3}X + 1$, puis déterminez les 4 racines de $P(X)$.
3. Quelle est la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Quelle est la décomposition de $P(X)$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 16

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes ci-dessous :

1. $P = X^3 - 2$.

3. $R = X^5 - 1$.

2. $Q = X^{13} - 1$.

4. $S = X^5 + 1$.

Exercice 17

Factorisez sur \mathbb{C} , puis sur \mathbb{R} les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles :

$$1 + X + X^2 + X^3, \quad 1 + X + X^2 + X^3 + X^4, \quad 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5.$$

Pré-requis :

- savoir utiliser la factorisation des polynômes
- savoir effectuer la division euclidienne de deux polynômes
- savoir rechercher les racines communes à deux polynômes

Objectifs :

- savoir effectuer des calculs élémentaires sur les fractions rationnelles
- savoir décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ (resp $\mathbb{R}(X)$) une fraction rationnelle de deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (resp $\mathbb{R}[X]$)

Exercice 18

Décomposez en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)(X-2)(X+3)}, \quad \frac{1}{1-X^4}, \quad \frac{X}{(X-1)^2}, \quad \frac{X^2-3X+4}{X^2-4X+4}$$

Exercice 19

Écrivez, sans chercher à la calculer, la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} .

$$\frac{2X^6 + 3X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 18X - 5}{(X+2)(X-1)^2(X^2+X+1)}.$$

Exercice 20

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles (pour les deux dernières, sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}).

$$\frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}, \quad \frac{X+i}{X^2+i}, \quad \frac{X^2+1}{X^4+1}, \quad \frac{X^2+X+1}{X^4+1}$$

Exercice 21

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{X^2+X}{(X-1)^n}, \quad \frac{(X+1)^n}{(X-1)^n}.$$

Exercice 22

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R}

$$\frac{X^6+2}{(X^2+1)^2(X-1)}, \quad \frac{1}{1+X^4}, \quad \frac{1}{X^n-1}$$

Exercice 23

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{(X^4-1)^2} \text{ sur } \mathbb{C}$$

$$G(X) = \frac{1}{\prod_{p=0}^n (X+p)}, \quad H(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)^3(X^2-X+1)^3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Pré-requis :

- savoir décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle de deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$
- savoir calculer les primitives de certaines fractions rationnelles de type éléments simples

Objectifs :

- décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$
- savoir calculer les primitives de fractions rationnelles réelles

Exercice 24. Pré-requis

Déterminez une primitive, sur leur ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{x-7}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-11)^n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$$

$$x \mapsto \frac{1}{4x^2+1}$$

$$x \mapsto \frac{1}{5x^2+3}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+4}$$

Plus difficile^a...

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+3x+3)^2}$$

a. hors programme UE

Exercice 25

Déterminez, sur leur ensemble de définition, une primitive des fonctions rationnelles suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 3}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{3x+3}{(x-1)^3}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{-x^2 - 2x - 3}{x(x^2 + x + 1)}$$