arXiv:math/0402256v1 [math.DS] 16 Feb 2004

MODULES FORMELS LOCAUX DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES

par

Jean-François Mattei & Eliane Salem

Résumé. — Nous donnons une liste complète d'invariants formels locaux d'une large classe de 1-formes différentielles formelles $\omega \in \mathbb{C}[[x,y]]dx + \mathbb{C}[[x,y]]dy$.

Une déformation $\widehat{\mathrm{SL}}$-équisingulière est une déformation équiréductible qui, après réduction, laisse invariant chaque type singulier formel local ainsi que la représentation d'holonomie de chaque composante du diviseur exceptionnel. Nous caractérisons les 1-formes de types formel fini (t.f.f.), i.e. celles qui possèdent une déformation $\widehat{\mathrm{SL}}$-équisingulière verselle, en donnant un critère combinatoire explicite de finitude.

Les formes t.f.f. contiennent un ouvert dense pour la topologie de Krull dans l'ouvert des 1- formes de deuxième espèce.

Abstract **(Formal local modulus for holomorphic singular foliations)**

We give a complete list of formal invariants for a large class of formal differential 1-forms $\omega \in \mathbb{C}[[x,y]]dx + \mathbb{C}[[x,y]]dy$.

A $\widehat{\mathrm{SL}}$-equisingular deformation is an equireducible deformation which leaves invariant both the local formal types and the holonomy representation of the components of the exceptional divisor. We characterize the 1-forms with finite formal type (t.f.f), i.e. those which admit a semi-universal $\widehat{\mathrm{SL}}$-equisingular deformation, and we give an explicit combinatorial criterion of finiteness.

The set of 1-forms with finite formal type contains a dense open set (in the sense of Krull's topology)in the set of 1-forms of the second kind.

Table des matières

Introduction 2
1. Préliminaires sur les arbres d'éclatements 10
1.1. Arbres et arbres duaux 10

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 32A10, 32A20, 32B10,34C20, 34C35, 58F23, 32G34, 32S15, 32S30, 32S45, 32S65.

Mots clefs. — singularités, champs de vecteurs, feuilletage, equisingularité, déformation, modules, formes normales.

1.2. Arbres infinitésimaux et relèvements 13
1.3. Les faisceaux de difféomorphismes t. f. 16
1.4. Théorèmes de stabilité et de détermination finie 18
2. Déformations de feuilletages 24
2.1. Généralités sur les feuilletages 24
2.2. Déformations formelles d'un feuilletage 28
2.3. Construction de déformations formelles par collage 30
3. Equiréduction 37
3.1. Singularités de deuxième espèce 37
3.2. Equiréductibilité 42
3.3. Généricité de l'équiréduction 47
4. Équisingularité semi-locale 49
4.1. Equivalence semi-locale de déformations 50
4.2. Déformations $\widehat{SL}$-équisingulières 51
4.3. Champs basiques, champs transverses 52
4.4. Vitesses de déformation 55
4.5. Codimension formelle de $\mathcal{F}$ 56
4.6. Déformations $\widehat{SL}$-verselles 59
5. Caractérisation des singularités t.f.f. 62
5.1. Description du faisceau $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ 62
5.2. Nerf complet associé à $\mathcal{F}$ 66
5.3. Les critères de finitude formelle de $\mathcal{F}$ 68
5.4. Démonstration du Théorème de codimension 69
5.5. Feuilletages de deuxième espèce non-dégénérés 75
5.6. Démonstration du théorème de préparation 76
6. Généricité des singularités t.f.f. 79
6.1. Jets déterminant la deuxième espèce 79
6.2. Krull-densité des singularités t.f.f. 81
Références 87

Introduction

La classification formelle des germes d'équations différentielles ordinaires à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont la partie linéaire est non-nulle et diagonalisable est bien connue depuis H. Poincaré [**29**] et la thèse de H. Dulac [**12**]. De manière générale il s'agit de comparer des 1-formes différentielles à coefficients des séries formelles

$$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,, \tag{1}$$

$$a(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j\,, \quad b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^iy^j \in \mathbb{C}[[x,y]]$$

par la relation de *conjugaison orbitale formelle* : les deux 1-formes $\omega_j = a_j(x,y)dx + b_j(x,y)dy$, $j = 1,2$, sont formellement conjuguées, $\omega_1 \sim_{for} \omega_2$, s'il existe une *unité formelle* $u(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$, $u(0,0) \neq 0$ et un *difféomorphisme formel* $\phi(x,y) := (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$, $\phi(0,0) = (0,0)$, $det\,(D_0\phi) \neq 0$, tels que :

$$\omega_2 \,=\, u \cdot \phi^* \omega_1 \,:=\, U \cdot [\, a_1\,(\phi_1, \phi_2)\; d\phi_1 + b_1\,(\phi_1, \phi_2)\; d\phi_2\,] \;, \tag{2}$$

où $D_0\phi$ désigne la matrice jacobienne de ϕ à l'origine. Classiquement, pour les 1-formes les plus simples, les 1-formes réduites, une liste complète des classes de conjugaison formelle est obtenue par la construction de modèles, les "formes normales", cf. [**12**][**13**]. Elle consiste à choisir ϕ et u qui annulent le plus possible de coefficients du dévelopement en série de la 1-forme. En fait, comme l'a mis en évidence J. Martinet [**17**], elle correspond à une "jordanisation" de l'application adjointe agissant sur les jets infinis de champs de vecteurs, associée au champ dual de la 1-forme.

Rappelons que la 1-forme (1) est dite *réduite* si la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ -b_{10} & -b_{01} \end{pmatrix} \tag{3}$$

est diagonalisable avec des valeurs propres λ_1, λ_2 qui vérifient : $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}_{>0}$. La liste des formes normales, qui sont polynomiales en les variables x, y et linéaires en les paramètres, cf. (3), fait aparaitre qu'une fois fixé le rapport des valeurs propres λ_2/λ_1, deux invariants numériques suffisent à la classification formelle : un invariant discret (un élément de $\mathbb{N}$) qui, lorsque la 1-forme ω est analytique, donne la classification topologique [**5**] et un invariant continu (un élément de $\mathbb{C}$).

La classe la plus simple de formes non-réduites est celle des *1-formes nilpotentes* : la matrice (3) est nilpotente. La classification de ces 1-formes a été abordée par la recherche de formes normales, cf. F. Takens [**32**] [**16**] [**31**]. Le problème rencontré est l'obtention d'une forme normale qui soit à la fois canonique [**15**] [**28**] et convergente. Le caractère génériquement divergent-Gevrey de la forme normale canonique [**8**] ne permet plus de considérer cette expression comme une liste de 1-formes-modèles. L'autre approche du problème, initialisé par D. Cerveau et R. Moussu dans [**11**] puis complété par R. Meziani [**26**] et d'autres auteurs [**3**] consiste à mettre en évidence un système complet et non-redondant d'invariants formels. L'invariant considéré, qui recouvre presque tous les cas, est une représentation du groupe libre à deux générateurs dans le groupe des difféomorphismes formels d'une variable

$$\widehat{\mathcal{H}}_\omega : \mathbb{Z}\alpha_1 \star \mathbb{Z}\alpha_2 \longrightarrow \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0) := \{\, h(z) \in \mathbb{C}[[\, z\,]] \;\; | \; h(0) = 0\,,\; h'(0) \neq 0\} \;.$$

Il s'interprète comme rendant compte de la structure transverse du feuilletage et est évidement de dimension infini. La classification est donc obtenue pour cette classe de 1-formes, mais les liens entre les deux approches demeure à ce jour encore très mystérieux.

Nous abordons ici le cas général. Notre approche consiste à localiser le problème "au voisinage d'une 1-forme", ensuite définir un groupe d'invariants qui généralisent l'invariant $\widehat{\mathcal{H}}_\omega$ du cas nilpotent et enfin fixer ce premier groupe d'invariants et chercher une famille complètant la liste.

La localisaton se fait en ne s'intéressant qu'aux germes de familles analytiques de 1-formes formelles. Plus précisemment, une *déformation*[(1)] *transversalement formelle d'une 1-forme formelle ω de base le germe* $P := (\mathbb{C}^p, 0)$ est la donnée d'une 1- forme qui s'écrit

$$\eta = A(x,y;\, t)\, dx + B(x,y;\, t)\, dy\,, \quad \eta_0 := \eta|_{t=0} = \omega,$$
$$A(x,y;t) = \sum_{i,j} A_{ij}(t) x^i y^j\,, \quad B(x,y;t) = \sum_{i,j} B_{ij}(t) x^i y^j \in \mathbb{C}\{t\}[[x,y]]\,,$$

les coefficients $A_{ij}(t)$ et $B_{ij}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ étant tous convergents sur un même polydisque ouvert. Deux déformations η et η' sont dites *t.f.-conjuguées*, s'il existe dans $\mathbb{C}^p$ un polydisque ouvert K centé à l'origine et des séries $\phi^1,\ \phi^2,\ u,\ c \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}(K)\,[[x,y]]$, $u_0(0,0,0) \neq 0$, telles que :

$$\phi^*\,\eta = \ u \cdot \eta' + cdt\,, \quad \phi|_{t=0} = (x,y)\,, \qquad \phi := \left(\phi^1,\, \phi^2\right)\,.$$

Définisons un *d-invariant formel* comme un objet $\mathcal{I}(\omega)$ attaché à chaque 1-forme formelle ω, tel que pour toute déformation η t.f.-conjuguée à la *déformation constante* $\eta^{cst} \equiv \omega$, on a : $\mathcal{I}(\eta|_{t=t_0}) = \mathcal{I}(\eta|_{t=0})$ pour tout t_0 petit.

Avant de définir les groupes d'invariants rappelons l'existence d'une *réduction des singularités de* ω [**30**] [**22**], c'est à dire d'une application holomorphe canonique notée $E_\omega : \mathcal{M}_\omega \longrightarrow \mathbb{C}^2$, obtenue comme composition finie d'applications d'éclatements simultané de points, telle qu'en chaque point m du *diviseur de réduction* $\mathcal{D}_\omega := E_\omega^{-1}(0)$ l'image réciproque $E_\omega^*(\omega)$ peut s'écrire, dans des coordonnées locales u, v, appropriées : ${E_\omega}^*(\omega) = \ u^p v^q \widetilde{\omega}_m$, avec $\mathcal{D}_\omega = \{u^\varepsilon v = 0\}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 0$ ou 1, et $\widetilde{\omega}_m$ est une 1-forme formelle en m, non-singulière ou bien singulière à singularité isolée et réduite. Lorsqu'en un point m de $\mathcal{D}_\omega$, la restriction du germe $\widetilde{\omega}_m$ au diviseur $\mathcal{D}_\omega$ n'est pas identiquement nulle, ω possède un nombre infini de *séparatrices formelles*, c'est à dire descourbes irréductibles formelles à l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont la paramètrisation $\gamma(t) \in \mathbb{C}[[t]]^2$ satisfait $\gamma^*\omega \equiv 0$. On dit alors que ω est *dicritique.* Lorsque ω n'est pas dicritique, le nombre de séparatrices est fini ≥ 1, d'après C. Camacho- P. Sad [**7**].

Dans ce tout ce travail nous supposons ω non-dicritique

Nous distinguerons trois types de d-invariants. Le premier sera constitué d'invariants discrets, ce sont les plus élémentaires ; ils ne dépendent en général que des séparatrices formelles. Le deuxième rendra compte des singularités obtenues après réduction ; ces invariants sont en général contenu dans un espace de dimension finie. Le troisième type d'invariant est plus complexe. L'objet de ce travail est de les mettre en évidence. Nous montrons en particulier qu'ils constituent génériquement, dans un sens précisé au chapitre 6 des familles de dimensions finies. Plus précisément

(1) Il serait plus correct de dire : un germe de déformation.

distingons :

• **les d-invariants formels globaux du processus la réduction.** Ils décrivent seulement le processus de réduction, en oubiant la position exacte, sur chaque composante de $\mathcal{D}_\omega$, des centres d'éclatement et des points du *lieu singulier de réduction*
$$\Sigma_\omega := \{m \in \mathcal{D}_\omega \mid \widetilde{\omega}_m(m) = 0\} \ .$$
Classiquement on construit un graphe connexe pondéré et fléché, *l'arbre dual de réduction* $\mathbb{A}^*[\omega]$ de la manière suivante : on se donne biunivoquement un sommet de $\mathbb{A}^*[\omega]$ pour chaque composante irréductible D de $\mathcal{D}_\omega$ puis on le pondère par l'auto-intersection de D et on lui attache autant de flèches que de points de $\Sigma_\omega \cap (D - Sing(\mathcal{D}_\omega))$, enfin on relie deux sommets par une arète chaque fois que les composantes irréductibles correspondantes s'intersectent. Pour une très large classe de 1-formes, les *formes de deuxième espèce* décrites en (3.1), la donnée de $\mathbb{A}^*[\omega]$ équivaut à la donnée du *type d'équisingularité* [(2)] du germe de courbe formelle $Sep(\omega)$, formée de toutes les séparatrices formelles de ω.

• **Les d-invariants formels locaux issus de la réduction.** Remarquons d'abord que $E^*_\omega(\omega)$ définit une 1-forme formelle en chaque point du diviseur $\mathcal{D}_\omega$. De manière précise, $E^*_\omega(\omega)$ est une 1-forme *transversalement formelle* : elle s'écrit localement $A(u,v)\,du + B(u,v)\,dv$, les coefficients A, B étant des sections locales du faisceau $\widehat{\mathcal{O}}$, de base $\mathcal{D}_\omega$, obtenu en complétant, pour la topologie $\mathfrak{I}_{\mathcal{D}_\omega}$-adique, la restriction à $\mathcal{D}_\omega$ du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\omega}$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{M}_\omega$, $\mathfrak{I}_{\mathcal{D}_\omega} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{M}_\omega}$ désignant le faisceau d'idéaux des fonctions nulles sur $\mathcal{D}_\omega$. Des expressions précises de A et de B sont donnée en (25) et (26). On doit en retenir que $E^*_\omega(\omega)$ peut être vu comme un champ, le long de $\mathcal{D}_\omega$, de 1-formes formelles dont les coefficients varient holomorphiquement le long de $\mathcal{D}_\omega$. Les sections locales de $\widehat{\mathcal{O}}$ s'appellent *fonctions transversalement formelles.* On définit de la même manière [(3)] les faisceaux des *champs de vecteurs, formes différentielles, difféomorphismes locaux... transversalement formels.* Nous écrirons *en abrégé t.f.* pour transversalement formel.

La collection $(\widetilde{\omega}_m)_{m\in\mathcal{D}_\omega}$ défini un sous-module noté $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ du faisceau de base $\mathcal{D}_\omega$ des 1-formes t.f., que nous appelons *feuilletage réduit associé à* ω. La *classe de conjugaison t.f. du feuilletage* $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ *en un point* $m \in \mathcal{D}_\omega$ est la classe de conjugaison du germe $\widetilde{\omega}_m$ pour la relation d'équivalence définie par les égalités (2), mais avec ici ϕ et u transversalement formels. Nous notons $\left[\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,\,m}\right]_{tf}$ cette classe. La collection
$$\widehat{L}(\omega) := \left(\left[\,\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,\,m}\right]_{tf}\right)_{m\in\Sigma_\omega} ,$$

---

(2) Le *type d'équisingularité* d'une courbe formelle d'équation $f(x,y) := \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}x^iy^j = 0$ peut être défini comme le type topologique commun à tous les germes de courbes analytiques, à l'origine de $\mathbb{C}^2$, d'équations $\sum_{i,j=1}^{N} f_{ij}x^iy^j = 0$, pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

(3) ou encore à l'aide de l'extension des scalaire $\iota^{-1}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\omega}|\mathcal{D}_\omega\right) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}$, où $\iota : \mathcal{D}_\omega \hookrightarrow \mathcal{M}_\omega$ désigne l'injection canonique.

est clairement un d-invariant formel de ω. Nous l'appelons *d-invariant local t.f. de ω*. Remarquons que lorsque ω est *deuxième espèce* (3.1.4) le d-invariant formel $L(\omega)$ est "de dimension finie : il peut être contenu dans une union finie d'exemplaires de $\mathbb{C}$. Cela ressort tout simplement de l'expression des formes normales pour la conjugaison t.f. qui, dans ces cas, sont les mêmes que les formes normales de la conjugaison formelle (3.1).

• **Les d-invariants formels semi-locaux issus de la réduction.** En choisissant une courbe lisse formelle en un point $m_0 \notin \Sigma_\omega$ d'une composante irréductible D de $\mathcal{D}_\omega$, ainsi qu'une coordonnée formelle sur cette courbe, on définit de la même manière qu'en [**22**] la *représentation (formelle) d'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$* le long cette composante :

$$\mathcal{H}_{\omega,D} : \pi_1(D - \Sigma_\omega;\, m_0) \longrightarrow \widehat{Diff}(\mathbb{C},0)\,.$$

La classe $[\mathcal{H}_{\omega,D}]_{for}$ de ce morphisme pour la composition à gauche avec les automorphisme intérieurs de $\widehat{Diff}(\mathbb{C},0)$ ne dépend d'aucun choix. La collection de ces classes est visiblement un d-invariant formel de ω.

Finalement, en regroupant ces trois types d'invariants, nous obtenons la collection :

$$\widehat{SL}(\omega) \ := \ \Big(\ \mathbb{A}^*[\omega]\ ,\ \widehat{\mathcal{L}}(\omega)\ ,\ \big([\mathcal{H}_{\omega,D}]_{tf}\big)_{D\in comp(\mathcal{D}_\omega)}\Big)$$

où $comp(\mathcal{D}_\omega)$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{D}_\omega$. Appelons cet invariant *invariant complet d'équisingularite semi-locale formelle* ou encore *de $\widehat{SL}$-équisingularité associé à ω*. Dans [**25**] [**24**] nous montrons sous une hypothèse générique très faible, que lorsque ω est holomorphe ces d-invariants formels sont des d-invariants [(4)] topologiques. Il est maintenant naturel de rechercher une classification à "type $\widehat{SL}$ fixé".

Une déformation t.f. $\eta := A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy$ de ω de base $P := (\mathbb{C}^p,\,0)$ sera dite *équiréductible* s'il existe une "réduction en famille". Cela signifie précisément l'existence d'une variété $\mathcal{M}_\eta$ de dimension $2+p$, munie d'un diviseur $\mathcal{D}_\eta \subset \mathcal{M}_\eta$ à croisements normaux, d'un sous espace lisse $\Sigma_\eta \subset \mathcal{D}_\eta$ de dimension p, d'une application holomorphe propre $E_\eta : \mathcal{M}_\eta \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times P$ obtenue par une succession d'éclatements de courbes lisses, avec $E_\eta^{-1}(0 \times P) = \mathcal{D}_\eta$, telle que la restriction de $\pi_\eta := pr_2 \circ E_\eta$ à Σ_η est étale et que, pour chaque $t \in P$ assez petit, la *fibre de E_η au dessus de t*

$$E_{\eta,t} \ :\ \mathcal{M}_{\eta,t} := \pi_\eta^{-1}(t) \ \longrightarrow\ \mathbb{C}^2 \times \{t\}$$

est l'application de réduction de la 1-forme η_t obtenue en restreignant η à $\mathbb{C}^2 \times \{t\}$. De plus la fibre du diviseur est le diviseur de réduction de η_t et la fibre de Σ_η est le

(4)Nous montrons précisément que l'arbre dual de réduction, le type analytique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ en chaque point $m \in \Sigma_m$, ainsi que le type analytique de la représentation d'holonomie de chaque composante de $\mathcal{D}_\omega$, reste constant dans chaque déformation topologiquement triviale du germe de feuilletage singulier en l'origine défini par ω.

lieu singulier de réduction de η_t :

$$\mathcal{D}_\eta \cap \pi^{-1}(t) \,=\, \mathcal{D}_{\eta_t}\,, \qquad \Sigma_\eta \cap \pi^{-1}(t) = \Sigma_{\eta_t}\,.$$

On voit facilement que l'espace $\mathcal{M}_\eta$ est un produit C^∞ au voisinage de $\mathcal{D}_\eta$: il existe un germe de difféomorphisme C^∞ au desus de P, $\underline{\Psi} : (\mathcal{M}_\eta, \mathcal{D}_\omega) \overset{\sim}{\longrightarrow} (\mathcal{M}_\omega \times P,\, \mathcal{D}_\omega \times \{0\})$, $\underline{\Psi} = (\Psi, \pi_\eta)$, induisant une famille de difféomorphismes

$$\Psi_t : (\mathcal{M}_{\eta_t}, \mathcal{D}_{\eta_t}) \longrightarrow (\mathcal{M}_\omega \times \{t\}, \mathcal{D}_\omega \times \{t\})\;. \tag{4}$$

De plus on a : $\Psi_t(\Sigma_{\eta_t}) = \Sigma_\omega \times \{t\}$. Nous pouvons maintenant définir précisement la notion de *déformation à type $\widehat{SL}$ constant*, ou encore de *déformation $\widehat{SL}$-équisingulière*, par les propriétés suivantes :

1. η est une déformation équiréductible de ω,
2. $\widetilde{\mathcal{F}}_\eta$ est *t.f.-triviale* le long de chaque composante irréductible de Σ_η, c'est à dire qu'en chaque point c de $\Sigma_\omega \subset \Sigma_\eta$ il existe un difféomorphismes ϕ_c du germe $(\mathcal{M}_\eta, c)$, sur le germe $(\mathcal{M}_\omega \times P, (c, 0))$, fibré au dessus de P, t.f. le long de $\mathcal{D}_\eta$ et tel que $\phi_c^* \widetilde{\mathcal{F}}_{\omega^{cste}} = \widetilde{\mathcal{F}}_\eta$,
3. pour chaque composante irréductible D de $\mathcal{D}_\omega = \pi_\eta^{-1}(0) \cap D_\eta$, il existe une famille analytique de difféomorphismes formels d'une variable $\phi_t(z)$, $\phi_t(0) = 0$, telle que pour t assez petit on ait :

   $$\tau_{\phi_t} \circ \widehat{\mathcal{H}}_{\eta_t\,,\,D} \,=\, \widehat{\mathcal{H}}_{\omega\,,\,D}\,, \circ \Psi_{t\,*}\,,$$

   avec $\tau_{\phi_t}(g) := \phi_t \circ g \circ \phi_t^{-1}$, et $\Psi_{t\,*}$ désignant l'automorphisme induit par (4) sur les groupes fondamentaux considérés.

La "classification locale en ω " sera achevée si l'on obtient une déformation η de ω qui est $\widehat{SL}$*-verselle* dans le sens suivant :

– *η est $\widehat{SL}$-équisingulière et toute déformation $\widehat{SL}$-équisingulière η' est t.f. conjuguée à une déformation qui s'écrit $\underline{\lambda}^*\eta$ où $\underline{\lambda}(x, y, t) = (x, y, \lambda(t)$ et λ est un germe d'application holomorphe de l'espace des paramètre de η dans celui de $(\eta'$.*

• **Les singularités de type formel fini (t.f.f.).** Considérons d'abord la situation infinitésimale. Le faisceau (de base $\mathcal{D}_\omega$) essentiel, décrit en (4.3.1), est le quotient

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} = \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} \Big/ \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}$$

du faisceau des germes aux points de $\mathcal{D}_\omega$ des champs de vecteurs t.f. basiques pour $\mathcal{F}_\omega$ par le sous-faisceau des champs tangents à $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. On appellera *déformation infinitésimale de* ω tout élement de l'espace $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right)$, où $\mathcal{U}$ désigne un *recouvrement distingué* du diviseur $\mathcal{D}_\omega$, i.e. ses ouverts sont de deux types : l'intersection de $\mathcal{D}_\omega$ avec un petit polydisque de coordonnées centré en un point singulier de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$, ou bien une composante irrédictible de $\mathcal{D}_\omega$ épointée de toutes les singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ qu'elle portait. Les conditions 2. et 3. ci-dessus donnent, pour toute déformation $\widehat{SL}$-équisingulière η de ω d'espace de paramères $(\mathbb{C}^p, 0)$, des germes ϕ_U de difféomorphismes t.f. le long de chaque $U \in \mathcal{U}$, qui trivialisent $\widetilde{\mathcal{F}}_\eta$. La non-trivialité au premier ordre de η est décrite par "l'application dérivée à l'origine" suivante, explicitée en (66) :

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}_\eta}{\partial t}\right]_{t=0} : T_0\mathbb{C}^p \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right), \quad Z \longmapsto \left[\left(\frac{\partial \phi_V \circ \phi_U^{-1}}{\partial t}\right)_{t=0} \cdot Z\right]. \tag{5}$$

Nous montrons en (4.5.2) que toute application linéaire de $T_0\mathbb{C}^p$ dans $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right)$ peut être réalisée comme la dérivée (5) d'une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière η d'espace de paramètre $(\mathbb{C}^p, 0)$. Définissons :

– *ω est de type formel fini, t.f.f. en abrégé, si* $\widehat{\beta}(\omega) := dim_{\mathbb{C}} H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right)$ *est fini.*

Nous devrons souvent nous limiter à la classe des 1-formes ω qui satisfont la propriété suivante : si tous les *groupes d'holonomies* $H_{D,\omega} := Im(\mathcal{H}_{D,\omega})$ sont finis, alors il existe un point singulier $c \in Sing(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega)$ en lequel $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ ne possède pas de germe d'intégrale première t.f.. Une telle 1-forme sera dite *bonne*. L'énoncé suivant regroupe les théorèmes (4.5.2) et (4.6.3)

Théorème principal 1. *Soit ω bonne. Alors :*

1. *ω est t.f.f. si et seulement si ω possède une déformation $\widehat{SL}$-verselle ;*
2. *une déformation η de ω est $\widehat{SL}$-verselle si et seulement si l'application dérivée* $\left[\frac{\partial \mathcal{F}_\eta}{\partial t}\right]_{t=0}$ *est surjective.*

La condition "ω bonne" peut vraissemblablement être affaiblie, au prix de développements plus longs. Mais le principal intétêt de cette condition est de permettre un calcul simple de $\widehat{\beta}(\omega)$. De manière précise, en (5.2) nous associons à ω un arbre bicoloré, partiellement orienté et pondéré $\mathfrak{N}^*(\omega)$, appelé *nerf complet de* ω. Il se construit de manière simple à partir seulement de l'invariant $\widehat{SL}(\omega)$. Notons :

$$\widehat{\tau}(\omega) := dim_{\mathbb{C}} H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\delta}(\omega) := dim_{\mathbb{C}} H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right)$$

et désignons par $\widehat{\mathfrak{C}}(\omega)$ l'espace topologique obtenu à partir de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\omega)$ en contractant et en identifiant à un seul et même point touts les sommets et arêtes de poids 0. Nous montrons :

Théorème principal 2. *Soit ω bonne. Alors :*

1. *ω est t.f.f. si et seulement si la partie rouge de $\mathfrak{N}^*(\omega)$ est connexe et répulsive ;*
2. *$\widehat{\beta}(\omega) \leq \widehat{\delta}(\omega) + \widehat{\tau}(\omega)$ et l'égalité est réalisée dès que ω est de deuxième espèce (3.1.4) sans facteur intégrant formel.*
3. *$\widehat{\delta}(\omega) = \sum_c \frac{(\nu_c-1)\,(\nu_c-2)}{2}$ où c parcourt l'ensemble de tous les points singuliers apparaissant dans la réduction (42) de ω et ν_c désigne la multiplicité de l'éclaté divisé de ω au point c.*
4. *$\widehat{\tau}(\omega) = rang_{\mathbb{Z}} H_1\left(\widehat{\mathfrak{C}}(\omega)\,;\,\mathbb{Z}\right)$.*

Lorsque ω est de deuxième espèce $\widehat{\delta}(\mathcal{F})$ est égal à la dimension de la strate à μ-constant de l'union des séparatrices formelles de ω, c.f. (3.1.8).

Ce procédé combinatoire permet aussi d'expliciter une base de $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right)$. Cette précision permet de voir que pour toute déformation $\widehat{SL}$-équisingulière η d'une 1-forme bonne ω de base quelconque $(\mathbb{C}^p,0)$, "les familles de déformations infinitésimales" forment un $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^p,0}$-module de type fini. Plus précisément désignons par $\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_\eta}$ le faisceau de base $\mathcal{D}_\omega\subset\mathcal{D}_\eta$ des germes aux points de $\mathcal{D}_\omega$ de champs de vecteurs de $\mathcal{M}_\eta$ qui sont verticaux et basiques pour $\widetilde{\mathcal{F}}_\eta$.

Théorème de préparation. *Si ω est bonne et t.f.f., alors $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_\eta}\right)$ un $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^p,0}$-module de type fini, qui est libre lorsque ω ne possède pas de facteur intégrant formel.*

Ce théorème enoncé en (4.6.4) et montré en (5.6) est un ingrédient indispensable à la démonstration du théorème principal 1. Sa démonstration ne peut pas se faire par des arguments de géométrie analytique, car le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_\eta}$ n'est pas un faisceau de modules sur le faisceau des fonctions t.f.. Elle utilise le caractère constructif de la démonstration du théorème principal 2, qui permetd'expliciter des bases de déformations infinitésimales. Ainsi le shéma logique de ce papier est :

Théorème principal 2 $\Longrightarrow$ *Théorème de préparation* $\Longrightarrow$ *Théorème principal 1* .

Nous examinons aussi la généralité de ces résultats. Nous décrivons d'abord l'ensemble $\widehat{\mathfrak{E}}^2$ des 1-formes formelles de deuxième espèce, en le stratifiant par "strates d'équisingularité". Chaque srate est pro-constructible de codimension finie, cf. théorème (6.1.2). Nous montrons ensuite le théorème suivant qui est précisé en (6.2.2) :

Théorème principal 3. *L'ensemble $\widehat{\mathfrak{E}}^2$ et le sous ensemble $\widehat{\mathfrak{E}}_{tff}$ des $\omega\in\widehat{\mathfrak{E}}$ qui sont t.f.f sont des ouverts de la topologie de Krull. De plus $\widehat{\mathfrak{E}}^2_{tff}$ est Krull-dense dans $\widehat{\mathfrak{E}}^2$.*

Plan de l'article

Chapitre 1. Les techniques de construction de déformations, de type Kodaira-Spencer, vont consister à decouper $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ le long des ouverts d'un recouvrement adapté $\mathcal{U}$, puis à effectuer des recollements t.f. le long des intersections de ces ouverts. La première obstruction rencontrée vient du caractère formel de la variété ainsi obtenue. L'objet de ce chapitre est de lever cette obstruction : les *théorèmes de stabilité (1.4.8)* et de *détermination finie* (1.4.6) expriment, "avec contrôle des jets", la propriété suivante

– *toute variété formelle obtenue à partir de $\mathcal{M}_\omega$ par recollement t.f. est t.f. isomorphe à une variété holomorphe, qui est la cîme d'un arbre de même arbre dual que ω.*

Ce chapitre est technique. Nous suggèrons de limiter une première lecture au vocabulaire nécéssaire à l'ennoncé des théorèmes (1.4.8) et (1.4.6).

Chapitre 2. Nous développons une technique très générale de construction de déformations $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulières. La notion clé est celle de *système semi-local cohérent* (2.3.5). Elle permet d'établir un *théorème de réalisation* de déformation $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulières (2.3.6), avec controle des jets de la 1-forme définissant la déformation.

Chapitre 3. Nous dégageons l'importante classe des 1-formes *de deuxième espèce*, pour lesquelles l'equiréduction d'une déformation est équivalente à la constance de l'arbre dual pondéré par les auto-intersections, cf. le théorème (3.2.3). Le théorème (3.1.9) donne des condition équivalentes très simples qui caractérise cette classe.

Chapitre 4. Nous introduisons la notion de $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingularité, de déformation infinitésimale et, après avoir donné des techniques de construction de déformations, nous prouvons le théorème principal 1 en admettant le théorème de préparation.

Chapitre 5. Nous prouvons le théorème principal 2, puis le théorème de préparation.

Chapitre 6. Nous stratifions l'espace de formes de deuxième espèce et nous montrons le théorème principal 3.

1. Préliminaires sur les arbres d'éclatements

L'objet de ce chapitre est de prouver des propriétés de "stabilité" et de "détermination finie" pour des espaces obtenus à partir de $\mathbb{C}^2$ par une succession d'éclatements ponctuels au dessus de 0, Théorèmes (1.4.6) et (1.4.8).

1.1. Arbres et arbres duaux. — Nous appelons ici *arbre au dessus d'une variété holomorphe connexe Q de dimension p* la donnée d'un diagramme commutatif $\mathbb{A}_Q$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{M}^h & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{M}^j & \xrightarrow{E^j} & \mathcal{M}^{j-1} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{E^1} & \mathcal{M}^0 & \xrightarrow{\pi} & Q \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\ \Sigma^h & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Sigma^j & \longrightarrow & \Sigma^{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Sigma^0 & & \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\ S^h & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S^j & \longrightarrow & S^{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S^0 & & \end{array} \tag{6}$$

où, pour chaque $j = 0, \ldots, h$: $\mathcal{M}^j$ est une variété analytique complexe lisse de dimension $2+p$ appelée $j^{\text{ème}}$ *espace éclaté*, Σ^j est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{M}^j$ de dimension p appelé $j^{\text{ème}}$ *lieu de singularités*, S^j est une sous-variété analytique lisse fermée (non nécessairement connexe) de Σ^j de dimension p appelé $j^{\text{ème}}$ *centre d'éclatement*, éventuellement S^h peut être vide, et tels que, en notant

$$E_j := E^0 \circ \cdots \circ E^j\,, \quad \pi_j := \pi \circ E_j\,, \quad \mathcal{D}^j := E_j^{-1}(S^0),,$$

avec $j = 0, \ldots, h$, on ait :

0. π est une submersion,
1. chaque E^{j+1} est l'application d'éclatement de centre S^j,
2. chaque S^j est une union de composantes irréductibles de Σ^j et $\Sigma^0 = S^0$,
3. chaque Σ^j est contenu dans $\mathcal{D}^j$ et la restriction de π_j à Σ^j est propre à fibres finies,
4. pour chaque $j = 1, \ldots, h$ la restriction de π_j à chaque composante connexe de S^j est un biholomorphisme sur Q.

Définition 1.1.1. — Nous dirons que *l'arbre* $\mathbb{A}_Q$ *est régulier* si chaque Σ^j est lisse et la restriction de π_j à chaque composante connexe de Σ^j est un biholomorphisme sur Q.

Nous noterons

$$\mathbb{A}_Q = (\mathcal{M}^j, E^j, \Sigma^j, S^j, \pi_j, \mathcal{D}^j)_{j=0,\ldots,h}\ . \tag{7}$$

L'entier h s'appelle la *hauteur de l'arbre*, la variété $\mathcal{M}^0$ son *socle*, $\mathcal{M}^h$ sa *cime* et $\mathcal{D}^j$ le $j^{\text{ème}}$ *diviseur exceptionnel*. Pour simplifier nous désignerons les *données de cime* de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M}^h\ , \quad \widetilde{\Sigma} := \Sigma^h\ , \quad \widetilde{\mathcal{D}} := \mathcal{D}^h\ , \quad \widetilde{E} := E^h\ , \quad \widetilde{\pi} := \pi^h\ . \tag{8}$$

On définit *l'image inverse* de $\mathbb{A}_Q$ par une application holomorphe λ d'une variété holomorphe Q' dans Q, comme le diagramme $\lambda^\star\mathbb{A}_Q$ obtenu de manière naturelle à partir de (6) par produits fibrés de λ et des π_j. C'est un arbre au dessus de Q'. En particulier lorsque Q' se réduit à un seul point $t \in Q$ cette opération donne *la fibre de* $\mathbb{A}_Q$ *au dessus de* t, c'est à dire l'arbre noté :

$$\mathbb{A}_Q(t) = (\mathcal{M}^j_t, E^j_t, \Sigma^j_t, S^j_t, \pi_{j,t}, \mathcal{D}^j_t)_{j=0,\ldots,h}\ , \tag{9}$$

qui s'obtient en restreignant les espaces et les applications du diagramme (6) aux fibres $\pi_j^{-1}(t)$. En particulier $\Sigma^0_t = S^0_t$ est réduit à un point.

Fixons un point t_0 de Q. Nous appellerons *germe de* $\mathbb{A}_Q$ *au dessus de* (Q, t_0) le diagramme obtenu à partir de (6) en remplaçant pour chaque $j = 1, \ldots, h$ les espaces et les applications par leurs germes le long des diviseurs exceptionnels $\mathcal{D}^j_{t_0} \subset \mathcal{D}^j$ de $\mathbb{A}_Q(t_0)$ et, pour $j = 0$, en remplaçant $\mathcal{M}^0$ et $\Sigma^0 = S^0$ et par leurs germes au point $\{m_0\} := \Sigma^0_{t_0} = S^0_{t_0}$.

Deux germes d'arbres au dessus de $P := (\mathbb{C}^p, 0)$ de même hauteur h

$$\mathbb{A}_P = (\mathcal{M}^j, E^j, \Sigma^j, S^j, \pi_j, \mathcal{D}^j)_j\ , \quad \mathbb{A}'_P = (\mathcal{M}'^j, E'^j, \Sigma'^j, S'^j, \pi'_j, \mathcal{D}'^j)_j$$

sont dits *isomorphes*, resp. *homéomorphes*, s'il existe le long de chaque diviseur $\mathcal{D}^j_0$ de $\mathbb{A}_P(0)$ des germes de biholomorphismes, resp. d'homéomorphismes

$$\phi_j : (\mathcal{M}^j, \mathcal{D}^j_0) \longrightarrow (\mathcal{M}'^j, \mathcal{D}'^j_0)\ , \quad j = 0, \ldots, h$$

qui envoient lieux singuliers sur lieux singuliers, centres sur centres et commutent aux applications d'éclatement et respectent les fibrations sur P, i.e.

$$\phi_j(\Sigma^j) = \Sigma'^j\,, \quad \phi_j(S^j) = S'j\,, \quad E'^j \circ \phi_j = \phi_{j-1} \circ E^j\,, \quad \pi'_j \circ \phi_j = \pi_j\,,$$

avec $j = 0, \ldots, h$. Nous noterons :

$$\phi_\bullet \;:\; \mathbb{A}_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}'_P\,, \qquad \phi_\bullet \;:=\; (\phi_j)_{j=0,\ldots,h}\,.$$

Un *arbre dual* $\mathbb{A}^*$ est un graphe fini connexe, sans cycle, pondéré en associant un nombre entier à chaque sommet et fléché en associant des flèches en nombre fini à certains sommets. Le nombre $v(\mathsf{s})$ de flèches et d'arêtes attachées à un sommet s s'appelle la *valence de* s et l'ensemble $Ad(\mathsf{s})$ de ces flèches et arêtes s'appelle *ensemble des éléments adjacents à* s. De même, l'ensemble (constitué de 2, resp. 1 éléments) des sommets sur lesquels s'attache une arête, resp. une flèche, notée b, se note $Ad(\mathsf{b})$ et est appelé *ensemble des éléments adjacents à* b.

Définition 1.1.2. — Un arbre dual $\mathbb{A}^*$ est dit *associé à un germe d'arbre* $\mathbb{A}_P$ s'il existe une correspondance biunivoque entre les composantes irréductibles du diviseur $\widetilde{\mathcal{D}}$ de la cime $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{A}_P$ et les sommets de $\mathbb{A}^*$,

$$\mathsf{D} \to s(\mathsf{D}) \quad \text{ou} \quad D(\mathsf{s}) \leftarrow \mathsf{s}\,,$$

telle que :
- deux sommets s et s' de $\mathbb{A}^*$ sont reliés par une arête si $D(\mathsf{s}) \cap D(\mathsf{s}') \neq \emptyset$,
- le nombre de flèches attachées à un sommet s de $\mathbb{A}^*$ est égal au nombre de composantes irréductibles de $D(\mathsf{s}) \cap \widetilde{\Sigma}$ qui ne sont pas des composantes irréductibles du lieu singulier de $\widetilde{\mathcal{D}}$,
- chaque sommet s de $\mathbb{A}^*_P$ est pondéré par la première classe de Chern $e(\mathsf{s}) \in H^2(\,D(\mathsf{s})\,,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ du fibré normal à $D(\mathsf{s})$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Un tel arbre dual est unique. Il se notera $\mathbb{A}^*_P$. Rappelons sans démonstration quelques propriétés bien connues. Soient $\mathbb{A}_P$, et $\mathbb{A}'_P$ deux germes d'arbres et notons $\widetilde{\mathcal{M}}$, resp. $\widetilde{\mathcal{M}}'$ leurs cimes, $\widetilde{\mathcal{D}}$, resp. $\widetilde{\mathcal{D}}'$ leurs diviseurs de cime, $\widetilde{\Sigma}$, resp. $\widetilde{\Sigma}'$ et $\widetilde{S}$, resp. $\widetilde{S}'$ leurs lieux de singularités et leurs centres de cime. Désignons aussi par $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, resp. par $\widetilde{\mathcal{D}}'_0$ les diviseurs de cimes de $\mathbb{A}_P(0)$, resp. de $\mathbb{A}'_P(0)$.

Proposition 1.1.3. — *Soit* $\widetilde{\phi} \,:\, (\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{D}}_0) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathcal{M}}', \widetilde{\mathcal{D}}'_0)$ *un germe de biholomorphisme, resp. d'homéomorphisme au dessus de* P *vérifiant :*

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \widetilde{\mathcal{D}}'\,, \qquad \widetilde{\phi}\,(\widetilde{\Sigma}) = \widetilde{\Sigma}' \qquad \widetilde{\phi}(\,\widetilde{S}) = \widetilde{S}'\,. \tag{10}$$

Alors $\mathbb{A}_P$ *et* $\mathbb{A}'_P$ *ont même hauteur* h *et* $\widetilde{\phi}$ *induit un isomorphisme, resp. un homéomorphisme de germes d'arbres* $\phi_\bullet : \mathbb{A}_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}'_P$ *tel que* $\phi_h = \widetilde{\phi}$.

Proposition 1.1.4. — *Supposons* $\mathbb{A}_P$ *et* $\mathbb{A}'_P$ *réguliers. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{A}_P$ *et* $\mathbb{A}'_P$ *sont homéomorphes,*
2. *Il existe un germe* $\widetilde{\phi} : (\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{D}}_0) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathcal{M}}', \widetilde{\mathcal{D}}'_0)$ *d'homéomorphisme au dessus de* P *qui satisfait (10),*

3. $\mathbb{A}_P^* = {\mathbb{A}'_P}^*$.

1.2. Arbres infinitésimaux et relèvements. — Arbres et arbres duaux Une pondération équivalente des sommets de l'arbre dual d'un germe d'arbre $\mathbb{A}_P$ de hauteur h au dessus de P , noté encore (6), est la *"pondération algébrique"* $D \longmapsto m(D)$. Avant de la définir, fixons quelques notations. Pour chaque niveau $j = 0, \ldots, h$ désignons par :

- $\mathcal{O}_{(j)}$ la restriction au j-ème diviseur exceptionnel $\mathcal{D}_0^j \subset \mathcal{D}^j \subset \mathcal{M}^j$ de l'arbre $\mathbb{A}_P(0)$, du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^j}$ des germes de fonctions holomorphes de $\mathcal{M}^j$, i.e. $\mathcal{O}_{(j)} = \iota_j^{-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}^j})$ où $\iota_j : \mathcal{D}_0^j \hookrightarrow \mathcal{M}^j$ est l'application d'inclusion ; pour $j = 0$, $\pi^{-1}(0) \cap \Sigma^0$ est réduit à un point m_0 et $\mathcal{O}_{(0)}$ est l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^0, m_0}$ des germes de fonctions holomorphes en ce point,
- I_j le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{(j)}$ formé des germes qui s'annulent sur le diviseur $\mathcal{D}^j$, $j \geq 1$,
- I_0 l'idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{(0)}$ formé des germes de fonctions qui s'annulent sur $\Sigma^0 = S^0$,
- $\mathcal{J}_{(j)}$ le faisceau d'idéaux ${E_j}^*(I_0) \subset \mathcal{O}_{(j)}$, qui est localement engendré par les fonctions du type $f \circ E_j$, f appartenant à l'idéal $I_0 \subset \mathcal{O}_{\mathcal{M}^0}$, $\mathcal{J}_{(0)} = I_0$.

Pour une réunion finie $\mathcal{D}'$ de composantes irréductibles de $\mathcal{D}^j$, on notera

- $I_{\mathcal{D}'}$ le sous-faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{(j)}$ formé des germes qui s'annulent sur $\mathcal{D}'$.

Enfin, pour simplifier, nous noterons :

$$\widetilde{\mathcal{J}} := \mathcal{J}_{(h)}\,, \qquad \widetilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O}_{(h)} \qquad \widetilde{I} := I_{\widetilde{\mathcal{D}}}\,. \tag{11}$$

Visiblement $\mathcal{J}_{(j)}$ se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{J}_{(j)} =: \prod_{D \in comp(\mathcal{D}^j)} {I_D}^{m\,(D)}\,, \qquad j = 1, \ldots, h\,, \tag{12}$$

où $comp(\mathcal{D}^j)$ désigne la collection des composantes irréductibles de $\mathcal{D}^j$ et les exposants $m\,(D)$ se calculent par le procédé très simple suivant qui ne dépend que de l'arbre dual associé à $\mathbb{A}_P$:

- $m\,(\mathcal{D}^1) = 1$,
- si $D' \subset \mathcal{D}^j$ est le transformé strict d'une composante D de $\mathcal{D}^{j-1}$, alors $m\,(D') = m\,(D)$,
- si D' est créé par un éclatement de centre connexe $C \subset S^{j-1}$, alors $m\,(D')$ est la somme des "multiplicités" $m\,(D)$ des composantes irréductibles D de $\mathcal{D}^{j-1}$ qui contiennent C .

Lemme 1.2.1. — *Pour tout $j = 0, \ldots, h$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *les applications* E_j *induisent les isomorphismes :*
$$H^0(\mathcal{D}_0^j;\, \mathcal{J}_{(j)}) \simeq I_0 \simeq H^0(\mathcal{D}_0^j;\, I_{\mathcal{D}^j})\,.$$
2. *a)* $H^1(\mathcal{D}_0^j;\, \mathcal{O}_{(j)}) = 0\,,$ *b)* $H^1(\mathcal{D}_0^j;\, \mathcal{J}_{(j)}) = 0\,,$
3. *a)* $H^2(\mathcal{D}_0^j;\, \mathcal{O}_{(j)}) = 0\,,$ *b)* $H^2(\mathcal{D}_0^j;\, \mathcal{J}_{(j)}) = 0\,,$

Démonstration. — Les propriétés 1) découlent directement du théorème classique d'Hartogs. La démonstration de 2.a) se fait aisément par récurrence sur la hauteur h de l'arbre ; au premier cran c'est un calcul simple de séries de Laurent. L'induction se fait à l'aide de la suite exacte de Mayer-Vietoris. La propriété 2.b) découle de 2.a) car les faisceaux $\mathcal{J}_{(j)}$ sont engendrés par leurs sections globales. Les propriétés 3.a) et 3.b) résultent de l'existence de recouvrements de Stein sans intersection trois à trois. □

Considérons pour chaque $j = 0, \ldots, h$ et $k \in \mathbb{N}$ les espaces annelés suivants. Ils s'interprètent en considérant les k-ièmes voisinages infinitésimaux [(5)] de chaque diviseur $\mathcal{D}^j$ dans $\mathcal{M}^j$, puis en germifiant le long du j-ième diviseur $\mathcal{D}_0^j \subset \mathcal{D}^j$ de $\mathbb{A}_P(0)$.

$$\mathcal{M}^{j\,[k]} := \left(\left|\mathcal{M}^{j\,[k]}\right| := \mathcal{D}_0^j\,; \quad \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{j\,[k]}} := \mathcal{O}_{(j)}/\mathcal{J}_{(j)}^{k+1} \right)\,. \tag{13}$$

D'après ce qui précède les germes des applications d'éclatement E^j ainsi que π se factorisent en des morphismes d'espaces annelés :
$$E^{j\,[k]} : \mathcal{M}^{j\,[k]} \longrightarrow \mathcal{M}^{j\,[k-1]} \quad \text{et} \quad \pi^{[k]} : \mathcal{M}^{0\,[k]} \longrightarrow P\,.$$
On obtient ainsi un *germe d'arbre infinitésimal au dessus de* P, c'est à dire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\widetilde{\mathcal{M}}^{[k]} & := & \mathcal{M}^{h\,[k]} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{M}^{j\,[k]} & \xrightarrow{E^{j\,[k]}} & \mathcal{M}^{j-1\,[k]} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{E^{1\,[k]}} & \mathcal{M}^{0\,[k]} & \xrightarrow{\pi^{[k]}} & P \\
& & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\
& & \Sigma^h & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Sigma^j & \longrightarrow & \Sigma^{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Sigma^0 & & \\
& & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \\
& & S^h & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S^j & \longrightarrow & S^{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S^0 & &
\end{array}$$

Nous désignons par $\mathbb{A}_P^{[k]}$ ce diagramme et notons : $\pi_j^{[k]} := \pi^{[k]} \circ E_j{}^{[k]}$.

Lemme 1.2.2. — *Considérons une composante irréductible* D *de* $\mathcal{D}^j$ *créée par l'éclatement d'une composante irréductible* S *de* S^{j-1} *et notons* $D_0 := D \cap \mathcal{D}_0^j$ *et* $\{s_0\} := S \cap \mathcal{D}_0^{j-1}$. *Soit* $\tau : \left(\mathcal{M}^{j\,[k]},\, D_0\right) \to \left(\mathbb{C}^2 \times P,\, 0\right)$ *un germe le long de* D_0 *de morphisme au dessus de* P *dont l'application sous-jacente envoie* D *sur* $\{0\} \times P$. *Alors* τ *se factorise à travers* $E^{j\,[k]}$ *en un germe de morphisme*
$$\tau^\flat : \left(\mathcal{M}^{j-1\,[k]},\, s_0\right) \longrightarrow \left(\mathbb{C}^2 \times P,\, 0\right)$$

[(5)] Remarquons que la notion de voisinage infinitésimal est ici relative à la filtration par les puissances du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{(j)}$ de $\widetilde{\mathcal{O}}_{(j)}$.

au dessus de P qui induit un germe de biholomorphisme de $(S,\, s_0)$ sur $(\{0\}\times P,\, 0)$.

Démonstration. — Le morphisme τ est entièrement déterminé par les images

$$f := \tau^*(x)\,,\ g := \tau^*(y)\ \in H^0\left(D_0\,;\, \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{j\,[k]}}\right)$$

des deux premières coordonnées de $\mathbb{C}^2\times P$ par le co-morphisme

$$\tau^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2\times P,\,0} \longrightarrow \tau_*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{j\,[k]}}\right)\,.$$

On déduit facilement des égalités 2.b) et 3.b) de (1.2.1) que f et g sont induites par des sections globales F, $G\in H^0\left(D_0\,;\,\mathcal{O}_{\mathcal{M}^j}\right)$ nulles sur D. Par le théorème d'Hartogs elles se factorisent en des germes $F^\flat$, $G^\flat\in \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{j-1},\,s_0}$ nuls sur S. On définit alors $\tau^\flat$ en prenant respectivement pour ${\tau^\flat}^*(x)$ et ${\tau^\flat}^*(y)$ les restrictions de $F^\flat$ et de $G^\flat$ à ${\mathcal{M}^{j-1}}^{[k]}$. □

La proposition suivante peut être considérée comme une version infinitésimale de la proposition (1.1.3).

Proposition 1.2.3. — *Soit $\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{M}}^{[k]} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}'}^{[k]}$ un morphisme entre les cimes de deux germes d'arbres infinitésimaux $\mathbb{A}_P^{[k]}$ et ${\mathbb{A}'}_P^{[k]}$. Supposons que $\widetilde{\phi}$ induise un germe le long de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, noté $|\widetilde{\phi}|$, de biholomorphisme entre les diviseurs de cime $\widetilde{\mathcal{D}}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}'$ et vérifie (10). Il existe alors un isomorphisme de germes d'arbres infinitésimaux $\phi_\bullet : \mathbb{A}_P^{[k]} \longrightarrow {\mathbb{A}'_P}^{[k]}$ tel que $\phi_h = \widetilde{\phi}$, où h désigne la hauteur (commune) de ces arbres.*

Démonstration. — L'application $|\widetilde{\phi}|$ transforme les composantes de $\widetilde{\mathcal{D}}$ de poids -1, au sens de (1.1), en les composantes de poids -1 de $\widetilde{\mathcal{D}}'$, car le voisinage infinitésimal d'une composante détermine son fibré normal. Ainsi $\Psi := {E'^h}^{[k]} \circ |\widetilde{\phi}|$ envoie sur $S'h-1$ la réunion $\widetilde{\mathcal{D}}\text{''} := \left(E^h\right)^{-1}(S^{h-1})$ des dernières composantes créées de $\widetilde{\mathcal{D}}$. Comme ${\mathcal{M}'}^{h-1}$ est analytiquement trivial le long de chaque composante S' de $S'h-1$,

$$({\mathcal{M}'}^{h-1},\, S') \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathbb{C}^2\times P,\, 0\times P)\,,$$

d'après le théorème de contraction de Grauert [**1**], on peut appliquer le lemme précédent à Ψ et, au voisinage de $\mathcal{D}$", factoriser $\widetilde{\phi}$ dans ${\mathcal{M}^{h-1}}^{[k]}$ par ${E^h}^{[k]}$. Sur $\widetilde{\mathcal{M}} - \widetilde{\mathcal{D}}$" le morphisme E^h est un isomorphisme et la factorisation de $\widetilde{\phi}$ existe trivialement. Elle est unique et se recolle ainsi avec celle construite au voisinage de $\mathcal{D}$". D'où la conclusion par récurrence sur h. □

Les difféomorphismes au dessus de P entre les socles $\mathcal{M}^0$ et ${\mathcal{M}'}^0$ de deux germes d'arbres $\mathbb{A}_P$ et $\mathbb{A}'_P$ ne se relèvent pas en général aux espaces éclatés $\mathcal{M}^j$ et ${\mathcal{M}'}^j$. Cependant, lorsqu'un relevé existe, il est unique. Cette dernière propriété est en défaut lorsqu'il s'agit de relever un isomorphisme ${\mathcal{M}^0}^{[k]} \xrightarrow{\ \sim\ } {{\mathcal{M}'}^0}^{[k]}$ de voisinages infinitésimaux.

De manière générale considérons un biholomorphisme f entre deux variétés lisses au dessus d'une variété Q,

$$f : M \xrightarrow{\ \sim\ } M'\,,\quad \pi : M\longrightarrow Q\,,\quad \pi' : M'\longrightarrow Q\,.$$

Supposons que π et π' sont des submersions et que l'on a $\pi' \circ f = \pi$. Un calcul direct en coordonnées permet de voir que f se relève de manière unique à travers des éclatements

$$E : \widetilde{M} \longrightarrow M\,, \qquad E' : \widetilde{M'} \longrightarrow M'$$

de centres lisses connexes, respectivement $C \subset M$ et $C' \subset M'$, dès que C et C' sont isomorphes à Q via π et π' et que $f(C) = C'$. De plus le relèvement $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M'}$ est unique et est un biholomorphisme. On voit facilement que le k-jet, $j^k_D(\widetilde{f})$, de $\widetilde{f}$ le long de $D := E^{-1}(C)$ ne dépend que du $(k+1)$-jet, $j^{k+1}_C(f)$, de f le long de C. Cependant $j^k_C(f)$ ne suffit pas à determiner $j^k_D(\widetilde{f})$. Ainsi l'application $f^{[k]} : M^{[k]} \longrightarrow {M'}^{[k]}$ induite par f sur les voisinages infinitésimaux d'ordre k de C et C' admet une infinité de relevés $\widetilde{f}^{[k]} : \widetilde{M}^{[k]} \longrightarrow \widetilde{M'}^{[k]}$ sur les voisinages infitésimaux d'ordre k de D et $D' := {\pi'}^{-1}(C')$ dont les restrictions à $\widetilde{M}^{[k-1]}$ coïncident.

A l'aide de ces remarques générales il est aisé de prouver le lemme suivant.

Lemme 1.2.4. — *Considérons deux germes d'arbres $\mathbb{A}_P$ et $\mathbb{A}'_P$ au dessus de P et $\mathbb{A}^{[k]}_P$, ${\mathbb{A}'_P}^{[k]}$ les germes d'arbres infinitésimaux respectifs induits. Soit $\Phi_\bullet$, $\Psi_\bullet : \mathbb{A}^{[k]}_P \xrightarrow{\sim} {\mathbb{A}'_P}^{[k]}$ deux isomorphismes au dessus de P. Pour $l < k$ notons $\Phi^{[l]}_\bullet$ et $\Psi^{[l]}_\bullet$ leurs restrictions à $\mathbb{A}^{[l]}_P$ et ${\mathbb{A}'_P}^{[l]}$. Si, pour un $r < k$ et un $j_0 < k - r$, l'égalité $\Phi_{j_0} = \Psi_{j_0}$ est vérifiée, alors on a : $\Phi^{[k-r]}_{j_0+r} = \Psi^{[k-r]}_{j_0+r}$.*

Proposition 1.2.5. — *Soit $\Phi_0 : \mathcal{M}^0 \xrightarrow{\sim} {\mathcal{M}'}^0$ un difféomorphisme au dessus de P entre les socles de deux germes d'arbres $\mathbb{A}_P$ et $\mathbb{A}'_P$ de même hauteur h, avec $\Phi_0(S^0) = {S'}^0$. Si l'isomorphisme induit ${\Phi_0}^{[h]} : {\mathcal{M}^0}^{[h]} \xrightarrow{\sim} {{\mathcal{M}'}^0}^{[h]}$ se relève en un isomorphisme d'arbres infinitésimaux $\Psi_\bullet : \mathbb{A}^{[h]}_P \xrightarrow{\sim} {\mathbb{A}'_P}^{[h]}$, ${\Psi_0}^{[h]} = {\Phi_0}^{[h]}$, alors Φ_0 se relève aussi en un unique isomorphisme de germes d'arbres $\Phi_\bullet : \mathbb{A}_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}'_P$ et ${\Phi_\bullet}^{[h]} = \Psi_\bullet$.*

Démonstration. — Raisonnons par récurrence sur la hauteur h des arbres. On a vu que Φ_0 se relève en un difféomorphisme $\Phi_1 : \mathcal{M}^1 \xrightarrow{\sim} {\mathcal{M}'}^1$, puisque $\Phi_0(S^0) = {S'}^0$. D'après (1.2.4) on a ${\Phi_1}^{[h-1]} = {\Psi_1}^{[h-1]}$. En particulier au niveau ensembliste, la restriction de Φ_1 au diviseur $\mathcal{D}^1$ est égale à l'application $|\Psi_1|$ induite par Ψ_1 sur $\mathcal{D}^1$. Ainsi, puisque $\Psi_\bullet$ est un isomorphisme d'arbres infinitésimaux, on a aussi : $\Phi_1(\Sigma^1) = {\Sigma'}^1$ et $\Phi_1(S^1) = {S'}^1$. Ceci prouve la proposition pour $h = 1$. Lorsque $h > 1$, on applique l'hypothèse de récurrence à chaque germe de Φ_1 le long d'une composante irréductible de S^1. □

1.3. Les faisceaux de difféomorphismes transversalement formels. — Désignons encore par $\mathbb{A}_P$ un germe d'arbre au dessus de P et conservons les notations (6), (7), (8), (9), (11) et (13).

En chaque point m du diviseur de cime $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{D}}$ de l'arbre $\mathbb{A}_P(0)$ considérons les germes d'automorphismes holomorphes de $\widetilde{\mathcal{M}}$, resp. $\widetilde{\mathcal{M}}^{[k]}$, qui commutent avec $\widetilde{\pi}$ resp. $\widetilde{\pi}^{[k]}$, valent l'identité en restriction à la cime $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{A}_P(0)$ et laissent invariant le germe de $\widetilde{\mathcal{D}}$ en m. On obtient ainsi des faisceaux de groupes de base $\widetilde{\mathcal{D}}_0$. Nous les noterons :

$$\mathcal{G}_{\mathbb{A}_P} \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{G}\,, \qquad \text{resp.} \quad \mathcal{G}^{[k]}_{\mathbb{A}_P} \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{G}^{[k]}\,. \tag{14}$$

Les sections de ces faisceaux respectent d'après (12) le faisceau d'idéaux $\widetilde{\mathcal{J}} := \mathcal{J}_{(h)}$ défini en (11). On dispose ainsi pour $0 \leq l \leq k$, de morphismes de restrictions

$$\rho_l : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{[l]}\,, \qquad \rho_l^k : \mathcal{G}^{[k]} \longrightarrow \mathcal{G}^{[l]}\,, \qquad 0 \leq l \leq k\,.$$

Les faisceaux de base $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ des *germes d'automorphismes l-tangents à l'identité le long de* $\widetilde{\mathcal{D}}$ définis par

$$\mathcal{G}_l := ker(\rho_l) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G}_l^{[k]} := ker(\rho_l^k) \tag{15}$$

forment des faisceaux de sous-groupes distingués de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^{[k]}$. En particulier $\mathcal{G}_0$ est formé des éléments de $\mathcal{G}$ qui valent l'identité en restriction à $\widetilde{\mathcal{D}}$.

On appelle *faisceau des germes d'automorphismes transversalement formels le long de* $\widetilde{\mathcal{D}}$, respectivement *transversalement formels et l-tangents à l'identité le long de* $\widetilde{\mathcal{D}}$ les limites projectives

$$\widehat{\mathcal{G}} := \varprojlim_{k} \mathcal{G}^{[k]}\,, \qquad \widehat{\mathcal{G}}_l := \varprojlim_{k \geq l} \mathcal{G}_l^{[k]}\,. \tag{16}$$

On dispose encore de projections canoniques $\widehat{\rho}_l : \widehat{\mathcal{G}}_l \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}_l^{[k]}$.

Remarque 1.3.1. — On aurait aussi pu filtrer $\widetilde{\mathcal{O}}$ par les puissances du faisceau d'idéaux $I_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ défini en (1.2) et poser

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{[[k]]} := \left(\widetilde{\mathcal{D}}_0\,;\; \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}}/\widetilde{I}^{k+1}\right)\,, \qquad \widehat{\widehat{\mathcal{G}}} := \varprojlim_{k} \mathcal{G}^{[[k]]}\,,$$

où $\mathcal{G}^{[[k]]}$ est le faisceau des germes, aux points de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, d'automorphismes de $\widetilde{\mathcal{M}}^{[[k]]}$ qui valent l'identité sur $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ et commutent aux projections sur P. Comme d'après (12) ces deux filtrations sont équivalentes, les faisceaux $\widehat{\widehat{\mathcal{G}}}$ et $\widehat{\mathcal{G}}$ sont canoniquement isomorphes. De même les sous-faisceaux $\widehat{\widehat{\mathcal{G}}}_l \subset \widehat{\widehat{\mathcal{G}}}$ définis de manière similaire sont canoniquement isomorphes à $\widehat{\mathcal{G}}_l$.

Remarque 1.3.2. — En un point régulier m de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, dans un système de coordonnées locales $(z_1, z_2; t_1, \ldots, t_p)$ dans lesquelles $\widetilde{\mathcal{D}} = \{z_1 = 0\}$, $\widetilde{\pi} = t := (t_1, \ldots, t_p)$ et $\widetilde{\mathcal{J}}_{,m} = (z_1^r)$, les éléments de la fibre $\widehat{\mathcal{G}}_{l,\,m}$ de $\widehat{\mathcal{G}}_l$ s'identifient aux couples (F_1, F_2) de séries formelles en z_1

$$F_j = z_j + z_1^{r\,(l+1)} \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,\,k}(z_2; t)\, z_1^k\,, \quad j = 1, 2\,,$$

dont les coefficients $A_{j,\,k}$ sont des fonctions holomorphes sur un voisinage commun de m dans $\widetilde{\mathcal{D}}$. Lorsque m est un point singulier de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ avec $\widetilde{\mathcal{D}} = \{z_1 z_2 = 0\}$ et

$\widetilde{\mathcal{J}}_{,m} = (z_1^r z_2^s)$, alors les éléments de $\widehat{\mathcal{G}}_{l,\,m}$ s'identifient aux couples (F_1, F_2) avec

$$F_j = z_j + (z_1^r z_2^s)^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{j,\,k}^1(z_1;t) + A_{j,\,k}^2(z_2;t)\right)(z_1 z_2)^k \,, \quad j = 1, 2\,,$$

les coefficients $A_{j,\,k}^r$ de ces séries étant encore holomorphes sur un même voisinage de m dans $\widetilde{\mathcal{D}}$. Cette dernière écriture est bien sûr unique si l'on exige que $A_{1,\,k}^2(0;t) \equiv A_{2,\,k}^2(0;t) \equiv 0$. On déduit immédiatement de ces écritures que, si l'on se donne pour chaque $l \in \mathbb{N}$ un élément Φ^l de $\widehat{\mathcal{G}}_{l,m}$, les suites

$$\Phi_n := \Phi^n \circ \cdots \circ \Phi^0 \quad \text{et} \quad \Psi_n := \Phi^0 \circ \cdots \circ \Phi^n$$

convergent dans $\widehat{\mathcal{G}}_{,m}$, pour la topologie $I_{\widetilde{\mathcal{D}}}$-adique. D'autre part tout élément de $\widehat{\mathcal{G}}_{,m}$ est limite de telles suites et, $\Phi^0, \ldots, \Phi^s$ étant construits, (Φ^{s+1}) est unique modulo $I_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{s+2}$.

1.4. Théorèmes de stabilité et de détermination finie. — Nous conservons les notations du paragraphe précédent.

Définition 1.4.1. — Nous appelons *données critiques d'un germe d'arbre* $\mathbb{A}_P$ *au dessus de* P l'ensemble $\boldsymbol{C}\,(\mathbb{A}_P)$ dont les éléments, appelés *ensembles critiques* sont :

1. les points de l'ensemble singulier de cime $\widetilde{\Sigma}_0$ de l'arbre $\mathbb{A}_P(0)$,
2. les composantes connexes du complémentaire de $\widetilde{\Sigma}_0$ dans le diviseur exceptionnel de cime $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de $\mathbb{A}_P(0)$;

On appelle *données critiques de dimension 0, resp. de dimension 1*, et on note $\boldsymbol{C}_0\,(\mathbb{A}_P)$, resp. $\boldsymbol{C}_1\,(\mathbb{A}_P)$ les ensembles des données critiques du type 1. ou 2.. Deux ensembles critiques seront dits *adjacents* si leurs adhérences s'intersectent ; on note :

$$\begin{aligned} Ad(K) &:= \left\{\, K' \in \boldsymbol{C}\,(\mathbb{A}_P)\,;\, \overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset \,\right\} \\ Ad_i(K) &:= \left\{\, K' \in Ad(K)\,;\, dim(K') = i \,\right\} \,, \quad i = 0 \text{ ou } 1\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Définition 1.4.2. — Nous appelons *recouvrement distingué de* $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} := (U_\alpha)_{\alpha \in \boldsymbol{C}\,(\mathbb{A}_P)}$ du type suivant :

1. si $dim(\alpha) = 1$, on pose $U_\alpha := \alpha$,
2. si $dim(\alpha) = 0$, U_α est la trace sur $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ d'un petit polydisque $\{|z_1| < \varepsilon\ ,\ |z_2| < \varepsilon\}$, où z_1 , z_2 sont des coordonnées de $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ dans lesquelles $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ est monomial et $z_1(\alpha) = z_2(\alpha) = 0$.

Les propriétés remarquables d'un tel recouvrement, que nous utiliserons constamment, sont : a) les ouverts de $\mathcal{U}$ sont de Stein et admettent un système fondamental de voisinages de Stein dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ et, b) toute intersection 3 à 3 d'ouverts de $\mathcal{U}$ est triviale.

Remarque 1.4.3. — En calculant à partir des expressions de la remarque (1.3.2), on voit que si $\mathcal{U}$ est un recouvrement distingué de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, pour $\alpha \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P)$ et $0 \leq l \leq k$ les applications canoniques

$$\mathcal{G}\,(U_\alpha) \longrightarrow \mathcal{G}^{\,[k]}\,(U_\alpha)\,, \qquad \widehat{\mathcal{G}}\,(U_\alpha) \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}^{\,[k]}\,(U_\alpha) \ \ ,$$

$$\mathcal{G}_l\left(U_\alpha\right) \longrightarrow \mathcal{G}_l^{[k]}\left(U_\alpha\right), \qquad \widehat{\mathcal{G}}_l\left(U_\alpha\right) \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}}_l^{[k]}\left(U_\alpha\right)\ ,$$

sont surjectives.

Rappelons qu'étant donné un faisceau de groupes $\boldsymbol{G}$ et un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{W} := (W_i)_{i\in I}$ de la base de $\boldsymbol{G}$, on appelle *1-cocycle à valeurs dans* $\boldsymbol{G}$ et on note $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{W};\boldsymbol{G})$ toute famille

$$(g_{ij})_{(i,j)\in I\check{\times}I}\ , \quad g_{ij}\in \boldsymbol{G}(W_i\cap W_j)\,, \quad I\check{\times}I := \{(i,j)\in I^2\,;\ W_i\cap W_j\neq\emptyset\}\,,$$

telle que $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ et $g_{ij} = g_{ik}g_{kj}$ chaque fois que $W_i\cap W_j\cap W_k\neq\emptyset$. Deux 1-cocycle $\mathcal{C} := (g_{ij})$ et $\mathcal{C}' := (g'_{ij})$ de $Z^1(\mathcal{W};\boldsymbol{G})$ sont dits *cohomologues* s'il existe un élément $\mathcal{C}^0 := (g_i)$ de $Z^0(\mathcal{W};\boldsymbol{G}) := \prod_{i\in I}\boldsymbol{G}(W_i)$) tel que

$$g'_{ij} = g_i\cdot g_{ij}\cdot g_j^{-1}\,. \tag{18}$$

Nous noterons alors $\mathcal{C}\approx_{\boldsymbol{G}}\mathcal{C}'$ ou plus précisément $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^0\star\mathcal{C}$ et nous désignerons par $[\mathcal{C}]_{\boldsymbol{G}}$ ou par $[g_{ij}]_{\boldsymbol{G}}$ la classe d'équivalence de $\mathcal{C}$; lorsqu'aucune confusion n'est possible nous omettrons l'indice $\boldsymbol{G}$ dans ces notations.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement distingué de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$. Nous pouvons associer à un cocycle $\mathcal{C} := (\phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_l)$, $l\geq 0$ le germe, le long d'une courbe $\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}\simeq\widetilde{\mathcal{D}}_0$, de la variété holomorphe $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ obtenue par recollement en quotientant l'union disjointe $\sqcup_\alpha(V_\alpha,\,U_\alpha)$ des germes, le long des U_α, de voisinages V_α de U_α dans la cime $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{A}_P$, par la relation d'équivalence

$$m\sim_\mathcal{C} m' \Longleftrightarrow \text{il existe } (\alpha,\beta)\in \boldsymbol{C}\,(\mathbb{A}_P)\check{\times}\boldsymbol{C}\,(\mathbb{A}_P) \quad \text{tel que} \tag{19}$$
$$m\in V_\alpha\,,\quad m'\in V_\beta \quad \text{et} \quad m' = \phi_{\beta\alpha}(m)\,.$$

Les propriétés des $\phi_{\alpha\beta}$ font que cette variété est naturellement munie d'un diviseur $\mathcal{D}_\mathcal{C}\supset\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$, d'un germe le long de $\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$ de submersion holomorphe $\pi_\mathcal{C}$ sur P et d'un germe le long de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de plongement

$$\rho_\mathcal{C} : \left(\widetilde{\mathcal{M}}_0\,,\,\widetilde{\mathcal{D}}_0\right)\hookrightarrow(\mathcal{M}_\mathcal{C}\,,\,\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}})$$

qui induit un isomorphisme entre les germes $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_0,\,\widetilde{\mathcal{D}}_0\right)$ et $\left(\pi_\mathcal{C}^{-1}(0),\,\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}\right)$. Lorsque $\mathcal{C}\in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_l)$, $l\geq 0$ on dispose aussi d'un plongement

$$\upsilon_\mathcal{C}^{[l]} : \widetilde{\mathcal{M}}^{[l]}\hookrightarrow\mathcal{M}_\mathcal{C}\,, \quad \text{avec} \quad \pi_\mathcal{C}\circ\upsilon_\mathcal{C}^{[l]} = \widetilde{\pi}^{\,[l]}\,, \tag{20}$$

qui induit un isomorphisme entre les diviseurs $\widetilde{\mathcal{D}}\simeq\widetilde{\mathcal{M}}^{[0]}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{C}$. En restriction à $\widetilde{\mathcal{D}}_{0,\mathcal{C}}$ cet isomorphisme coïncide avec $\rho_\mathcal{C}$.

Remarque 1.4.4. — Deux cocycles $\mathcal{C} := (\phi_{\alpha\beta})$ et $\mathcal{C}' := \left(\phi'_{\alpha\beta}\right) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G})$ sont cohomologues, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^0\star\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}^0 := (\phi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G})$, si et seulement s'il existe un germe de difféomorphisme $\Phi_{\mathcal{C}^0} : \mathcal{M}_\mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}$ qui satisfait les relations de commutation :

$$\pi_{\mathcal{C}'}\circ\Phi_{\mathcal{C}^0} = \pi_\mathcal{C}\,, \qquad \rho_{\mathcal{C}'} = \Phi_{\mathcal{C}^0}\circ\rho_\mathcal{C}\,.$$

Le difféomorphisme $\Phi_{\mathcal{C}^0}$ se construit par recollement des ϕ_α : la relation de cohomologie exprime la compatibilité avec les "changements de cartes" $\phi_{\alpha\beta}$. Lorsque $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}' \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_l)$, pour exprimer la relation de cohomologie dans le faisceau $\mathcal{G}_l$, il faut rajouter la condition supplémentaire : $\Phi_{\mathcal{C}^0} \circ \upsilon_{\mathcal{C}}^{[l]} = \upsilon_{\mathcal{C}'}^{[l]}$.

Donnons nous un 1-cocycle $\mathcal{C} \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, définissons le germe, le long de $\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$, du voisinage infinitésimal $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ en posant :

$$\left|\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}\right| := \mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}\,, \qquad \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}} := i_{0,\mathcal{C}}^{-1}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}} \Big/ \prod_{D\in comp(\mathcal{D}_{\mathcal{C}})} \left(I_{\mathcal{C},D}^{m(D)}\right)^{k+1}\right)$$

où $i_{0,\mathcal{C}} : \mathcal{D}_{0,\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est l'application d'inclusion, $I_{\mathcal{C},D}$ est le faisceau sur $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ formé des germes de fonctions nulles sur une composante irréductible D de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ et les $m(D)$ sont définis par la décomposition (12) de $\widetilde{\mathcal{J}}$. Lorsque $\mathcal{C} \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_l)$, $l < k$, le morphisme $\upsilon_{\mathcal{C}}^{[l]}$ se factorise clairement en un plongement $\underline{\upsilon}_{\mathcal{C}}^{[l]} : \widetilde{\mathcal{M}}^{[l]} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}$, (i.e. le co-morphisme associé à $\underline{\upsilon}_{\mathcal{C}}^{[l]}$ est surjectif). Un calcul direct en coordonnées permet de voir que $\underline{\upsilon}_{\mathcal{C}}^{[l]}$ se factorise en un isomorphisme $\underline{\upsilon}_{\mathcal{C}}^{[l]} : \widetilde{\mathcal{M}}^{[l]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[l]} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}$.

En reprenant, pour un germe d'arbre quelconque, la démonstration du lemme (1.3.1) de [**20**] qui ne concerne que les arbres produits, on obtient la première affirmation du lemme suivant. La seconde affirmation résulte directement du fait que les exposants $m(D)$ ne dépendent que de l'arbre dual.

Lemme 1.4.5. — *Le germe de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ le long de $\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$ est biholomorphe au germe $(\widetilde{\mathcal{M}}', \widetilde{\mathcal{D}}'_0)$ de la cime d'un germe d'arbre $\mathbb{A}'_P$ au dessus de P, qui possède le même arbre dual que $\mathbb{A}_P$,*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}) & \overset{\sigma}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & (\widetilde{\mathcal{M}}', \widetilde{\mathcal{D}}'_0) \\ & {\scriptstyle \pi_{\mathcal{C}}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}'} & \\ & P & \end{array}$$

De plus le biholomorphisme σ induit pour tout k un isomorphisme $\sigma^{[k]}$ entre $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}'^{[k]}$.

Fixons un cocycle $\mathcal{C} := (\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G})$. Comme en (15) notons $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ le faisceau de base $\mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$ des germes de biholomorphismes de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ qui commutent avec $\pi_{\mathcal{C}}$, valent l'identité en restriction à $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,\mathcal{C}}$ et par $\mathcal{G}_{\mathcal{C},k} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ le sous-faisceau des germes qui valent aussi l'identité en restriction à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k]}$. Considérons l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \simeq \mathcal{D}_{0,\mathcal{C}}$ comme une identification et sur $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ comparons les cohomologies du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans les faisceaux $\mathcal{G}_{\mathcal{C},k}$ et $\mathcal{G}_k$. Pour chaque ouvert U_α de $\mathcal{U}$ nous disposons par construction d'un germe de biholomorphisme $u_\alpha : (\widetilde{\mathcal{M}}, U_\alpha) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, U_\alpha)$; ce qui donne les identifications :

$$\kappa^0 : Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_{\mathcal{C}})\,, \qquad \kappa_k^0 : Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_k) \xrightarrow{\sim} Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_{\mathcal{C},k})\,,$$

$$(\Psi_\alpha) \mapsto (\Psi_{\mathcal{C},\alpha}) := (u_{\alpha*}(\Psi_\alpha)) := \left(u_\alpha \circ \Psi_\alpha \circ u_\alpha^{-1}\right)$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P)\check{\times}\boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P)$ nous disposons de deux germes de difféomorphismes $u_\alpha \circ \iota_{\alpha\beta}$ et $u_\beta \circ \iota_{\alpha\beta}$, où $\iota_{\alpha\beta}$ désigne le germe d'inclusion $(\widetilde{\mathcal{M}}, U_\alpha \cap U_\beta) \hookrightarrow (\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{D}}_0)$. Le recouvrement $\mathcal{U}$ n'a pas d'intersection d'ouverts trois à trois non-triviale. Ainsi, pour tout faisceau de groupes $\boldsymbol{G}$ sur $\widetilde{\mathcal{D}}_0$, le groupe $Z^1(\mathcal{U}; \boldsymbol{G})$ s'identifie au groupe

$$\overline{Z}^1(\mathcal{U}; \boldsymbol{G}) := \prod_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}} \boldsymbol{G}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{A} := \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P)\check{\times}\boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P) \ / \ dim U_\alpha < dim U_\beta\}.$$

Choisissons d'identifier les ensembles de 1-cocycles de la manière suivante

$$\kappa^1 : \overline{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \overline{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_\mathcal{C}), \qquad \kappa^1_k : \overline{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_k) \xrightarrow{\sim} \overline{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_{\mathcal{C},k}),$$

$$(\Psi_{\alpha\beta}) \mapsto (\Psi_{\mathcal{C},\alpha\beta}) := ((u_\alpha \circ \iota_{\alpha\beta})_*(\Psi_{\alpha\beta})).$$

On voit facilement que les relations de cohomologie s'expriment dans les espaces $\overline{Z}^1$ par :

$$(\Psi_{\mathcal{C},\alpha\beta}) \approx_{\mathcal{G}_\mathcal{C}} (\Psi'_{\mathcal{C},\alpha\beta}) \Longleftrightarrow (\Psi_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta}) \approx_{\mathcal{G}} (\Psi'_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta})$$
$$(\Psi_{\mathcal{C},\alpha\beta}) \approx_{\mathcal{G}_{\mathcal{C},k}} (\Psi'_{\mathcal{C},\alpha\beta}) \Longleftrightarrow (\Psi_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta}) \approx_{\mathcal{G}_k} (\Psi'_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta}) \tag{21}$$

Théorème de Stabilité 1.4.6. — *Soient $\mathbb{A}_P$ un germe d'arbre au dessus de P, de hauteur h, $\mathcal{U}$ un recouvrement distingué du diviseur de cime $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de $\mathbb{A}_P(0)$ et soit $\mathcal{G}$, respectivement $\mathcal{G}_k$, $k \in \mathbb{N}$, les faisceaux introduits en (1.3). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ les applications suivantes*

$$H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_h) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}), \qquad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_h} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}},$$

$$\textit{resp.} \quad H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_{k+h}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_k), \qquad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_{k+h}} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k}$$

sont les applications constantes $[\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_h} \mapsto [Id_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}}$, resp. $[\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_{k+h}} \mapsto [Id_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k}$, où $Id_{\alpha\beta}$ désigne le germe de l'application identité le long de $U_\alpha \cap U_\beta$.

Démonstration. — Donnons nous un 1-cocycle $\mathcal{C} := (\phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}_{k+h})$ D'après la proposition (1.4.5), $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ est difféomorphe à la cime d'un germe d'arbre $\mathbb{A}'_P$ au dessus de P, $\sigma : \mathcal{M}_\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}'$. Le difféomorphisme $\widetilde{\tau} := \sigma^{[k+h]} \circ v_\mathcal{C}^{[k+h]} : \widetilde{\mathcal{M}}^{[k+h]} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}'^{[k+h]}$ induit grâce à (1.2.3) un isomorphisme d'arbres infinitésimaux

$$\tau_\bullet : \mathbb{A}_P^{[k+h]} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}'^{[k+h]}_P, \qquad \text{avec} \quad \tau_h = \widetilde{\tau}.$$

Soit $T : \mathcal{M}^0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'^0$ un difféomorphisme entre les socles de $\mathbb{A}_P$ et de $\mathbb{A}'_P$ induisant τ_0, i.e. $T^{[k+h]} = \tau_0$. Relevons le (1.2.5) en un (unique) isomorphisme $T_\bullet : \mathbb{A}_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}'_P$, $T_0 = T$. En comparant $T_\bullet$ à $\tau_\bullet$ à l'aide de (1.2.4) on voit que pour tout $j \leq h$, on a $T_j^{[k+h-j]} = \tau_j^{[k+h-j]}$. En particulier $T_\bullet^{[k]} = \tau_\bullet^{[k]}$ et $H := T_h^{-1} \circ \sigma : \mathcal{M}_\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}$ est un difféomorphisme qui vaut l'identité en restriction à $\widetilde{\mathcal{M}}^{[k]}$, c'est à dire $(H \circ v_\mathcal{C})^{[k]} = \text{identité}_{\widetilde{\mathcal{M}}^{[k]}}$. On conclut alors par (1.4.4) que l'on a bien $[\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k} = [Id_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k}$.

La même démonstration s'applique aux faisceaux $\mathcal{G}_h$ et $\mathcal{G}$. $\square$

Corollaire 1.4.7. — *Avec les mêmes notations que dans le théorème ci-dessus, fixons $k \in \mathbb{N}$ et un 1-cocycle $\mathcal{C} := (\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G})$. Alors pour tout $\mathcal{C}' := (\Psi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_h)$, resp. $\mathcal{C}' := (\Psi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+h})$, il existe $(\Psi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G})$, resp. $(\Psi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_k)$ tel que : $\Psi_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \xi_{\alpha\beta} \circ \Psi_\beta^{-1}$.*

Démonstration. — Conservons les notations de la démonstration du théorème. Puisque le difféomorphisme σ donné par (1.4.5) induit des difféomorphismes $\sigma^{[k+h]}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{[k+h]} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}'^{[k+h]}$, il induit aussi des isomorphismes entre les faisceaux de groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{A}'_P}$, resp. $\mathcal{G}_{\mathcal{C},k}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{A}'_P,k}$, définis en (14). Appliquons maintenant le théorème précédent à $\mathbb{A}'_P$. Les conclusions de ce théorème se "traduisent" sur le germe d'arbre $\mathbb{A}_P$ à l'aide de (21). On obtient immédiatement le résultat. $\square$

Théorème de Détermination Finie 1.4.8. — *Soient $\mathbb{A}_P$ un germe d'arbre au dessus de P de hauteur h, $\mathcal{U}$ un recouvrement distingué du diviseur de cîme $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de $\mathbb{A}_P(0)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{G}$, $\widehat{\mathcal{G}}$, resp. $\mathcal{G}_k$, $\widehat{\mathcal{G}}_k$, les faisceaux (15) des germes de difféomorphismes holomorphes, transversalement formels, resp. holomorphes, transversalement formels k-tangents à l'identité, définis au chapitre (1.3). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ les applications canoniques suivantes :*

1. $\chi : H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}^{[h]})$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}^{[h]}]_{\mathcal{G}^{[h]}}$,
2. $\chi_k : H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k^{[k+h]})$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}^{[k+h]}]_{\mathcal{G}_k^{[k+h]}}$,
3. $\widehat{\chi} : H^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}^{[h]})$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}^{[h]}]_{\mathcal{G}_k^{[h]}}$,
4. $\widehat{\chi}_k : H^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_k) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k^{[k+h]})$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}^{[k+h]}]_{\mathcal{G}_k^{[k+h]}}$,
5. $\underline{\chi} : H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{U};\widehat{\widehat{\mathcal{G}}})$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}}$,
6. $\underline{\chi}_k : H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k) \longrightarrow H^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_k) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{U};\widehat{\widehat{\mathcal{G}}}_k)$, $\quad [\phi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{G}_k} \mapsto [\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k}$,

sont bijectives.

Démonstration. — Les assertions 5. et 6. découlent directement des assertions précédentes. La surjectivité de χ, χ_k, et de $\widehat{\chi}$, $\widehat{\chi}_k$ résulte de (1.4.3).

Montrons l'injectivité de χ_k. Donnons nous des éléments $(\phi_{\alpha\beta})$ et $\left(\phi'_{\alpha\beta}\right)$ de $Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k)$ qui induisent des éléments $\mathcal{G}_k^{[k+h]}$-cohomologues dans $Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k^{[k+h]})$

$$\phi_{\alpha\beta}{}^{[k+h]} = \varphi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta}{}^{[k+h]} \circ \varphi_\beta^{-1} , \qquad (\varphi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_k^{[k+h]}) .$$

Le 0-cocycle (φ_α) provient d'un cocycle $(\phi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_k)$,

$$\phi_{\alpha\beta}{}^{[k+h]} = \left(\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta{}^{-1}\right)^{[k+h]} , \qquad \phi_\alpha{}^{[k+h]} = \varphi_\alpha .$$

Pour obtenir le résultat il suffit d'appliquer le corollaire (1.4.7) avec

$$\mathcal{C} := (\xi_{\alpha\beta}) := \left(\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta{}^{-1}\right) , \qquad \mathcal{C}' := \left(\phi_{\alpha\beta} \circ \xi_{\alpha\beta}^{-1}\right) .$$

Prouvons maintenant l'injectivité de $\widehat{\chi}_k$. Soient $(\phi_{\alpha\beta})$ et $(\phi'_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_k)$ qui induisent la même classe dans $H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k^{[k+h]})$. Comme dans B) nous avons un élément (ϕ_α) de $Z^0(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_k)$ tel que :

$$\left({\phi_{\alpha\beta}}^{[k+h]}\right) := \left(\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ {\phi_\beta}^{-1}\right)^{[k+h]} .$$

Donnons nous $(\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_k)$ tel que $\xi_{\alpha\beta}^{[k+h]} = {\phi_{\alpha\beta}}^{[k+h]}$. Nous allons montrer successivement les égalités, dans $H^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_k)$, des classes

$$[\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} = [\xi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} , \qquad \left[\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ {\phi_\beta}^{-1}\right]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} = [\xi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} ;$$

Ce qui permet de conclure.

Décomposons $\phi_{\alpha\beta}$ de la manière suivante :

$$\phi_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(2)} \circ \phi_{\alpha\beta}^{(1)} \circ \xi_{\alpha\beta} , \qquad (\phi_{\alpha\beta}^{(1)}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+h}) , \qquad (R_{\alpha\beta}^{(2)}) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+2h}) .$$

En utilisant le corollaire (1.4.7) on obtient : $(\phi_\alpha^{(0)}) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_k)$ vérifiant

$$\phi_{\alpha\beta}^{(1)} \circ \xi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{(0)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ (\phi_\beta^{(0)})^{-1} .$$

Ainsi on a :

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{(0)} \circ \widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(2)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ (\phi_\beta^{(0)})^{-1} ,$$

avec

$$\left(\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(2)}\right) := \left((\phi_\alpha^{(0)})^{-1} \circ R_{\alpha\beta}^{(2)} \circ \phi_\alpha^{(0)}\right) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+2h}) ,$$

puisque $\widehat{\mathcal{G}}_{k+2h}$ est un sous-groupe distingué de $\widehat{\mathcal{G}}_k$. Décomposons alors $\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(2)}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(2)} = R_{\alpha\beta}^{(3)} \circ \phi_{\alpha\beta}^{(2)} , \qquad (\phi_{\alpha\beta}^{(2)}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+2h}) , \qquad (R_{\alpha\beta}^{(3)}) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+3h}) .$$

On obtient de nouveau à l'aide du corollaire (1.4.7) une décomposition :

$$\phi_{\alpha\beta}^{(2)} \circ \xi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{(1)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ \left(\phi_\beta^{(1)}\right)^{-1} , \qquad \left(\phi_\alpha^{(1)}\right) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+h}) ;$$

et

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(2)} \circ \xi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{(1)} \circ \widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(3)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ (\phi_\beta^{(1)})^{-1} ,$$

$$(\widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(3)}) := \left((\phi_\alpha^{(1)})^{-1} \circ R_{\alpha\beta}^{(3)} \circ \phi_\alpha^{(1)}\right) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+3h}) .$$

Ce qui donne :

$$\phi_{\alpha\beta} = \left(\phi_\alpha^{(0)} \circ \phi_\alpha^{(1)}\right) \circ \widetilde{R}_{\alpha\beta}^{(3)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ \left(\phi_\beta^{(0)} \circ \phi_\beta^{(1)}\right)^{-1} .$$

De cette manière, en itérant cette construction, on obtient des suites

$$\left({\phi_\alpha}^{(j)}\right) \in Z^0(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+jh}) , \qquad \left(R_{\alpha\beta}^{(j)}\right) \in Z^1(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+jh}) ,$$

qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifient l'égalité :

$$\phi_{\alpha\beta} = \left(\phi_\alpha^{(0)} \circ \cdots \circ {\phi_\alpha}^{(n)}\right) \circ R_{\alpha\beta}^{(n+2)} \circ \xi_{\alpha\beta} \circ \left(\phi_\beta^{(0)} \circ \cdots \circ {\phi_\beta}^{(n)}\right)^{-1} .$$

D'après la remarque (1.3.2) la suite $\left(\phi_\alpha^{(0)} \circ \cdots \circ \phi_\alpha{}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet, pour la topologie de krull de $\widehat{\mathcal{G}}_k(U_\alpha)$ une limite Φ_α et $R_{\alpha\beta}^{n+2}$ tend vers l'identité. Par continuité on obtient la décomposition cherchée :

$$\phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \xi_{\alpha\beta} \circ \Phi_\beta^{-1}\,, \qquad\qquad (\Phi_\alpha) \in Z^0(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{G}}_k)\,.$$

En appliquant cette même méthode au cocycle $\left(\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta{}^{-1}\right)$, on obtient l'égalité

$$\left[\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta{}^{-1}\right]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} = [\xi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k}\ .$$

Et donc : $\left[\phi_\alpha \circ \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta{}^{-1}\right]_{\widehat{\mathcal{G}}_k} = [\phi_{\alpha\beta}]_{\widehat{\mathcal{G}}_k}$.

Les démonstrations de l'injectivité de χ et de $\widehat{\chi}$ sont similaires ; ce qui achève la démonstration. ☐

2. Déformations de feuilletages

Soit M une variété holomorphe connexe de dimension n, notons $\mathcal{O}_M$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes, Λ_M le faisceau des germes de 1-formes différentielles holomorphes et $\mathcal{X}_M$ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M . On désigne toujours par P le germe $(\mathbb{C}^p, 0)$.

Dans ce chapitre et dans tous les suivants nous emploierons le terme "arbre" pour "germe d'arbre".

2.1. Généralités sur les feuilletages. — Définissons un *feuilletage holomorphe de codimension q (éventuellement singulier) sur M* comme la donnée d'un faisceau de sous-modules $\Lambda_\mathcal{F}$ de Λ_M localement libres de rang q, vérifiant en chaque point m les relations d'intégrabilité suivantes :

(22) $$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^q \wedge d\omega^i = 0\ , \qquad \forall i = 1, \ldots, q \quad \forall\ \omega^1, \ldots, \omega^q \in \Lambda_{\mathcal{F},m}$$

Cette définition n'est pas la plus générale [6] mais nous n'aurons à faire ici qu'à deux types de feuilletages, les feuilletages de codimension 1,

(23) $$\Lambda_{\mathcal{F},\,m} = (\omega_m)\ , \qquad \omega_m \wedge d\omega_m = 0\,,$$

ou bien leurs "déformations à p paramètres" que nous définirons précisément en (2.2) :

$$\Lambda_{\mathcal{F}_P} = (dt_1, \ldots, dt_p, \Omega)\ , \qquad dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p \wedge \Omega \wedge d\Omega = 0\,, \qquad \Omega\mid_{\{t=0\}} = \omega\,,$$

avec $t_1, \ldots, t_p$ les coordonnées canoniques sur $P := (\mathbb{C}^p, 0)$.

En dehors du *lieu singulier de* $\mathcal{F}$, i.e. le sous-ensemble analytique $Sing(\mathcal{F})$ défini par le radical du faisceau d'idéaux

$$I_\mathcal{F} := (\overset{q}{\wedge}\Lambda_\mathcal{F}) \cdot (\overset{q}{\otimes}\ \mathcal{X}_M)\,,$$

[6] On aurait pu seulement imposer à $\Lambda_\mathcal{F}$ d'être cohérent de *rang générique* q, c'est à dire de rang q presque partout.

on a un feuilletage régulier de codimension q noté $\mathcal{F}^{reg}$. Lorsque $Sing(\mathcal{F})$ n'a pas de composante de codimension 1, on voit facilement qu'aucun point singulier m n'est "éliminable" : on ne peut pas prolonger $\mathcal{F}^{reg}$ au voisinage de m en un feuilletage régulier. En divisant localement les générateurs de $\Lambda_{\mathcal{F},m}$ par le *p.g.c.d.* de leurs coefficients, on construit un unique feuilletage $sat(\mathcal{F})$ appelé *saturé de* $\mathcal{F}$, qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur la partie régulière $M - Sing(\mathcal{F})$ de M et qui est maximal pour cette dernière propriété. On a l'égalité :

$$\Lambda_{sat(\mathcal{F}),\, m} = \left\{ \eta \in \Lambda_{M,\, m} \ ; \ \eta \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^q = 0 \ , \quad \forall\, \omega^1, \ldots, \omega^q \in \Lambda_{\mathcal{F},\, m} \right\}$$

L'image réciproque $f^{-1}\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{F}$ par une application holomorphe f d'une variété holomorphe M' dans M est le feuilletage de codimension q localement défini par les images réciproques $f^*\omega\,,\, \omega \in \Lambda_{\mathcal{F},\, m}$ lorsque celles-ci engendrent un faisceau localement libre de rang q. Quand f est un plongement et les $f^*\omega\,,\, \omega \in \Lambda_{\mathcal{F},\, m}$ tous identiquement nuls, nous dirons que M' est une *variété intégrale* ou *invariante* de $\mathcal{F}$. Lorsque M' est la partie régulière d'un sous-ensemble analytique fermé S de M, nous dirons que S est un *ensemble intégral* ou encore *invariant* de $\mathcal{F}$.

Définition 2.1.1. — Nous appelons *transformé strict de* $\mathcal{F}$ *par* f et notons $f^*\mathcal{F}$ le saturé de $f^{-1}\mathcal{F}$.

Lorsque f est un biholomorphisme, les deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H} := f^{-1}\mathcal{F}$ sont dits *holomorphiquement conjugués*; et l'on note $\mathcal{F} \sim_{hol} \mathcal{H}$. Signalons la propriété d'image directe suivante qui s'obtient facilement à l'aide du théorème d'extension de Levi des fonctions méromorphes.

Proposition 2.1.2. — *Soient $h : M \longrightarrow M'$ une application propre entre deux variétés holomorphes de même dimension et $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe (singulier) sur M. Supposons que la codimension de $h(Sing(\mathcal{F}))$ soit ≥ 2 et que la restriction de h au complémentaire de $Sing(\mathcal{F})$ soit un difféomorphisme sur son image. Alors il existe sur M' un feuilletage unique noté $h_*\mathcal{F}$ et appelé image directe de $\mathcal{F}$ par h tel que $h^*h_*\mathcal{F} = sat(\mathcal{F})$.*

Nous aurons aussi à considérer la position relative d'un feuilletage par rapport à une hypersurface à croisement normal. Cela nous amène à poser :

Définition 2.1.3. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe saturé de codimension q au voisinage d'un ensemble analytique S. On appelle *lieu singulier du couple* $(\mathcal{F}, S)$ l'ensemble analytique $Sing(\mathcal{F}, S)$ défini par le radical du faisceau d'idéaux

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F},\, S} = sat\ (I_{\mathcal{F},\, S})\ , \qquad I_{\mathcal{F},\, S} := (\overset{q}{\wedge}\Lambda_{\mathcal{F}}) \cdot (\overset{q}{\otimes}\, \mathcal{X}_{M,\, S})\,,$$

où : $\mathcal{X}_{M,S} \subset \mathcal{X}_M$ est le sous-faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M tangents à S (i.e. à la partie lisse de S) et où, pour un idéal $I := (f_1, \ldots, f_r)$ de $\mathcal{O}_{M,m}$, on désigne par $sat\,(I)$ l'idéal $(f_1/g, \ldots, f_r/g)$, $g := p.g.c.d.(f_1, \ldots, f_r)$

Visiblement $Sing(\mathcal{F})$ et $Sing(\mathcal{F}, S)$ coïncident en dehors de S. On voit facilement :

Proposition 2.1.4. — *Soit S une hypersurface de M à croisements normaux. Un point $m \in S$ appartient à $M - Sing(\mathcal{F}, S)$ si et seulement si en ce point $\mathcal{F}$ est régulier et chaque composante irréductible locale de S est soit invariante soit transverse à $\mathcal{F}$ en tout point.*

Si l'on n'avait pas effectué dans (2.1.3) l'opération de saturation de $I_{\mathcal{F},S}$ on aurait de plus comme points singuliers ceux des composantes de S qui sont variétés intégrales de $\mathcal{F}$.

Considérons maintenant un sous espace analytique $S = (|S|, \mathcal{O}_M/I_S)$ de M, non nécessairement réduit. Désignons par $\widehat{M}^S$ l'espace annelé donné par

$$|\widehat{M}^S| := |S|,\ \widehat{\mathcal{O}}_M^S := \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\iota^{-1}(\mathcal{O}_M)}{\iota^{-1}({I_S}^{k+1})} \right), \tag{24}$$

où $\iota : S \hookrightarrow M$ désigne l'application d'inclusion. Nous dirons que $\widehat{M}^S$ est un *espace transversalement formel* et les éléments de $\widehat{\mathcal{O}}_M^S$ seront appelés *germes de fonctions transversalement formelles le long de S*.

Classiquement l'espace transversalement formel $\widehat{M}^S$ s'identifie à celui obtenu de la même manière à partir de l'espace analytique réduit associé à S.

Nous n'aurons à considérer ici que des sous-espaces de dimension 0, (où l'on retrouve la notion usuelle de série formelle), et des hypersurfaces localement définies dans de bonnes coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ par une équation du type $z_1 = 0$, resp. $z_1 z_2 = 0$. Les éléments de $\widehat{\mathcal{O}}_{M,m}^S$ s'expriment alors respectivement comme les séries :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z_2, \ldots, z_n)\, z_1^k, \tag{25}$$

ou bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(A_k^0(z_3 \ldots, z_n) + A_k^1(z_1;\, z_3, \ldots z_n) + A_k^2(z_2;\, z_3 \ldots, z_n)\big)(z_1\, z_2)^k, \tag{26}$$

les rayons de convergence des coefficients A_k, A_k^j étant tous minorés par un même réel > 0.

Soit $\mathcal{J}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\widehat{\mathcal{O}}_M^S$ et $S_{\mathcal{J}} := supp(\widehat{\mathcal{O}}_M^S/\mathcal{J}) \subset S$. On appelle *sous-espace de M transversalement formel le long de S* l'espace annelé $Z_{\mathcal{J}} = (S_{\mathcal{J}}, \widehat{\mathcal{O}}_M^S/\mathcal{J})$. Lorsque l'idéal $\mathcal{J}$ est égal à son radical, on dit que $Z_{\mathcal{J}}$ est un *sous-ensemble de M transversalement formel le long de S*. L'*intersection de deux sous-ensembles transversalement formels* est défini par le radical du produit de leurs idéaux. Lorsque I est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_M$ (avec I égal à son radical), nous notons $\widehat{I}^S = I \otimes_{\mathcal{O}_M} \widehat{\mathcal{O}}_M^S$. Dans ce cas $S_{\widehat{I}^S} = Z \cap S$ où Z est le sous-ensemble analytique de M défini par I.

Soit S' un sous-espace analytique d'une variété M'. Une *application transversalement formelle* $f : \widehat{M'}^{S'} \to \widehat{M}^S$, que l'on notera aussi $f : (M', S') \to (M, S)$ est un morphisme d'espaces annelés donné par $|f| : |S'| \to |S|$ et $f^* : \widehat{\mathcal{O}}_M^S \to \widehat{\mathcal{O}}_{M'}^{S'}$.

Pour tout sous-ensemble quelconque K' de S', on appelle *germe de* $\widehat{M'}^{S'}$ *le long de* K', le sous-espace annelé $(K', i^{-1}(\widehat{\mathcal{O}}_{M'}^{S'}))$ où $i : K' \hookrightarrow S'$ désigne l'application d'inclusion. Le *germe de* f *le long d'un sous-ensemble* $K' \subset S'$, noté $f : (M', K') \to (M, S)$, est un morphisme d'espace annelé entre les espaces annelés $(K', i^{-1}(\widehat{\mathcal{O}}_{M'}^{S'}))$ et $\widehat{M}^S$.

Via l'extension des scalaires $\iota^{-1}(\mathcal{O}_M) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_M^S$ on obtient les faisceaux (de base S) des *1-formes différentielles* et des *champs de vecteurs transversalement formels le long de* S en posant :

$$\widehat{\Lambda}_M^S := \iota^{-1}(\Lambda_M) \otimes_{\iota^{-1}(\mathcal{O}_M)} \widehat{\mathcal{O}}_M^S \,, \qquad \widehat{\mathcal{X}}_M^S := \iota^{-1}(\mathcal{X}_M) \otimes_{\iota^{-1}(\mathcal{O}_M)} \widehat{\mathcal{O}}_M^S \,.$$

Lorsque S est réduit à un point, $S = \{m\}$, on retrouve les notions usuelles de séries, 1-formes différentielles et champs de vecteurs formels et nous notons simplement ces espaces par $\widehat{\mathcal{O}}_{M,m}$, $\widehat{\Lambda}_{M,m}$, $\widehat{\mathcal{X}}_{M,m}$.

Définition 2.1.5. — Un *feuilletage* $\widehat{\mathcal{F}}$ *de* M *de codimension* q *transversalement formel le long d'un sous-espace analytique* $S \subset M$ est la donnée d'un faisceau $\Lambda_{\widehat{\mathcal{F}}}$ de sous-modules localement libres de rang q du faisceau $\widehat{\Lambda}_M^S$ qui satisfait en chaque point m de S les relations d'intégrabilité (23). Le *germe de* $\widehat{\mathcal{F}}$ *le long d'un sous-ensemble* K de S, noté $(\widehat{\mathcal{F}}, K)$ est la donnée de la restriction $\Lambda_{\widehat{\mathcal{F}},K} = i^{-1}(\Lambda_{\widehat{\mathcal{F}}})$, $i : K \hookrightarrow S$ désignant l'application d'inclusion.

Remarque 2.1.6. — Avec ces définitions, on étend sans peine à un feuilletage transversalement formel $\widehat{\mathcal{F}}$ le long de S, les notions de lieux singulier, de saturation, ainsi que les notions d'image réciproque $f^{-1}(\widehat{\mathcal{F}})$ et de transformé strict $f^*(\widehat{\mathcal{F}})$ par une application transversalement formelle $f : \widehat{M'}^{S'} \to \widehat{M}^S$. On dispose aussi d'une notion de sous-espace transversalement formel invariant par $\widehat{\mathcal{F}}$. On peut aussi définir la relation de conjugaison formelle entre deux feuilletages transversalement formels $\widehat{\mathcal{F}}$ et $\widehat{\mathcal{F}}'$ par un isomorphisme transversalement formel, que l'on notera par $\widehat{\mathcal{F}} \sim_{for} \widehat{\mathcal{F}}'$.

Remarquons aussi que toute application holomorphe h d'une variété holomorphe M' dans une variété holomorphe M induit une application transversalement formelle $\widehat{M'}^{S'} \to \widehat{M}^S$ avec ici $S' = h^{-1}(S)$ i.e. $|S'| := h^{-1}(|S|)$, $\mathcal{O}_{S'} := \mathcal{O}_{M'}/I_{S'}$ et $I_{S'} := h^*(I_S)\mathcal{O}_{M'}$. En particulier, l'image réciproque par h d'un feuilletage transversalement formel le long de S est un feuilletage transversalement formel le long de $h^{-1}(S)$. D'autre part l'opération d'image directe commute avec la complétion, d'après les théorèmes de comparaison de Grauert [**1**, page 269]. La proposition de type Hartogs (2.1.2) s'étend ainsi à l'image directe d'un feuilletage transversalement formel par une application holomorphe. Ainsi lorsqu'on considère un feuilletage formel à l'origine de

$\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme formelle

$$\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy \quad \in \quad \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,\,0} \tag{27}$$

son transformé strict par une succession finie E d'éclatements en des points sera un feuilletage transversalement formel le long de $E^{-1}(0)$. Réciproquement tout feuilletage transversalement formel le long de $E^{-1}(0)$ provient d'un feuilletage formel saturé à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

Remarque 2.1.7. — Supposons à présent que S est une sous-variété analytique de M, de codimension égale à la codimension q du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$, et invariante par $\widehat{\mathcal{F}}$. Fixons un point $m \in S - (Sing(\widehat{\mathcal{F}}) \cap S)$. On peut voir qu'il existe des coordonnées $z_1, z_2, \ldots, z_n$ transversalement formelles de $\widehat{\mathcal{O}}^S_{M,m}$ telles que $\Lambda_{\widehat{\mathcal{F}},m}$ soit engendré par $dz_1, dz_2, \ldots, dz_q$. C'est la version transversalement formelle du Théorème de Frobenius qui se montre de manière identique. En effet, étant donnés une submersion $R : (M,m) \to (S,m)$ et un germe en m de champ transversalement formel X qui se projette en un champ holomorphe sur S via R, on voit facilement qu'il existe une application $\Phi : R^{-1}(m) \times \mathbb{C} \to (\widehat{M}^S, m)$ transversalement formelle le long de $m \times \mathbb{C}$ telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = X \circ \Phi$, où t désigne la variable sur $\mathbb{C}$ [**22**, page 505].

Ainsi on définit comme d'habitude *l'holonomie de* $\widehat{\mathcal{F}}$ *le long de* $S - (Sing(\widehat{\mathcal{F}}) \cap S)$ comme une représentation ρ_S de $\pi_1(S - (Sing(\widehat{\mathcal{F}}) \cap S), m_0)$ dans $\widehat{Diff}(T, m_0)$ où (T, m_0) est un germe de sous-variété holomorphe de dimension q transverse à S en un point fixé $m_0 \in S$ et $\widehat{Diff}(T, m_0)$ désigne le groupe des difféomorphismes formels de (T, m_0). L'image H_S de ρ_S s'appelle le *groupe d'holonomie de* S *par rapport à* $\widehat{\mathcal{F}}$.

Comme dans le cas holomorphe ρ_S classifie le germe de $\widehat{\mathcal{F}}$ le long de l'ensemble invariant S. Plus précisément, donnons nous $R : (M,S) \to S$ un germe de submersion le long de S, avec $R^{-1}(m_0) = T$, la restriction de R à S étant l'identité. Alors les représentations d'holonomie respectives ρ_S et ρ'_S de deux feuilletages $\widehat{\mathcal{F}}$ et $\widehat{\mathcal{F}}'$ de M transversalement formels le long de S sont formellement conjuguées $\rho'_S = \phi \circ \rho_S \circ \phi^{-1}$ avec $\phi \in \widehat{Diff}(T, m_0)$ si et seulement s'il existe un isomorphisme transversalement formel $\Phi : (M,S) \to (M,S)$ tel que $\Phi^* \widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}'$.

2.2. Déformations formelles d'un feuilletage. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme formelle

$$\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy \quad \in \quad \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,\,0} \tag{28}$$

et soit P le germe $(\mathbb{C}^p, 0)$. Une *déformation formelle de* $\mathcal{F}$ *le long de* $0 \times P$, de paramètres P, est la donnée à unité multiplicative près, d'une forme différentielle formelle du type

$$\eta := A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy \tag{29}$$

telle que $A(x,y;t) = \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk}(t)\,x^j y^k$, $B(x,y;t) = \sum_{j,k=0}^{\infty} B_{jk}(t)\,x^j y^k \in \mathbb{C}\{t\}[[x,\,y]]$, avec $t := (t_1, \ldots, t_p)$, les rayons de convergence des $A_{jk}(t)$, $B_{jk}(t)$ étant minorés par un réel > 0 commun et $A(x,y;0) = a(x,y)$, $B(x,y;0) = b(x,y)$, $A(0,0;t) = B(0,0;t) = 0$.

Plus généralement, considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 transversalement formel le long d'un sous-ensemble analytique S (non nécessairement fermé) d'une variété holomorphe M .

Définition 2.2.1. — Une *déformation transversalement formelle de* $(M, S, \mathcal{F})$ *paramètrée par* P , est la donnée

$$\underline{\mathcal{F}}_P = (\mathcal{M}_P,\, \mathcal{S}_P,\, \pi,\, \sigma;\, \mathcal{F}_P)\ , \tag{30}$$

1) d'une *déformation* $(\mathcal{M}_P,\, \mathcal{S}_P,\, \pi)$ *de* (M, S) *de base* P, c'est à dire :

a) d'un germe le long de S de plongement holomorphe σ de (M, S) dans une variété holomorphe $\mathcal{M}_P$ munie d'un sous-ensemble analytique $\mathcal{S}_P$ tel que $\sigma(S) \subset \mathcal{S}_P$,

b) d'un germe de submersion $\pi : (\mathcal{M}_P, \sigma(S)) \to P$ tel que la restriction de π à $\mathcal{S}_P$ soit plate et vérifie : $\pi^{-1}(0) = \sigma(M)$, $\pi^{-1}(0) \cap \mathcal{S}_P = \sigma(S)$,

2) du germe $\mathcal{F}_P$ le long de $\sigma(S)$ d'un feuilletage transversalement formel le long de $\mathcal{S}_P$, de même dimension que $\mathcal{F}$ qui vérifie :

a) les feuilles de $\mathcal{F}_P$ sont contenues dans les fibres de π ,

b) $\sigma^* \mathcal{F}_P = \mathcal{F}$.

La condition 2.a. signifie que tout germe en un point de $\sigma(S)$ d'un champ de vecteurs X transversalement formel le long de $\mathcal{S}_P$ qui annule $\Lambda_{\mathcal{F}_P}$ est *vertical*, i.e. $T\pi \cdot X \equiv 0$.

Remarquons que lieu singulier $Sing\,(\mathcal{F}_P, \mathcal{S}_P)$, que l'on défini comme en (2.1.3), est aussi le sous-ensemble de M transversalement formel le long de S donné par le radical du faisceau d'ideaux

$$sat\left(\Lambda_{\mathcal{F}_P} \cdot \widehat{\mathcal{X}}_{\mathcal{M}_{P/\pi}, \mathcal{S}_P}\right)\ , \tag{31}$$

où $\widehat{\mathcal{X}}_{\mathcal{M}_{P/\pi}, \mathcal{S}_P}$ désigne le faisceau des germes de champs de vecteurs verticaux transversalement formels le long de $\mathcal{S}_P$ et tangents à $\mathcal{S}_P$. Nous appellerons cet ensemble transversalement formel *le lieu singulier relatif de la déformation* $\underline{\mathcal{F}}_P$ et le notons $Sing_P\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$.

Remarque 2.2.2. — Lorsque la restriction de π à $\mathcal{S}_P$ est propre on peut, pour des petites valeurs du paramètre $t \in P$, considérer les fibres des données de (30) au dessus de t . On obtient un espace analytique compact réduit $\mathcal{S}_P(t) := \mathcal{S}_P \cap \pi^{-1}(t)$, un germe de variété $\mathcal{M}_P(t) := \left(\pi^{-1}(t),\, \mathcal{S}_P(t)\right)$ et un feuilletage $\mathcal{F}_P(t)$ sur $\mathcal{M}_P(t)$ transversalement formel le long de $\mathcal{S}_P(t)$, obtenu en restreignant $\mathcal{F}_P$ à $\pi^{-1}(t)$. La propreté de π permet donc de considérer $\underline{\mathcal{F}}_P$ comme le germe en $0 \in P$ d'une "famille" de feuilletages transversalement formels

$$\underline{\mathcal{F}}_P(t) := (\mathcal{M}_P(t),\, \mathcal{S}_P(t),\, \mathcal{F}_P(t))\ .$$

D'après (31) le lieu singulier relatif de $\underline{\mathcal{F}}_P$ est la "famille" des lieux singuliers des $\mathcal{F}_P(t)$.

Remarque 2.2.3. — Lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$, i.e. $M = \mathbb{C}^2$ et $S = \{0\}$, la condition de platitude de la restriction de π à $\mathcal{S}_P$ lui impose d'être étale au dessus de P et l'on peut supposer que $\mathcal{S}_P = 0 \times P$. On retrouve alors la notion de déformation formelle le long de $0 \times P$ définie par (29). Le lieu singulier relatif de $\underline{\mathcal{F}}_P$ est défini par les équations $A(x, y;\, t) = B(x, y;\, t) = 0$ et le feuilletage formel $\mathcal{F}_P(t)$ est alors donné par la 1-forme formelle $\eta_t \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2 \times t,\,(0,t)}$ obtenue en fixant la valeur du paramètre $t \in P$ dans (29).

Donné un germe d'application holomorphe $\rho : Q := (\mathbb{C}^q, 0) \longrightarrow P$ on appelle *déformation obtenue à partir de* $\underline{\mathcal{F}}_P$ *par le changement de paramètres* ρ la déformation transversalement formelle

$$\rho^*\underline{\mathcal{F}}_P := (\rho^*\mathcal{M}_P,\, \rho^*\mathcal{S}_P,\, \rho^*\pi,\, \rho^*\sigma;\, \rho^*\mathcal{F}_P)$$

dont les composantes sont définies par les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \rho^*\mathcal{M}_P & \xrightarrow{i_\rho} & \mathcal{M}_P \\ \rho^*\pi\downarrow & \square & \pi\downarrow \\ Q & \xrightarrow{\rho} & P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \rho^*\mathcal{S}_P & \xrightarrow{i_\rho} & \mathcal{S}_P \\ \rho^*\pi\downarrow & \square & \pi\downarrow \\ Q & \xrightarrow{\rho} & P \end{array}$$

avec $\rho^*\mathcal{F}_P := {i_\rho}^*\mathcal{F}_P$. Comme d'habitude cette opération est contravariante.

Deux déformations transversalement formelles de $(M,\, S,\, \mathcal{F})$ de même espace P de paramètres

$$\underline{\mathcal{F}}_P := (\mathcal{M}_P,\, \mathcal{S}_P,\, \pi,\, \sigma;\; \mathcal{F}_P) \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{F}}'_P := (\mathcal{M'}_P,\, \mathcal{S}'_P,\, \pi',\, \Sigma';\, \mathcal{F}'_P)$$

sont dites *formellement conjuguées* s'il existe un germe d'isomorphisme Φ transversalement formel qui conjugue $\mathcal{F}_P$ à $\mathcal{F}'_P$, fait commuter les submersions π et π' et vaut l'identité au dessus de l'origine :

$$\Phi : (\mathcal{M}_P, \sigma(S)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M'}_P, \Sigma'(S)) \quad \pi' \circ \Phi = \pi\,, \quad \Phi \circ \sigma = \Sigma'\,, \quad \Phi^*\mathcal{F}'_P = \mathcal{F}_P\,.$$

On notera alors $\Phi^*\underline{\mathcal{F}}'_P = \underline{\mathcal{F}}_P$, ou encore $\underline{\mathcal{F}}'_P \sim_{P,\,for} \underline{\mathcal{F}}_P$. On dit que $\underline{\mathcal{F}}_P$ est *formellement triviale* s'il existe une conjugaison formelle entre $\underline{\mathcal{F}}_P$ et la *déformation constante* :

$$\underline{\mathcal{F}}_P^{cst} := \big(M \times P,\, S \times P,\, \pi,\, i;\, \mathcal{F}_P^{cst}\big)\,, \tag{32}$$

où π désigne la projection canonique de $M \times P$ sur P, i l'inclusion de $M \cong M \times 0$ dans $M \times P$ et $\mathcal{F}_P^{cst}$ est le *feuilletage transversalement formel constant* défini comme $pr^{-1}\mathcal{F}$, avec $pr : M \times P \to M$ la projection canonique.

2.3. Construction de déformations formelles par collage. — Fixons un feuilletage formel $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$, et un germe d'arbre non nécessairement régulier

$$\mathbb{A}_P = \big(\mathcal{M}^j\,, E^j\,, \Sigma^j\,, S^j\,, \pi_j\,, \mathcal{D}^j\,\big)_{j=0,\dots,h} \tag{33}$$

au dessus de $P := (\mathbb{C}^p,\, 0)$. Pour les données de cimes de $\mathbb{A}_P$ et celles du germe d'arbre $\mathbb{A}_P(0)$ défini en (9), nous conservons les notations (8). Le transformé strict $\mathcal{F}' = \widetilde{E}_0^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ par $\widetilde{E}_0$, cf. (2.1.1) est un feuilletage transversalement formel le long du diviseur de cime $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{D}}$ de $\mathbb{A}_P(0)$. Comme dans (2.1.5) on désigne par $(\mathcal{F}',\, W)$ le germe de

$\mathcal{F}'$ le long d'un sous-ensemble quelconque $W \subset \widetilde{\mathcal{D}}_0$. Nous supposons dans tout ce qui suit que $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ est un ensemble intégral de $\mathcal{F}'$.

Définition 2.3.1. — Une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ le long de $0 \times P$, de paramètres P est dite *compatible avec l'arbre* $\mathbb{A}_P$ si

1. $\mathcal{M}^0 = \mathbb{C}^2 \times P$, $\Sigma^0 = S^0 = 0 \times P$ et pour tout $j = 1, \ldots h$ le lieu singulier relatif du transformé strict de $\mathcal{F}_P$ sur $\mathcal{M}^j$ intersecte $\mathcal{D}^j$ suivant Σ^j.
2. le diviseur de cime $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\mathbb{A}_P$ est un ensemble intégral du feuilletage $\mathcal{F}'_P := \widetilde{E}^* \mathcal{F}_P$,
3. la restriction de la projection $\pi : \mathcal{M}^h \to P$ au lieu singulier relatif de $\underline{\mathcal{F}}'_P$ est finie (c'est à dire $\pi_*(\widehat{\mathcal{O}}_{Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P)})$ est un $\mathcal{O}_P$-module fini),
4. $Sing_P\left(\underline{\mathcal{F}}'_P\right) \cap \widetilde{\mathcal{D}}_0 = Sing(\mathcal{F}')$.

Nous allons donner des procédés de construction de telles déformations. pour cela nous faisons les deux hypothèses suivantes :

– l'ensemble $\widetilde{\Sigma}_0$ des singularités de la cime $\mathbb{A}_P(0)$ est égal au lieu singulier de $\mathcal{F}'$,
– le diviseur $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ est un ensemble intégral de $\mathcal{F}'$.

Reprenons le vocabulaire et les notations introduites dans la definition (1.4.1).

Définition 2.3.2. — Nous appelons *bon système de lacets* associé à un élément critique K toute collection Γ_K de lacets telle que :

1. Si $K \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{A}_P)$ alors $\Gamma_K = (\gamma_{K,L})_{L \in Ad_1(K)}$ où $\gamma_{K,L}$ est un lacet simple tracé sur L (cf. (17)) bordant un disque conforme $W_{K,\,L} \subset \overline{L}$ vérifiant $\overline{W_{K,\,L}} \cap Sing(\mathcal{F}') = \{K\}$;
2. Si $K \in \boldsymbol{C}_1(\mathbb{A}_P)$ alors Γ_K est une collection $(\gamma_{K,\,m})_{m \in Ad_0(K)}$ de lacets simples tracés sur K de même origine m_0 et bordant des disques conformes $V_{K,m} \subset \overline{K}$ tels que $\overline{V_{K,m}} \cap Sing(\mathcal{F}') = \{m\}$ et $\overline{V_{K,m}} \cap \overline{V_{K,m'}} = \{m_0\}$ pour $m \neq m'$.

Fixons un germe de courbe lisse (T, m_0) transverse à $K \in \boldsymbol{C}_1(\mathbb{A}_P)$ en l'origine commune d'un bon système de lacet Γ_K m_0 ainsi qu'un bon système de lacets. Ordonnons et orientons les lacets de ce système : $\Gamma_K = (\gamma_j)_{j=1,\ldots,v(K)}$ de manière que leurs classes dans $\pi_1(K, m_0)$ vérifient : $\overset{\bullet}{\gamma}{}^{-1}_{v(K)} = \overset{\bullet}{\gamma}_1 \circ \cdots \circ \overset{\bullet}{\gamma}_{v(K)-1}$. Notons $\underline{h}_j \in \widehat{\mathcal{O}}_{T,m_0}$ l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}'$ le long de γ_j, $j = 1, \ldots, v(K)$.

Proposition 2.3.3. — *Pour chaque $j = 1, \ldots, v(K)$, donnons-nous un germe de famille de difféomorphismes formels $h_{j,\,t} \in \widehat{\mathcal{O}}_{T,\,m_0}$ dépendant analytiquement du paramètre $t \in P$ et tels que*

$$h_{j,\,0} = \underline{h}_j\,, \qquad \textit{et} \qquad h^{-1}_{v(K),\,t} = h_{1,\,t} \circ \cdots h_{v(K)-1,\,t}\,.$$

Il existe alors une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}'_{P,\,K}$ de $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_0,\, K,\, \mathcal{F}'\right)$ de paramètres P réalisée sur le produit $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_0 \times P,\, K \times P\right)$ telle que pour chaque $j = 1, \ldots, v(K)$, l'holonomie du feuilletage (de dimension 1) $\mathcal{F}'_{P,\,K}$ le long du lacet γ_j, calculée sur la transversale $(T \times P,\, (m_0, 0))$ est égale à $h_j(u,t) := h_{j,\,t}(u)$.

Démonstration. — Nous raisonnons par induction sur $v = v(K)$. Pour $v(K) = 1$, K est conformément un disque et le résutat est immédiat : d'après la remarque (2.1.7), les feuilletages de feuille K et leurs déformations sont tous triviaux le long de K.

Pour $v := v(K) > 2$, notons $Ad_0(K) = \{m_1, \ldots, m_v\} \subset \overline{K} \subset \mathbb{P}^1$. Alors $\overline{K} - \{m_v\}$ est biholomorphe à $\mathbb{C}$ et peut être recouvert par deux disques conformes U_1 et U_2 d'intersection connexe et simplement connexe, et tels que

$$U_1 \cap Ad_0(K) = \{m_1\}, \quad U_2 \cap Ad_0(K) = \{m_2, \ldots, m_{v-1}\}, \quad \text{avec}$$

$$\gamma_1 \subset U_1, \quad \text{et} \quad \{\gamma_2, \ldots, \gamma_{v-1}\} \subset U_2/, .$$

Supposons donnée pour chaque $k = 1, 2$ une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}'_{P,\,U_k}$ du germe de $\mathcal{F}'$ le long de U_k. Par la remarque (2.1.7), ces déformations sont formellement triviales le long de $U_1 \cap U_2$ et donc formellement conjuguées. Soit $\widehat{\mathcal{G}}$ le faisceau (16) de base $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ d'automorphismes transversalement formels introduit en (1.3). Donnons nous une section Φ_{12} de $\widehat{\mathcal{G}}$ au dessus de $U_1 \cap U_2$, telle que $\Phi_{12}^* \underline{\mathcal{F}}'_{P,\,U_2} = \underline{\mathcal{F}}'_{P,\,U_1}$.

On utilise alors le résultat suivant, dont une brève preuve sera donnée plus bas

$$H^1(\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{G}}) = 0\,, \qquad \mathcal{U} := (U_1, U_2)\ . \tag{34}$$

Ainsi Φ_{12} se décompose en

$$\Phi_{12} = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\,, \qquad \Phi_k \in \widehat{\mathcal{G}}(U_k), \quad k = 1, 2. \tag{35}$$

Et les déformations $\Phi_1^* \underline{\mathcal{F}}'_{P,\,U_1}$ et $\Phi_2^* \underline{\mathcal{F}}'_{P,\,U_2}$ se recollent le long de $U_1 \cap U_2$ en la déformation cherchée.

Pour démarrer l'induction, il reste à traiter le cas $v(K) = 2$. Il se fait comme précédemment. L'ensemble K est conformément le plan complexe épointé $\mathbb{C}^*$ que l'on recouvre par trois secteurs U_k, $k = 1, 2, 3$ sans intersection 3 à 3 et d'intersections 2 à 2 connexes et simplement connexes. L'holonomie de $\mathcal{F}'$ est donnée par un seul élément $h \in \widehat{Diff}(T, m_0)$ où (T, m_0) est une transversale à K en $m_0 \in U_1 \cap U_2$. Considérons la déformation h_t de h donnée par l'hypothèse, et posons $\widetilde{h}_t = h_t \circ h^{-1}$. Le long de $U_1 \cap U_2$, le feuilletage $\mathcal{F}'$ est trivial d'après (2.1.7). Donnons nous une section Φ de $\widehat{\mathcal{G}}$ sur $U_1 \cap U_2$, qui est égale à $\widetilde{h}_t$ sur (T, m_0). Considérons pour $\mathcal{U} = (U_1, U_2, U_3)$ le cocycle $(\Phi_{ik}) \in Z^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{G}}\right)$ donné par $\Phi_{12} = \Phi$, $\Phi_{23} = id$ et $\Phi_{31} = id$. On applique à nouveau l'égalité (34) qui est encore vraie pour le recouvrement $\mathcal{U} = (U_1, U_2, U_3)$. Comme précédemment, on obtient une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}'_P$ du germe de $\mathcal{F}'$ le long de K. On vérifie que l'holonomie de cette déformation le long de K est égale à h_t. $\square$

Démonstration de (34). — Cette égalité peut se montrer directement en résolvant l'équation cohomologique (35). Pour cela on explicite cette équation en développant en série par rapport à la coordonnée z qui correspond à une submersion-équation de K. En procédant par induction suivant les coefficients de z^k, on est ramené à résoudre l'équation linéaire $A_{12} = A_2 - A_1$, $A_{12} \in \mathcal{O}_K^2(U_1 \cap U_2)$ d'inconnues $A_k \in \mathcal{O}_K^2(U_k)$.

Ceci est toujours possible puisque $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_K^2) = 0$. La démonstration est similaire dans le cas du recouvrement de $\mathbb{C}^*$ par trois secteurs. □

Donnons nous maintenant un arbre $\mathbb{A}_0$ au dessus de $\{0\}$ compatible (2.3.1) avec un feuilletage formel $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et pour chaque élément critique $K \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)$ de $\mathbb{A}_0$ un système $\Gamma_K := (\gamma_{K,L})$ de bons lacets (2.3.2). Notons encore $\mathcal{F}'$ le feuilletage transversalement formel le long du diviseur de cime $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de $\mathbb{A}_0$, transformé strict de $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}', K)$ le germe (2.1.5) de $\mathcal{F}'$ le long de $K \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)$

Définition 2.3.4. — Une collection de déformations transversalement formelles des germes $(\mathcal{F}', K)$, $K \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)$,

$$\mathbb{S} := \left(\underline{\mathcal{F}}'_{P,K}\right)_{K\in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)}, \quad \underline{\mathcal{F}}'_{P,K} := \left(W_{P,K}, \mathcal{S}_{P,K}, {\pi'}_{P,K}, {\Sigma'}_{P,K}; \mathcal{F}'_{P,K}\right), \tag{36}$$

telle que $\mathcal{S}_{P,K}$ soit une variété intégrale de $\mathcal{F}'_{P,K}$ sera appelée *système semi-local de déformations formelles de* $\mathcal{F}'$. Le sytème $\mathbb{S}$ est dit *réalisé dans une déformation* $(\mathcal{M}_P, \mathcal{S}_P, \pi, \sigma)$ *de* $(\widetilde{\mathcal{M}}_0, S_0)$ si les $W_{P,K}$ sont des voisinages ouverts de $\sigma(K)$ dans $\mathcal{M}_P$ qui intersectent $\mathcal{S}_P$ suivant $\mathcal{S}_{P,K}$, et si de plus ${\pi'}_{P,K}$ et ${\Sigma'}_{P,K}$ sont des restrictions de π et σ.

Une *conjugaison formelle de deux systèmes semi-locaux* $(\Phi_K)_{K\in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)}$ est une collection de germes le long de chaque ensemble critique, de conjugaisons formelles des déformations constituant les systèmes semi-locaux.

Donné un système semi-local $\mathbb{S} = \left(\underline{\mathcal{F}}'_{P,K}\right)_{K\in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)}$ de déformations transversalement formelles de $(\mathcal{F}', K)$, considérons pour chaque couple d'ensembles critiques (m, K), $dim(K) = 1$, $m \in Ad_0(K)$, les deux familles de difféomorphismes formels dépendant holomorphiquement de $t \in P$

– l'holonomie $h_{m,K;t}$ du feuilletage $\mathcal{F}'_{P,m}$ le long de $\gamma_{m,K}$ et

– l'holonomie $h_{K,m;t}$ de $\mathcal{F}'_{P,K}$ le long de $\gamma_{K,m}$.

Ces familles sont bien définies modulo la relation de conjugaison par une famille de difféomorphismes formels dépendant holomorphiquement de t.

Définition 2.3.5. — Le système $\mathbb{S}$ sera dit *cohérent* si pour chaque (m, K) avec $K \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0)$, $dim(K) = 1$, et $m \in Ad_0(K)$, il existe une une famille de difféomorphismes formels $\phi_{m,K;t}$ dépendant holomorphiquement de t, et qui vaut l'identité pour $t = 0$, telle que

$$h_{K,m;t} = \phi_{m,K;t} \circ h_{m,K;t} \circ (\phi_{m,K;t})^{-1}. \tag{37}$$

Considérons une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ compatible avec un arbre $\mathbb{A}_P$ au dessus de P tel que $\mathbb{A}_P(0) = \mathbb{A}_0$. Les germes $(\mathcal{F}'_P, K)$ de la transformée stricte $\mathcal{F}'_P$ de $\mathcal{F}_P$ sur la cime de $\mathbb{A}_P$, le long de chaque ensemble critique $K \in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_0) = \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P)$ forment visiblement un système cohérent noté $\mathbb{S}(\underline{\mathcal{F}}'_P)$. Réciproquement on a :

Théorème de réalisation 2.3.6. — *Soient* $\mathcal{F}$ *un feuilletage formel à l'origine de* $\mathbb{C}^2$ *compatible avec un arbre* $\mathbb{A}_0$ *au dessus de* $\{0\}$, *et* $\mathbb{S}$ *un système semi-local cohérent* *de déformations transaversalement formelles du transformé strict $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ sur la cime de $\mathbb{A}_0$. Il existe alors un germe d'arbre $\mathbb{A}_P$ au dessus de P tel que $\mathbb{A}_P(0) = \mathbb{A}_0$ et une déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ de paramètres P compatible avec $\mathbb{A}_P$ telle que $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\underline{\mathcal{F}}'_P)$.*

Démonstration. — Notons (36) le système $\mathbb{S}$. Le long de chaque ensemble critique K les germes d'espaces $W_{P,\,K}$ et $\mathcal{S}_{P,K}$ sont holomorphiquement triviaux, cf. ([**20**] Lemme 1.2.2 page 304). On supposera donc que les déformations $\underline{\mathcal{F}}'_{P,\,K}$ sont réalisées sur :

$$W_{P,\,K} = \left(\widetilde{\mathcal{M}}_0 \times P\,, K \times 0\right)\,, \qquad \mathcal{S}_{P,\,K} = \left(\widetilde{\mathcal{D}}_0 \times P\,, K \times 0\right)\,,$$

où $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ sont la cime et le diviseur de cime de $\mathbb{A}_0$. Identifions $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ à $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \times 0$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \times 0$. Quitte à restreindre, les traces U_K des $W_{P,\,K}$ sur $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ forment un recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$. Notons $\underline{\mathcal{F}}_{P,\,U_K}$ le germe de $\underline{\mathcal{F}}_{P,\,K}$ le long de U_K .

Deux ouverts U , $V \in \mathcal{U}$ s'intersectent s'ils correspondent à des éléments critiques adjacents. La condition de cohérence permet alors de construire à l'aide de (2.1.7) une conjugaison formelle de déformations $\widehat{\Phi}_{UV}$ entre les germes de $\underline{\mathcal{F}}_{P,\,U}$ et de $\underline{\mathcal{F}}_{P,\,V}$ le long de $U \cap V$, valant l'identité en restriction à $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \times P$. Appliquons le théorème (1.4.8) au cocycle $\widehat{\mathcal{C}} := \left(\widehat{\Phi}_{UV}\right) \in Z^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{G}}\right)$. On obtient un cocycle holomorphe $\mathcal{C} := (\Phi_{UV}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ et une cochaine formelle $\left(\widehat{\Phi}_U\right) \in Z^0\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{G}}\right)$ telle que $\widehat{\Phi}_{UV} = \widehat{\Phi}_U \circ \Phi_{UV} \circ \widehat{\Phi}_V^{-1}$. La relation de congugaison $\widehat{\Phi}^*_{UV}\underline{\mathcal{F}}_{P,\,U} = \underline{\mathcal{F}}_{P,\,V}$ donne :

$$\Phi_{UV}{}^*\widehat{\Phi}^*_U\underline{\mathcal{F}}_{P,\,U} = \widehat{\Phi}^*_V\underline{\mathcal{F}}_{P,\,V}\,.$$

Cette égalité signifie que lorsqu'on construit comme en (19) une variété holomorphe $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ en recollant par les biholomorphismes Φ_{UV} des voisinages des $U \in \mathcal{U}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \times P$, les feuilletages transversalement formels $\widehat{\Phi}^*_U\mathcal{F}_{P,\,U}$ se recollent aussi en un feuilletage transversalement formel le long d'un diviseur (isomorphe à $\widetilde{\mathcal{D}}_0 \times P$). D'après le lemme (1.4.5) $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est biholomorphe à la cime d'un arbre au dessus de P et l'on conclut par image directe cf.(2.1.6) . □

Nous aurons besoin au chapitre généricité d'un résultat plus précis permettant de construire des déformations avec contrôle des jets. Le théorème ci-dessous n'est pas optimal pour ce contrôle mais suffira à notre usage.

De manière générale nous dirons que deux déformations transversalement formelles d'un même feuilletage réalisées sur le même espace

$$\underline{\mathcal{F}}'_P = (\mathcal{M}_P, \mathcal{S}_P, \pi, \sigma; \mathcal{F}'_P) \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{F}}''_P = (\mathcal{M}_P, \mathcal{S}_P, \pi, \sigma; \mathcal{F}''_P)$$

sont *tangentes à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ le long d'un sous-espace analytique* non nécessairement réduit de $\mathcal{M}_P$:

$$Z := (|Z|\ , \mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_{\mathcal{M}_P}/\mathfrak{A}) \text{ avec } |Z| \subset \mathcal{S}_P,$$

si en chaque point de $\mathcal{S}_P$ les feuilletages $\mathcal{F}'_P$ et $\mathcal{F}"_P$ peuvent être définis par des formes différentielles dont les coefficients ne diffèrent que d'un élément de l'idéal

$$\widehat{\mathfrak{A}}^{k+1} := \mathfrak{A}^{k+1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}_P}} \widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P} \subset \widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P}\,.$$

En d'autres termes on a l'égalité des *restrictions* des feuilletages $\mathcal{F}'_P$ et $\mathcal{F}''_P$ au *k-ième voisinage infinitésimal* de Z dans $\mathcal{M}_P$, c'est à dire l'égalité des faisceaux :

$$\Lambda_{\mathcal{F}'_P} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P}} \left(\widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P} \Big/ \mathfrak{A}^{k+1}\right) = \Lambda_{\mathcal{F}"_P} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P}} \left(\widehat{\mathcal{O}}^Z_{\mathcal{M}_P} \Big/ \mathfrak{A}^{k+1}\right) . \tag{38}$$

Fixons de nouveau un arbre $\mathbb{A}_P$ de hauteur h au dessus de P, noté (33). Désignons par

$$\mathbb{D} := \left(\widetilde{\mathcal{D}};\ \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}} \Big/ \widetilde{\mathcal{J}}\right) \tag{39}$$

le sous-espace analytique de la cime $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{A}_P$ défini par le faisceau d'idéaux $\widetilde{\mathcal{J}}$ image réciproque sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ du faisceau d'idéaux $I_P \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2\times P}$ des fonctions nulles sur $0 \times P$ cf. (11).

Théorème de réalisation tangente 2.3.7. — *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{A}_P$ un germe d'arbre au dessus de P tel que $\mathcal{F}$ est compatible avec $\mathbb{A}_P(0)$ au dessus de $\{0\}$. Notons $\mathcal{F}'$ la transformée stricte de $\mathcal{F}$ sur la cime $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ de $\mathbb{A}_P(0)$. On se donne une déformation transversalement formelle $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ de paramètres P compatible avec $\mathbb{A}_P$, et un système semi-local $\mathbb{S} := (\underline{\mathcal{F}}"_{P,K})_{K\in \boldsymbol{C}(\mathbb{A}_P(0))}$ de déformations formelles de $\mathcal{F}'$ réalisées sur la cime $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{A}_P$. Supposons qu'au voisinage de chaque ensemble critique K le transformé strict $\underline{\mathcal{F}}'_P$ de $\underline{\mathcal{F}}_P$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ est tangent (36) à l'ordre $k+2h$ à $\underline{\mathcal{F}}"_{P,K}$, le long de $\mathbb{D}$, $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe un germe de déformation $\underline{\mathcal{H}}_P$ de $\mathcal{F}$ transversalement formelle le long de $0\times P$, k-tangente à $\underline{\mathcal{F}}_P$ le long de $0\times P$ (considéré comme espace réduit), compatible avec $\mathbb{A}_P$ et dont le transformé strict $\underline{\mathcal{H}}'_P$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ induit un système semi-local $\mathbb{S}(\underline{\mathcal{H}}'_P)$ formellement conjugué à $\mathbb{S}$.*

Démonstration. — On procède de la même manière que pour la démonstration du théorème de réalisation. Les hypothèses de tangence donnent maintenant, toujours grâce au Thèorème 1.4.8, 3. des cocycles vérifiant :

$$(\Phi_{UV}) \in Z^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+2h}), \quad \left(\widehat{\Phi}_U\right) \in Z^0(\mathcal{U};\widehat{\mathcal{G}}_{k+2h}), \quad {\Phi_{UV}}^*\widehat{\Phi}^*_U\mathcal{F}"_{P,U} = \widehat{\Phi}^*_V\mathcal{F}"_{P,V}$$

où $\mathcal{U}$ désigne encore le recouvrement distingué de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ formé des intersections $U_K := W_{K,P}\cap\widetilde{\mathcal{D}}_0$, et $\mathcal{F}"_{P,U_K}$ désigne le germe de $\mathcal{F}"_{P,K}$ le long de U_K. D'après le théorème de stabilité (1.4.6) le cocycle (Φ_{UV}) vaut l'identité dans $H^1(\mathcal{U};\mathcal{G}_{k+h})$. Ainsi

$$\Phi_{UV} = \Phi'_U \circ {\Phi'}_V^{-1}, \qquad (\Phi'_U) \in Z^0\left(\mathcal{U};\, \mathcal{G}_{k+h}\right),$$

et on obtient [(7)]

$$\widehat{\Psi}^*_U\mathcal{F}"_{P,U} = \widehat{\Psi}^*_V\mathcal{F}"_{P,V}, \quad U\cap V \neq \emptyset, \quad \widehat{\Psi}_U := \widehat{\Phi}_U \circ \Phi'_U \in \widehat{\mathcal{G}}_{k+h}(U).$$

Ces relations définisent un germe le long de $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ de feuilletage global $\mathcal{H}'_P$, transversalement formel le long de $\widetilde{\mathcal{D}}$. Considérons la déformation $\mathcal{H}_P$ de $\mathcal{F}$, transversalement

[(7)] On aurait aussi pu appliquer l'isomorphisme 2. du théorème 1.4.8 pour obtenir directement les conjugaisons Ψ_U.

formelle le long de $0\times P$, obtenue par image directe (2.1.2) de $\mathcal{H}'_P$ par l'application $\widetilde{E}:\widetilde{\mathcal{M}}\longrightarrow\mathbb{C}^2\times P$ composée des éclatements de $\mathbb{A}_P$. La transformée stricte de $\mathcal{H}_P$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ est $\mathcal{H}'_P$. Par construction on a

$$\widehat{\Lambda}_{\mathcal{H}'_P}=\widehat{\Lambda}_{\mathcal{F}'_P}\quad\text{modulo}\quad\widetilde{\mathcal{J}}^{k+h+1}\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{M}}},\qquad\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{M}}}:=\Lambda_{\widetilde{\mathcal{M}}}\otimes\widehat{\mathcal{O}}^{\mathbb{D}}_{\widetilde{\mathcal{M}}}.\tag{40}$$

Soit η et ξ les 1-formes différentielles formelles à l'origine de $\mathbb{C}^2\times P$ définissant $\mathcal{F}_P$ et $\mathcal{H}_P$ respectivement. Il reste à montrer que les coefficients de $\eta-\xi$ appartiennent à l'ideal $\widehat{I}_P^{k+1}$ où $\widehat{I}_P:=(x,y)$ désigne l'idéal de $\widehat{\mathcal{O}}^{0\times P}_{\mathbb{C}^2\times P,0}$ engendré par les coordonnées x et y.

Les images réciproques de η et ξ sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ définissent des faisceaux de sous-modules de $\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$ qui se décomposent en

$$\Big(\widetilde{E}^*(\eta)\Big)=\mathfrak{I}_\eta\cdot\Lambda_{\mathcal{F}'_P},\quad\Big(\widetilde{E}^*(\xi)\Big)=\mathfrak{I}_\xi\cdot\Lambda_{\mathcal{H}'_P},\qquad\mathfrak{I}_\eta,\ \mathfrak{I}_\xi\subset\widehat{\mathcal{O}}^{\mathbb{D}}_{\widetilde{\mathcal{M}}}.$$

Il découle de (40) que $\widetilde{E}^*(\eta)-\widetilde{E}^*(\xi)$ est une section globale de $\widetilde{\mathcal{J}}^{k+h+1}\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{M}}}$. On voit facilement par récurrence sur h que les champs de vecteurs $x^h\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $x^h\dfrac{\partial}{\partial y}$ sur $\mathbb{C}^2\times P$ se relèvent sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ en des champs de vecteurs holomorphes globaux $X:=\widetilde{E}^*(x^h\dfrac{\partial}{\partial x})$ et $Y:=\widetilde{E}^*(x^h\dfrac{\partial}{\partial y})$. Ainsi en posant $\widetilde{x}=x\circ\widetilde{E}$ et $\widetilde{y}=y\circ\widetilde{E}$, on voit que

$$f:=\widetilde{x}^{-h}\Big(\widetilde{E}^*(\eta)\cdot X-\widetilde{E}^*(\xi)\cdot X\Big)\quad\text{et}\quad g:=\widetilde{x}^{-h}\Big(\widetilde{E}^*(\eta)\cdot Y-\widetilde{E}^*(\xi)\cdot Y\Big)$$

sont des sections globales de $\widetilde{\mathcal{J}}^{k+1}$, et que ce faisceau est engendré par les sections globales $\widetilde{x}^\alpha\widetilde{y}^\beta$, $\alpha+\beta=k+1$. Comme $H^1\Big(\widetilde{\mathcal{D}}_0;\,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathbb{D}}_{\widetilde{\mathcal{M}}}\Big)=0$ d'après (1.2.1) on peut décomposer

$$f=\sum_{\alpha+\beta=k+1}f_{\alpha\beta}\,\widetilde{x}^\alpha\widetilde{y}^\beta,\quad g=\sum_{\alpha+\beta=k+1}g_{\alpha\beta}\,\widetilde{x}^\alpha\widetilde{y}^\beta,\quad\text{avec}\quad f_{\alpha\beta},\,g_{\alpha\beta}\in H^0\Big(\widetilde{\mathcal{D}}_0;\,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathbb{D}}_{\widetilde{\mathcal{M}}}\Big).$$

Les coefficients $f_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ se redescendent (2.1.6) par $\widetilde{E}$ en des élément $f^\flat_{\alpha\beta}(x,y;\,t)$ et $g^\flat_{\alpha\beta}(x,y;\,t)$ de $\widehat{\mathcal{O}}^{0\times P}_{\mathbb{C}^2\times P,\,0}$. Ainsi

$$\eta\cdot\frac{\partial}{\partial x}-\xi\cdot\frac{\partial}{\partial x}=\sum_{\alpha+\beta=k+1}f^\flat_{\alpha\beta}(x,y;\,t)\,x^\alpha y^\beta$$

et

$$\eta\cdot\frac{\partial}{\partial y}-\xi\cdot\frac{\partial}{\partial y}=\sum_{\alpha+\beta=k+1}g^\flat_{\alpha\beta}(x,y;\,t)\,x^\alpha y^\beta$$

appartiennent à $\widehat{I}_P^{k+1}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

3. Equiréduction

3.1. Singularités de deuxième espèce. — Nous rappelons et précisons ici quelques notions classiques sur la réduction des singularités de feuilletages. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [**10**] [**22**] ou encore à [**17**]. Donnons-nous une variété holomorphe M de dimension deux, une courbe à croisements normaux $D \subset M$ et un feuilletage formel $\mathcal{F}$ en un point $m_0 \in D$.

Définition 3.1.1. — Nous disons que $\mathcal{F}$ *est réduit en* m_0 si $\mathcal{F}$ est : soit régulier, soit défini par une 1-forme différentielle formelle ω qui, dans des coordonnées locales appropriées $(x,\, y)$, $x\,(m_0) = y\,(m_0) = 0$, s'écrit

$$\omega = (\lambda\, x + \cdots)\, dy + (\mu\, y + \cdots)\, dx\,, \qquad \lambda\,, \mu \in \mathbb{C}\,, \quad \lambda \neq 0\,, \quad \frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}_{<0}\,, \tag{41}$$

où $+\cdots$ désigne des termes d'ordre supérieur i.e. des éléments de l'idéal $(x,\, y)^2 \subset \widehat{\mathcal{O}}_{M,\, m_0}$.

Nous disons que *le couple* $(\mathcal{F},\, D)$ *est réduit en* m_0 si $(\mathcal{F},\, D)$ est régulier en m_0 cf. (2.1.3), ou bien si $\mathcal{F}$ est réduit et chaque germe D'_{m_0} de composante irréductible locale de D en m_0 est une courbe invariante de $\mathcal{F}$ i.e. la restriction de ω à D'_{m_0} est identiquement nulle.

La classification formelle des feuilletages singuliers réduits est bien connue : il existe des coordonnées formelles z_1, $z_2 \in \widehat{\mathcal{O}}_{M,\, m_0}$, $z_1(m_0) = z_2(m_0) = 0$ et $u \in \widehat{\mathcal{O}}_{M,\, m_0}$, $u(m_0) \neq 0$ tels que $\omega = u\,\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\omega}$ est l'une des 1-formes suivantes, dites *formes normales* :

1. $\widetilde{\omega} := \lambda_1 z_1\, dz_2 + \lambda_2 z_2\, dz_1$ avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0\,, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$,
2. $\widetilde{\omega} := q\, z_1\, dz_2 + p\, z_2\, dz_1$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$,
3. $\widetilde{\omega} := q\, z_1(1 + \zeta\,(z_1^p z_2^q)^k)\, dz_2 + p\, z_2(1 + (\zeta - 1)\,(z_1^p z_2^q)^k)\, dz_1$ avec $p, q, k \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$, $\zeta \in \mathbb{C}$,
4. $\widetilde{\omega} := (\zeta z_2^p - p) z_1\, dz_2 + z_2^{p+1}\, dz_1$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\zeta \in \mathbb{C}$.

On dit dans le premier cas que $\widetilde{\omega}$ est *non-résonnant.* Dans le cas 2. on dit que $\widetilde{\omega}$ est *résonnant linéarisable* et *résonnant non-linéarisable* dans le cas 3.. Enfin dans le dernier cas on dit que $\widetilde{\omega}$ est un *selle-nœud.* De plus ces écritures sont uniques : deux feuilletages définis par deux 1-formes distinctes du type 1. à 4. ne sont pas formellement conjugués.

Remarquons que dans tous les cas les courbes formelles $z_j = 0$, $j = 1, 2$ sont des courbes formelles invariantes (2) de $\mathcal{F}$. Ce sont en fait les seules. Si $\mathcal{F}$ est un selle-nœud le germe de courbe $\{z_2 = 0\}$ est appelée *variété forte* et le germe $\{z_1\} = 0$ est appelé *variété faible* de $\mathcal{F}$.

Définition 3.1.2. — Supposons que $\mathcal{F}$ est un selle-nœud et que $(\mathcal{F},\, D)$ est réduit. Nous disons que $\mathcal{F}$ est un *selle-nœud transverse à* D *en* m_0 si D est lisse au point m_0 et si son germe est une variété forte de $\mathcal{F}$. Dans le cas contraire nous dirons que $\mathcal{F}$ est *un selle-nœud tangent à* D *en* m_0. Lorsque de plus l'holonomie locale de la variété faible de $\mathcal{F}$ est périodique nous dirons que $\mathcal{F}$ *est un selle-nœud tangent résonnant.*

Nous avons supposé $\mathcal{F}$ formel au point m_0. Lorsque $\mathcal{F}$ est transversalement formel le long de D il est naturel de chercher à obtenir la forme normale de $\mathcal{F}$ dans des coordonnées transversalement formelles le long de D.

Proposition 3.1.3. — [**18**], [**19**] *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement formel le long de D admettant m_0 comme singularité isolée. Si $(\mathcal{F}, D)$ est réduit en m_0 et n'est pas en ce point un selle-nœud tangent à D, il existe alors des coordonnées z_1, $z_2 \in \widehat{\mathcal{O}}^D_{M,m_0}$, $z_1(m_0) = z_2(m_0) = 0$ transversalement formelles le long de D et $u \in \widehat{\mathcal{O}}^D_{M,m_0}$, $u(m_0) \neq 0$ telles que $\omega = u\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\omega}$ est l'une des 1-formes 1. à 4. ci-dessus.*

Lorsqu'un feuilletage formel $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme *à singularité isolée*, $Sing(\omega) = \{0\}$ [(8)]

$$\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

n'est pas réduit on construit un arbre au dessus de $\{0\}$, dans le sens du chapitre 1, mais de hauteur à priori infinie, noté

$$(42) \qquad \left(M^j_\omega, E^j_\omega, \Sigma^j_\omega, C^j_\omega, \pi_{\omega,j}, \mathcal{D}^j_\omega\right)_j, \quad \text{ou} \quad \left(M^j_\mathcal{F}, E^j_\mathcal{F}, \Sigma^j_\mathcal{F}, C^j_\mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F},j}, \mathcal{D}^j_\mathcal{F}\right)_j$$

en définissant par induction la succession d'éclatements de la manière suivante :

1. $M^0_\omega := \mathbb{C}^2$, $\qquad \Sigma^0_\omega := \{0\} =: C^0_\omega$,
2. $\Sigma^j_\omega := Sing(\mathcal{F}^j, \mathcal{D}^j_\omega)$ où $\mathcal{F}^j$ désigne le transformé strict de $\mathcal{F}$ par l'application $E_{\omega,j} := E^1_\omega \circ \cdots \circ E^j_\omega$ composée des éclatements de centres C^k_ω, $k = 0, \ldots, j-1$ et $\mathcal{D}^j_\omega := E^{-1}_{\omega,j}(0)$,
3. $C^j_\omega \subset \Sigma^j_\omega$ est l'ensemble des points de $\mathcal{D}^j_\omega$ où le couple $\left(\mathcal{F}^j, \mathcal{D}^j_\omega\right)$ n'est pas réduit.

Un théorème classique de Bendixon-Seidenberg [**2**] [**30**] [**22**] affirme que l'arbre de réduction d'un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est de hauteur finie : avec les notations ci-dessus, il existe un entier noté h_ω ou $h_\mathcal{F}$ pour lequel $C^{h_\omega}_\omega = \emptyset$.

Dans toute la suite du texte nous désignerons indifféremment par $\mathbb{A}[\mathcal{F}]$ ou $\mathbb{A}[\omega]$ l'arbre (42) que nous appelons *arbre de réduction de $\mathcal{F}$ ou de ω*. Nous noterons aussi (43)

$$E_\mathcal{F} := E_\omega := E_{\omega,h_\omega}, \quad M_\omega := M^{h_\omega}_\omega, \quad \mathcal{D}_\mathcal{F} := \mathcal{D}_\omega := E^{-1}_\omega(0), \quad \widetilde{\mathcal{F}} := E^*_\omega(\mathcal{F}).$$

Définition 3.1.4. — Nous dirons que :

$\mathcal{F}$ est *non-dicritique* si $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ est un ensemble invariant de $\widetilde{\mathcal{F}}$,

$\mathcal{F}$ est *de deuxième espèce* s'il est non-dicritique et si aucun point singulier de $\widetilde{\mathcal{F}}$ n'est de type selle-nœud tangent.

$\mathcal{F}$ est *semi-hyperbolique* [(9)] s'il est non-dicritique et si aucun point singulier de $\widetilde{\mathcal{F}}$ n'est de type selle-nœud.

[(8)] i.e. $dim_\mathbb{C}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}\big/(a,b)\right) < \infty$

[(9)] Ces feuilletages sont aussi appelés *courbes généralisées* dans [**6**]

L'arbre dual fléché et pondéré $\mathbb{A}^*[\mathcal{F}]$ de $\mathbb{A}[\mathcal{F}]$, cf. (1.1.2) possède une seconde pondération, la *pondération par multiplicités* que nous allons définir maintenant.

De manière générale, donnons-nous une application holomorphe E d'une surface lisse M sur $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathcal{D} := E^{-1}(0)$ soit une hypersurface et une 1-forme formelle $\eta \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,\,0}$ non nécessairement à singularité isolée. Le sous-faisceau de modules $(E^*(\eta))$ de $\widehat{\Lambda}^{\mathcal{D}}_M$ engendré par $E^*(\eta)$ se décompose de manière unique en

$$(E^*(\eta)) = \widehat{J}\cdot \prod_{D\in comp(\mathcal{D})} \widehat{I}_D^{\,m_D(\eta)} \cdot \widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\eta}\,, \qquad m_D\,(\eta)\in\mathbb{N}\,, \tag{44}$$

où $comp(\mathcal{D})$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{D}$, $\widehat{I}_D$ le faisceau des fonctions transversalement formelles le long de $\mathcal{D}$ nulles sur D, $\mathcal{F}_\eta$ le feuilletage défini par η, $E^*\mathcal{F}_\eta$ son transformé strict (2.1.1) et $\widehat{J}$ un faisceau d'idéaux dont les zéros ne contiennent aucune composante irréductible de $\mathcal{D}$. Lorsque η est à singularité isolée en 0, on a $\widehat{J} = (1)$.

Définition 3.1.5. — L'entier $m_D(\eta)$ défini par (44) s'appelle la *multiplicité de η suivant la composante irréductible D*. Il se note aussi $m_D\,(\mathcal{F}_\eta)$.

Ce nombre s'interprète comme le plus grand entier k tel qu'en chaque point la k-ième puissance d'une équation réduite locale de D divise $E^*\,(\eta)$.

Enrichissons la donnée de $\mathbb{A}^*[\mathcal{F}]$ en associant à chaque sommet s correspondant à une composante irréductible D de $\mathcal{D}_\omega$, d'une part l'auto-intersection $e(s) := \langle D, D\rangle$ et d'autre part *la multiplicité* $m(s) := m_D(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$. On obtient un arbre doublement pondéré. Nous y rajoutons une donnée supplémentaire en munissant du symbole "flèche double" chaque sommet dont le diviseur correspondant, appelé *composante dicritique*, n'est pas invariant par $\widetilde{\mathcal{F}}$. L'arbre obtenu est noté $\breve{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$.

Définition 3.1.6. — L'arbre $\breve{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$ s'appelle *arbre dual doublement pondéré associé à $\mathcal{F}$*.

Dans [**6**] on trouvera des formules liant ces multiplicités avec le *nombre de Milnor de $\mathcal{F}$* défini par

$$\mu_0\,(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,\,0}\Big/\,(a,\,b)\right)\,, \tag{45}$$

et avec la *multiplicité algébrique du feuilletage à l'origine* c'est à dire l'ordre du premier terme du développement en série de ω que l'on note $\nu_0(\omega)$ ou $\nu_0(\mathcal{F})$. Les auteurs définissent aussi le *nombre de Milnor* $\mu_0\,(\mathcal{F}, Z)$ *de $\mathcal{F}$ suivant une courbe invariante lisse Z* comme la multiplicité à l'origine de la restriction à Z d'un champ de vecteurs formel à singularité isolée définissant $\mathcal{F}$. Ils prouvent la formule suivante, lorsque $\mathcal{D}_\omega$ est sans composante dicritique :

$$\nu_0(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{D\in comp(\mathcal{D}_\omega)}\ \sum_{m\in Sing(\widetilde{\mathcal{F}}\cap D)} m\,(D)\left(\mu_m(\widetilde{\mathcal{F}},\,D) - \varepsilon(m) + 1\right) \tag{46}$$

où $\varepsilon(m)$ est le nombre 1 ou 2 de branches de $\mathcal{D}_\omega$ au point m et $m\,(D)$ est défini comme en (1.2) par l'égalité de faisceaux d'idéaux

$$E_\omega{}^* \mathfrak{M} = \prod_{D\in comp(\mathcal{D}_\omega)} \widehat{I}_D^{\,m\,(D)}\,, \qquad \mathfrak{M} := (x,\, y) \subset \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,\,0}\,.$$

Remarque 3.1.7. — $\mathcal{F}$ est un selle-nœud tangent à Z si et seulement si $\mu_0(\mathcal{F}, Z) > 1$.

La formule (46) permet de voir par induction que, pour $\mathcal{F}$ non-dicritique, les multiplicités $m_D\,(\omega)$ s'expriment comme des fonctions affines des nombres de Milnor $\mu_m\,(\widetilde{\mathcal{F}},\, D)\,,\ D \in comp(\mathcal{D}_\omega)\,,\ m \in Sing(\widetilde{\mathcal{F}})$, dont les coefficients sont des entiers ≥ 0 qui ne dépendent que de $\mathbb{A}^*\,[\omega]$. Le pas de l'induction repose sur les égalités :

$$m_{D_c}\,(\omega) = \nu_c\,(\widetilde{\mathcal{F}}^j) + \sum_{D\in Ad(c)} m_D\,(\omega)\,, \quad Ad(c) := \left\{\, D \in comp(\mathcal{D}^j_\omega)\ /\ c \in D \right\}\,, \tag{47}$$

où $c \in C^j_\omega$ et D_c est la composante de $\mathcal{D}_\omega$ créée par l'éclatement de c. Les feuilletages de deuxième espèce sont caractérisés par les égalités $\mu_m\,(\widetilde{\mathcal{F}},\, D) = 1$. On en déduit la

Remarque 3.1.8. — Si $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce, alors

1. les multiplicités $m_D\,(\omega)$ sont données par $\mathbb{A}^*[\omega]$,
2. dans l'ensemble $\Big\{w' \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,\,0}\ /\ Sing\,(w') = \{0\}$ et $\mathbb{A}^*[w'] \equiv \mathbb{A}^*[w]\Big\}$ la pondération par multiplicités de $\breve{\mathbb{A}}[w]$ réalise pour chaque sommet un minimum.

Sous l'hypothèse de non-dicriticité, $\mathcal{F}$ ne possède qu'un nombre fini de courbes formelles invariantes à l'origine appelées *séparatrices formelles de* $\mathcal{F}$ par certains auteurs. Soit $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,\,0}$ une équation réduite de l'union de ces courbes que l'on notera $\widehat{Sep}\,(\mathcal{F})$ ou $\widehat{Sep}\,(\omega)$. Dans [**6**] les auteurs prouvent :

$$\begin{gathered}\nu_0\,(\omega) \geq \nu_0\,(d\widehat{f})\,, \qquad \mu_0\,(\omega) \geq \mu_0\,(d\widehat{f})\,,\\ m_D\,(\omega) \geq m_D\,(d\widehat{f})\,, \quad D \in comp(\mathcal{D}_\omega)\,,\end{gathered} \tag{48}$$

ainsi que l'équivalence

$$\mathcal{F}\ \text{ est semi-hyperbolique } \iff \mu_0\,(\omega) = \mu_0\,(d\widehat{f})\,. \tag{49}$$

Nous allons donner plusieurs caractérisations des singularités de deuxième espèce. La plus intéressante fera intervenir les faisceaux de base $\mathcal{D}_\omega$ suivants : le faisceau $\widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ formé des germes aux points de $\mathcal{D}_\omega$ des champs de vecteurs X transversalement formels le long de $\mathcal{D}_\omega$ qui sont tangents à $\widetilde{\mathcal{F}}$ i.e. $\Lambda_{\widetilde{\mathcal{F}}} \cdot X = 0$ et le faisceau $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}'}$ formé des champs X transversalement formels tangents à $\widehat{S}' := E_\omega^{-1}\left(\widehat{Sep}(\mathcal{F})\right)$, i.e. $X \cdot I_{\widehat{S}'} \subset I_{\widehat{S}'}$, où $I_{\widehat{S}'}$ est le radical du faisceau d'idéaux $\left(\widehat{f} \circ E_\omega\right)$. Désignons par α le morphisme $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}^{\mathcal{D}_\omega}_{\mathcal{M}_\omega}$ qui à un champ X associe $E_\omega{}^*(\omega)\cdot X$. Le théorème suivant, annoncé dans [**21**], donne une interprétation géométrique de la propriété prouvée dans le lemme clé (3.2) de [**21**].

Théorème 3.1.9. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage formel non-dicritique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme formelle ω à singularité isolée et $\widehat{f}$ une équation réduite de $\widehat{Sep}(\mathcal{F})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{F}$ est de deuxième espèce,*
2. $\nu_0\,(\omega) = \nu_0\,(d\widehat{f})$,
3. $\check{\mathbb{A}}[\omega] = \check{\mathbb{A}}[d\widehat{f}]$,
4. *pour chaque $D \in comp(\mathcal{D}_\omega)$ on a l'égalité $m_D\,(\omega) = m_D\,(d\widehat{f})$,*
5. *il existe un $D \in comp(\mathcal{D}_\omega)$ pour lequel $m_D\,(\omega) = m_D\,(d\widehat{f})$,*
6. *on a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S'}} \xrightarrow{\alpha} \left(\widehat{f} \circ E_\omega\right) \longrightarrow 0\,. \tag{50}$$

Démonstration. — Dans [**6**] la démonstration de la formule (46) reste valable pour une succession quelconque E d'éclatements. Appliquons-la à ω et à $d\widehat{f}$ pour $E = E_\omega$. Comme le lieu singulier de $E^*(\mathcal{F}_{d\widehat{f}})$ est contenu dans celui de $\widetilde{\mathcal{F}}$, on obtient l'inégalité $\nu_0\,(\omega) \geq \nu_0\,(d\widehat{f})$. Aux points singuliers m de $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\mu_m\,(E^*(\mathcal{F}_{d\widehat{f}}), D)$ est égal à 1, ou à 0 si $E^*(\mathcal{F}_{d\widehat{f}})$ est régulière en m. On en déduit immédiatement que l'égalité $\nu_0\,(\omega) = \nu_0\,(d\widehat{f})$ est réalisée si et seulement si $Sing\left(E^*(\mathcal{F}_{d\widehat{f}})\right) = Sing(\widetilde{\mathcal{F}})$ et $\mu_m\,(\widetilde{\mathcal{F}}, D) = 1$ pour chaque point singulier m et chaque composante irréductible D de $\mathcal{D}_\omega$; c'est à dire si et seulement si ω est de deuxième espèce, ce qui prouve 1. $\Longleftrightarrow$ 2..

Trivialement on a 3. $\Longrightarrow$ 4. et 4. $\Longrightarrow$ 5.. Pour l'implication 5. $\Longrightarrow$ 2. raisonnons par contraposée et supposons que $\nu_0\,(\omega) > \nu_0\,(d\widehat{f})$. La composante D_0 de $\mathcal{D}_\omega$ créée par l'éclatement de l'origine satisfait $m_{D_0}\,(\omega) > m_{D_0}\,(d\widehat{f})$. A l'aide de (48) appliquée en chaque point singulier des transformés stricts de ω et de $d\widehat{f}$ sur D_0, on en déduit que $m_D\,(\omega) > m_D\,(d\widehat{f})$ pour tout $D \in comp\,(\mathcal{D}_\omega)$.

Pour montrer 1. $\Longrightarrow$ 3. raisonnons par récurrence sur la hauteur de $\mathbb{A}[\omega]$. Il suffit d'après la propriété $(\star)$ ci-dessus de montrer l'égalité $\mathbb{A}^*[w] = \mathbb{A}^*[d\widehat{f}]$. Lorsque $h_\omega = 1$ les séparatrices formelles de ω sont des courbes lisses deux à deux transverses et il suffit de voir que leur nombre p est ≥ 3, c'est à dire que $\widehat{f} = 0$ n'est pas déjà une courbe à croisement normal. Sinon $\nu_0\,(d\widehat{f}) = 1$ et d'après 1. $\Longrightarrow$ 2. on a aussi $\nu_0\,(\omega) = 1$. Dans ce cas les seuls feuilletages qui se réduisent par un seul éclatement sont du type $\omega = (y + \cdots)\,dx + (-x + \varepsilon y + \cdots)\,dy$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1. Ces deux possibilités sont exclues car ω est dicritique si $\varepsilon = 0$ et on obtient un selle-nœud tangent pour $\widetilde{\mathcal{F}}$ lorsque $\varepsilon = 1$. La démonstration du pas de récurrence est triviale.

Calculons maintenant les fibres du co-noyau de α aux points c de $\mathcal{D}_\omega$. Nous distinguerons plusieurs cas. Supposons d'abord que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est régulier et $\mathcal{D}_\omega$ est lisse en c. Fixons des coordonnées transversalement formelles locales z_1, z_2

dans lesquelles $\widehat{f} \circ E_\omega = z_2^{m_D(d\widehat{f})+1}$. La composante D de $\mathcal{D}_\omega$ portant c est $\{z_2 = 0\}$. Au point c la fibre de $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}'}$ est engendrée par les champs $\frac{\partial}{\partial z_1}$ et $z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ et le germe de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est défini par une 1-forme transversalement formelle qui s'écrit $\widetilde{\omega} = z_2^{m_D(\omega)}\,(A(z_1,z_2)\,z_2\,dz_1 + B(z_1,z_2)\,dz_2)$ avec $B(0,0) \neq 0$. Ainsi

$$(51)\qquad \left(\widehat{f} \circ E_\omega\right)_c = \left(z_2^{m_D(d\widehat{f})+1}\right) \quad \text{et} \quad coker(\alpha)_c = \left(z_2^{m_D(\omega)+1}\right).$$

On en déduit l'implication $6. \Longrightarrow 4.$.

Pour l'implication réciproque il reste à prouver l'exactitude de la suite (50). aux points singuliers de $\widetilde{\mathcal{F}}$ car (51) donne l'exactitude aux points réguliers. Considérons d'abord un point singulier c sur une composante D de $\mathcal{D}_\omega$ où $\mathcal{D}_\omega$ est lisse. On sait que $\mu_c(\widetilde{\mathcal{F}}, D) = 1$ car $4. \Longrightarrow 1.$. Ainsi dans de bonnes coordonnées locales en c on peut écrire

$$\widetilde{\omega} = z_2^q\,(\,A(z_1,z_2)z_2\,dz_1 + (\lambda + B(z_1,z_2))z_1\,dz_2\,)\,, \quad B(0,0) = 0\,, \quad \lambda \neq 0\,,$$

$$\text{et} \quad \widehat{f} \circ E_\omega = z_1 z_2^{q+1}\,, \quad D = \{z_2 = 0\}\,, \quad q := m_D(\omega) = m_D(d\widehat{f})\,.$$

Maintenant $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}'}$ est engendrée par $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ et $z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ ce qui donne bien $\left(\widehat{f} \circ E_\omega\right)_c = coker(\alpha)_c = \left(z_1\, z_2^{q+1}\right)$.

Enfin lorsque c est l'intersection de deux composantes irréductibles D' et $D"$ de $\mathcal{D}_\omega$, la singularité c est une selle, toujours grâce à $4. \Longrightarrow 1.$. En posant $p := m_{D"}(\omega) = m_{D"}(d\widehat{f})$ et $q := m_{D'}(\omega) = m_{D'}(d\widehat{f})$, quitte à bien choisir les coordonnées, on a

$$\widetilde{\omega} = z_1^p z_2^q\,(\,(\lambda_2 + \cdots)z_2\,dz_1 + (\lambda_1 + \cdots)z_1\,dz_2\,)\,, \quad \lambda_1\lambda_2 \neq 0\,,$$

$$\widehat{f} \circ E_\omega = z_1^{p+1} z_2^{q+1}\,, \quad D' = \{z_2 = 0\}\,, \quad D" = \{z_1 = 0\}\,.$$

De nouveau $\widehat{\mathcal{X}}_{\widehat{S}'}$ est engendré par $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ et $z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, ce qui donne bien $\left(\widehat{f} \circ E_\omega\right)_c = coker(\alpha)_c = \left(z_1^{p+1}\, z_2^{q+1}\right)$. ☐

Corollaire 3.1.10. — *Si $\mathcal{F}_\omega$ est de deuxième espèce, alors la réduction de $\mathcal{F}_\omega$ est identique à la réduction de ses séparatrices formelles, c'est à dire : $\mathbb{A}[\mathcal{F}_\omega] \equiv \mathbb{A}[d\hat{f}]$, ou encore : $M_\omega = M_{d\hat{f}}$ et $E_\omega = E_{d\hat{f}}$.*

3.2. Equiréductibilité. — Dans ce qui suit, considérons un feuilletage formel $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme à singularité isolée ω et une déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ transversalement formelle le long de $0 \times P$ de paramètres $P := (\mathbb{C}^p, 0)$, cf. (29). Conservons les notations (42), (2.2.2) et (2.2.3). La notion d'équiréductibilité correspondra, comme dans la théorie d'équisingularité de courbes, à la possibilité d'effectuer une "réduction en famille".

Définition 3.2.1. — Supposons $\mathcal{F}$ non-réduit. Nous disons que $\underline{\mathcal{F}}_P$ est *équiréductible* s'il existe un (germe d') arbre $\mathbb{A}_P = \left(\mathcal{M}^j, E^j, \Sigma^j, S^j, \pi_j, \mathcal{D}^j\right)_{j=0,\ldots,h}$ au dessus de P, régulier au sens de (1.1.1) et tel que

1. $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) = \Sigma^0 = 0 \times P$ et $\mathcal{M}^0 = \mathbb{C}^2 \times P$,
2. pour chaque $j = 1, \ldots, h$, Σ^j est le lieu singulier $Sing\,(\mathcal{F}_P^j,\, \mathcal{D}^j)$ du couple formé du transformé strict $\mathcal{F}_P^j$ de $\mathcal{F}_P$ sur $\mathcal{M}^j$ et du j-ième diviseur exceptionnel, cf. (2.1.3) et (31),
3. pour toute valeur assez petite de $t \in P$ l'arbre $\mathbb{A}_P(t)$ est exactement l'arbre de réduction du feuilletage formel $\mathcal{F}_P(t)$.

Si $\mathcal{F}$ est déjà réduit nous disons que $\mathcal{F}_P$ est équiréductible si : $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) = 0 \times P$ et $\mathcal{F}_P(t)$ est réduit pour t assez petit.

Il est clair que l'arbre $\mathbb{A}_P$ lorsqu'il existe est uniquement déterminé par $\underline{\mathcal{F}}_P$. Nous noterons cet arbre

$$\mathbb{A}[\underline{\mathcal{F}}_P] = \Big(\mathcal{M}^j_{\underline{\mathcal{F}}_P}, E^j_{\underline{\mathcal{F}}_P}, \Sigma^j_{\underline{\mathcal{F}}_P}, S^j_{\underline{\mathcal{F}}_P}, \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P, j}, \mathcal{D}^j_{\underline{\mathcal{F}}_P}\Big)_{j=0,\ldots,h}, \quad \text{ou encore}$$

$$\mathbb{A}[\eta] = \big(\mathcal{M}^j_\eta, E^j_\eta, \Sigma^j_\eta, S^j_\eta, \pi_{\eta,j}, \mathcal{D}^j_\eta\big)_{j=0,\ldots,h}$$

lorque $\underline{\mathcal{F}}_P$ est définie par la 1-forme η, comme en (29). L'équiréductibilité donne donc :

$$\mathbb{A}[\underline{\mathcal{F}}_P](t) = \mathbb{A}[\mathcal{F}_P(t)]\,.$$

Remarquons les deux exemples intéressants de déformations non-équiréductibles données par les 1-formes suivantes, où $t \in (\mathbb{C}, 0)$ est le paramètre de déformation et $\lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})_{>0}$ est fixé :

$$\eta_1 = x\,dy + y(y-t)\,dx \quad \text{et} \quad \eta_2 := (t-\lambda)x\,dy + y\,dx\,. \tag{52}$$

Dans le premier la condition 3. est réalisée sans que la condition 1. le soit. Le deuxième exemple montre que l'équiréductibilité n'est pas une condition analytique : $\mathcal{F}$ est réduit, la condition 1. est réalisée mais pour $t \in \lambda + \mathbb{Q}_{<0}$ le feuilletage $\mathcal{F}_P(t)$ est dicritique et donc non-réduit. On peut aussi construire des exemples faisant apparaître ces situations après éclatements. Cependant on voit par un calcul immédiat :

Proposition 3.2.2. — *Supposons la condition 1. de (3.2.1) satisfaite et $\mathcal{F}_P(t)$ non-dicritique pour t assez petit. Alors le lieu singulier relatif (31) du transformé strict $\mathcal{F}_P^1$ de $\mathcal{F}_P$ par l'application d'éclatement de $0 \times P$ est un sous-ensemble analytique de codimension pure 1 du diviseur exceptionnel. Il est fini au dessus de P si et seulement si les conditions équivalentes suivantes, dites d'équimultiplicité, sont satisfaites :*

$$(i)\quad \nu_{(0,t)}(\mathcal{F}_P(t)) = \nu_0(\mathcal{F})\,, \qquad (ii)\quad m_{\mathcal{D}^1(t)}(\mathcal{F}_P(t)) = m_{\mathcal{D}^1(0)}(\mathcal{F})\,, \tag{53}$$

où $\mathcal{D}^1(t)$ désigne le diviseur créé par l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{C}^2 \times \{t\}$. De plus, lorsque $\mathcal{F}$ est réduit chaque $\mathcal{F}_P(t)$ est aussi réduit et lorsque $\mathcal{F}$ est un selle-nœud, chaque $\mathcal{F}_P(t)$ est aussi un selle-nœud.

La condition $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) = 0 \times P$ peut s'exprimer en disant que le nombre de Milnor $\mu_{(0,t)}(\mathcal{F}_P(t))$ est indépendant de t, cf. (45). Ainsi, toujours sous la condition $\mathcal{F}_P(t)$ non-dicritique, les conditions 1. et 2. de (3.2.1) équivalent aux conditions : constance du nombre de Milnor et équimultiplicité à chaque étape du processus de réduction. Le théorème suivant étend aux feuilletages de deuxième espèce un critère d'équiréductibilité prouvé dans [**21**].

Théorème 3.2.3. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ à singularité isolée non-réduite et non-dicritique et soit $\underline{\mathcal{F}}_P$ une déformation de $\mathcal{F}$ formelle le long de $0 \times P$ cf (29), de lieu singulier relatif $0 \times P$. Alors :*

1. *$\underline{\mathcal{F}}_P$ est équiréductible si et seulement si pour chaque $t \in P$ assez petit, les arbres flèchés et doublement pondérés (par auto-intersection et par multiplicités) $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$ et $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$ définis en (3.1) sont égaux* [10].
2. *Si de plus $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce, $\underline{\mathcal{F}}_P$ est équiréductible si et seulement si pour chaque $t \in P$ assez petit, les arbres duaux de réduction (flèchés et pondérés par auto-intersection) $\mathbb{A}^*[\mathcal{F}_P(t)]$ et $\mathbb{A}^*[\mathcal{F}]$ sont égaux.*

Remarque 3.2.4. — La condition $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) = 0 \times P$ est une hypothèse essentielle dans ce théorème. Dans l'exemple de la déformation $\underline{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ donnée par $\eta := y\,dx + x(x-t)\,dy$ cette hypothèse n'est pas satisfaite bien qu'en chaque point $(0,t)$ le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(t)$ soit réduit et de multiplicité algébrique un. On construit facilement des déformations satisfaisant $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)] = \check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$ où ce phénomène se produit à une étape du processus de réduction. Ces déformations ne sont pas équiréductibles car $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) \neq 0 \times P$.

Démonstration du théorème. — Montrons d'abord l'équivalence 1. Une des implication est triviale. Soit $\eta := A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy$ une 1-forme définissant $\underline{\mathcal{F}}_P$. Notons η_t la restriction de η à $\big(\mathbb{C}^2 \times P,\ (0;\,t)\big)$ et

$$\big(\mathcal{M}^j_{\eta_t}, E^j_{\eta_t}, \Sigma^j_{\eta_t}, S^j_{\eta_t}, \pi_{\eta_t,j}, \mathcal{D}^j_{\nu_t}\big)_{j=0,\dots,h_{\eta_t}}$$

l'arbre de réduction $\mathbb{A}[\mathcal{F}_P(t)]$. Désignons par η^j_t la 1-forme différentielle sur $\mathcal{M}^j_{\eta_t}$, image réciproque de η_t par la composée $E^1_{\eta_t} \circ \cdots \circ E^j_{\eta_t}$ et par $\mathcal{F}^j_P(t)$ le transformé strict de $\mathcal{F}_P(t)$ sur $\mathcal{M}^j_{\eta_t}$. Supposons satisfaite l'égalité

$$\check{\mathbb{A}}[\underline{\mathcal{F}}_P(t)] = \check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]\,. \tag{54}$$

Nous allons construire par induction un arbre d'équiréduction de $\underline{\mathcal{F}}_P$, mais auparavant faisons quelque remarques utiles.

La difficulté principale est qu'on ne dispose pas de notion de "continuité" de la correspondance $t \longmapsto \check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$. En effet lorsque $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$ possède des symétries nontriviales on ne peut pas en général, à partir seulement de la donnée de $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$, associer de façon canonique une composante irréductible du diviseur de réduction $\mathcal{D}_{\eta_t}$ de $\mathcal{F}_P(t)$ à chaque sommet de $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$. La condition (54) donne cependant quelques informations globales. On sait en effet retrouver à partir de la pondération par autointersection "l'ordre de création des composantes". Plus précisément effectuons sur $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$ les opérations qui correspondent aux contractions des composantes de $\mathcal{D}_{\eta_t}$

[10] L'égalité signifie l'isomorphisme, en un sens clair, d'arbres flèchés et doublement pondérés, puisque ces arbres, comme graphes dans $\mathbb{R}^2$, ne sont en fait définis qu'à isomophisme près.

d'auto-intersection -1, c'est à dire les "mouvements" consistant à remplacer

$$\cdots \quad \begin{array}{c} (e',m') \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}'_1 \cdots \mathfrak{f}'_{r'} \searrow \end{array} \quad \text{———} \quad \begin{array}{c} (-1,m) \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{r} \searrow \end{array} \quad \text{———} \quad \begin{array}{c} (e",m") \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}"_1 \cdots \mathfrak{f}"_{r"} \searrow \end{array} \quad \cdots$$

par

$$\cdots \quad \begin{array}{c} (e'+1,m') \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}'_1 \cdots \mathfrak{f}'_{r'} \searrow \end{array} \quad \text{———} \quad \begin{array}{c} (e"+1,m") \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}"_1 \cdots \mathfrak{f}"_{r"} \searrow \end{array} \quad \cdots$$

et

$$\cdots \quad \begin{array}{c} (e',m') \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{r} \searrow \end{array} \quad \text{———} \quad \begin{array}{c} (-1,m) \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}'_1 \cdots \mathfrak{f}'_{r'} \searrow \end{array} \quad \cdots$$

par

$$\cdots \quad \begin{array}{c} (e'+1,m') \\ \bullet \\ \swarrow \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{r+1} \searrow \end{array} \quad \cdots$$

On obtient un nouveau graphe fléché et doublement pondéré noté $\check{\mathbb{A}}^{h-1}[\mathcal{F}_P(t)]$, qui est en fait "l'arbre dual fléché et doublement pondéré associé aux diviseur $\mathcal{D}_{\eta_t}^{h-1}$". En répétant cette opération on obtient tous les arbres duaux intermédaires $\check{\mathbb{A}}^j[\mathcal{F}_P(t)]$ associés au diviseurs $\mathcal{D}_{\eta_t}^j$, et cela de manière uniquement combinatoire à partir de $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$. Ainsi la condition (54) donne les égalités

$$\check{\mathbb{A}}^j[\mathcal{F}_P(t)] = \check{\mathbb{A}}^j[\mathcal{F}]\,, \qquad j = 1 \ldots h\,, \tag{55}$$

et la constance du nombre

$$m_j(t) := \sum_{D \in comp\left(\mathcal{D}_{\eta_t}^j\right)} m_D(\eta_t)\,,$$

où $comp\left(\mathcal{D}_{\eta_t}^j\right)$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles. Mais $\mathcal{F}_P(t)$ est non-dicritique, car $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$ n'a pas de symbole "double flèche" et la multiplicité $m_D(\eta_t)$ d'une composante $D \subset \mathcal{D}_{\eta_t}^{j+1}$ créée par l'éclatement d'un point c de $S_{\eta_t}^j$ est égale à la multiplicité algébrique de η_t^j en ce point. Le nombre $m_{j+1}(t) - m_j(t)$ est donc égal à la somme des multiplicités $\nu_c\left(\eta_t^j\right)$ de η_t^j aux points $c \in S_{\eta_t}^j$. D'autre part $\nu_c\left(\eta_t^j\right) - \nu_c\left(\mathcal{F}_P^j(t)\right)$ est la somme des multiplicités $m_D(\eta_t^j)$ des composantes irréductibles D de $\mathcal{D}_{\eta_t}^j$ qui passent par c. Ainsi le nombre

$$\Delta_j(t) := \sum_{c \in S_{\eta_t}^j} \nu_c\left(\eta_t^j\right) - \nu_c\left(\mathcal{F}_P^j(t)\right)$$

se calcule à partir de $\check{\mathbb{A}}^j[\mathcal{F}_P(t)]$ et $\check{\mathbb{A}}^{j+1}[\mathcal{F}_P(t)]$. Il est constant d'après (55). On en déduit que

$$\widetilde{m}_j(t) := \sum_{c \in S_{\eta_t}^j} \nu_c\left(\mathcal{F}_P^j(t)\right) = m_{j+1}(t) - m_j(t) - \Delta_j(t) \tag{56}$$

est aussi constant. Nous sommes maintenant en mesure de décrire l'induction.

Considérons le transformé strict $\mathcal{F}_P^1$ du feuilletage $\mathcal{F}_P$ par l'application E^1 : $\mathcal{M}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times P$ d'éclatement de centre $S^0 := 0 \times P$. D'après (3.2.2) son lieu singulier Σ^1 est une courbe, contenue dans le diviseur exceptionnel $\mathcal{D}^1 := (E^1)^{-1}(0 \times P)$ car $Sing_P(\underline{\mathcal{F}}_P) = 0 \times P$ qui est fini au dessus de P via $\pi_1 := \pi_0 \circ E^1$, $\pi_0(x, y; t) := t$ d'après (3.2.2). La restriction $\mathcal{F}_P^1(t)$ de $\mathcal{F}_P^1$ à $\mathcal{M}^1(t) := \pi_1^{-1}(t)$ est le transformé strict de $\mathcal{F}_P(t)$ par l'éclatement de l'origine et $\Sigma^1(t) := \Sigma^1 \cap \mathcal{M}^1(t)$ est le lieu singulier de $\mathcal{F}_P^1(t)$. Ainsi $\#\Sigma^1(t)$ est le nombre de flèches et d'arêtes portées par le sommet de $\breve{\mathbb{A}}[\mathcal{F}_P(t)]$ correspondant au premier diviseur créé. Ce nombre est constant d'après (55). On en déduit que Σ^1 est étale au dessus de P via π_1. Toujours d'après (3.2.2) les composantes de Σ^1 sont de deux types : ou bien $\mathcal{F}_P^1(t)$ est réduit en chaque point, ou bien $\mathcal{F}_P^1(t)$ n'est réduit en aucun point. Notons S^1 l'union des composantes du second type.

Supposons maintenant que l'on ait itéré n fois cette construction, c'est à dire que l'on dispose d'un arbre au dessus de P de hauteur n

$$\mathbb{A}_n := \left(\mathcal{M}^j, E^j, \Sigma^j, S^j, \pi_j, \mathcal{D}^j\right)_{j=0,\ldots,n}$$

qui satisfait les propriétés suivantes : notons comme d'habitude : $E_j := E^1 \circ \cdots \circ E^j$, $\pi_j := \pi_0 \circ E_j$ et désignons par $\mathcal{F}_P^j$ le transformé strict de $\mathcal{F}_P$ par E_j et par $\mathcal{F}_P^j(t)$ sa restriction à $\mathcal{M}^j(t) := \pi_j^{-1}(t)$, alors

(i) Σ^j est le lieu singulier de $\mathcal{F}_P^j$,

(ii) S^j est l'union des composantes irréductibles de Σ^j formée des points m' où le germe de $\mathcal{F}_P^j(\pi_j(m'))$ n'est pas réduit.

Paramètrisons les composantes $S_1^n, \ldots, S_k^n$ de S^n par des sections $c_1(t), \ldots, c_k(t)$ de π_n et notons $\widetilde{\nu}_r(t)$ la multiplicité algébrique $\nu_{c_r(t)}(\mathcal{F}_P^n(t))$ de $\mathcal{F}_P^n(t)$ au point $c_r(t)$. Le nombre

$$\widetilde{\nu}^n(t) := \sum_{r=1}^{k} \widetilde{\nu}_r(t)$$

est égal au nombre $\widetilde{m}_n(t)$ définit en (56), car $\mathbb{A}_n(t)$ est une partie de l'arbre de réduction de $\mathcal{F}_P(t)$. Il est constant. Comme les applications $t \longmapsto \widetilde{\nu}_r(t)$ sont localement décroissantes, chaque multiplicité $\nu_{c_r(t)}(\mathcal{F}_P^n(t))$ est aussi constante. Ainsi le lieu singulier Σ^{n+1} du transformé strict de $\mathcal{F}_P$ par l'application E^{n+1} d'éclatement de S^n est fini au dessus de P via $\pi_{n+1} := \pi_n \circ E^{n+1}$. Le nombre de points de $\Sigma^{n+1}(t) := \Sigma^{n+1} \cap \pi_{n+1}^{-1}(t)$ est égal au nombre total de flèches et d'arêtes de $\breve{\mathbb{A}}^{n+1}[\mathcal{F}_P(t)]$. Ce nombre est donc constant d'après (55) et Σ^{n+1} est lisse étale au dessus de P. On note S^{n+1} l'union des composantes de Σ^{n+1} contenant un point non-réduit de $\mathcal{F}_P^{n+1}(0)$. Les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont satisfaites et l'on peut continuer l'induction jusqu'à réduction complète.

Montrons maintenant 2. Nous reprenons la même induction. La seule différence dans cette construction est qu'il faut maintenant déduire la constance des multiplicités $\widetilde{\nu}_r(t)$ de l'hypothèse : "$\mathcal{F}$ est de deuxième espèce". Conservons les mêmes notations. Puisquel'on a $\mathbb{A}^*[\mathcal{F}_P(t)] = \mathbb{A}^*[\mathcal{F}]$, il existe pour chaque t une bijection

$\rho_t : \{1, \dots k\} \longrightarrow \{1, \dots k\}$ telle qu'en désignant par $(\mathcal{F}_P^n(t),\, m)$ le germe de $\mathcal{F}_P^n(t)$ en $m \in \pi_n^{-1}(t)$, on ait l'égalité des arbres duaux de réduction :

$$\mathbb{A}^* \left[\left(\mathcal{F}_P^n(t),\, c_r(t) \right) \right] = \mathbb{A}^* \left[\left(\mathcal{F}_P^n(0),\, c_{\rho_t(r)}(0) \right) \right] .$$

On voit facilement que l'hypothèse : "$\mathcal{F}$ est de deuxième espèce" implique que chaque $(\mathcal{F}_P^n(0),\, c_r(0))$ est aussi de deuxième espèce. La propriété de minimalité $(**)$ de (3.1.8) et la décroissance des $t \longmapsto \widetilde{\nu}_r(t)$ donnent

$$\widetilde{\nu}_{\rho_t(r)}(0) \;\leq\; \widetilde{\nu}_r(t) \;\leq\; \widetilde{\nu}_r(0)\,.$$

En sommant ces inégalités on obtient $\widetilde{\nu}^n(t) = \widetilde{\nu}^n(0)$. De la même manière que précédemment on conclut à la constance de chaque $\widetilde{\nu}_r(t)$. □

3.3. Généricité de l'équiréduction. — Supposons la déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ fixée au début de (3.2) à nombre de Milnor constant, ou bien, ce qui revient au même : $Sing_P\,(\underline{\mathcal{F}}_P) = 0 \times P$. Nous nous proposons de décrire l'ensemble $NR\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ des points $t_0 \in P$ tels que où le germe de $\underline{\mathcal{F}}_P$ en $(0, t_0)$ n'est pas une déformation équiréductible de $\mathcal{F}_P(t_0)$

$$NR\,(\underline{\mathcal{F}}_P) := \{ t_0 \in P \,/ \underline{\mathcal{F}}_P \ \text{non-équiréductible en}\ t_0 \}\,. \tag{57}$$

L'exemple η_2 de (52) montre que $NR\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ n'est pas analytique. L'obstruction y réside dans la dicriticité de certains feuilletages $\underline{\mathcal{F}}_P(t)$. Pour obtenir un ensemble analytique fermé, affaiblissons la notion de "forme réduite".

Définition 3.3.1. — Nous disons qu'une 1-forme formelle $\omega' := (\alpha x + \beta y)\, dx + (\zeta x + \xi y)\, dy + \cdots$, avec α, β, ζ, $\xi \in \mathbb{C}$ est *pré-réduite* si les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\zeta & -\xi \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

sont distinctes. Un feuilletage formel en un point $\mathcal{F}$ sera dit *pré-réduit* si son saturé est défini en ce point par une forme pré-réduite.

Un calcul immédiat permet de voir que ω' est pré-réduite si et seulement si le polynôme homogène de plus bas degré du développement de $\omega' \cdot \left(x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$ est de degré deux, avec deux racines simples (dans $\mathbb{P}^1$). Ces points sont alors les singularités du transformé strict de $\mathcal{F}_{\omega'}$ par l'éclatement de l'origine. Il est clair, par cette interptétation géométrique, que :

($\star$) l'ensemble des valeurs du paramètre $t_0 \in P$ où $\mathcal{F}_P(t_0)$ n'est pas pré-réduite est analytique fermé.

On définit de manière naturelle l'*arbre de pré-réduction* d'un feuilletage formel $\mathcal{F}$ par la succession d'éclatements d'éclatements qui consiste, à chaque étape, à éclater simultanément les points singuliers non-pré-réduits. Cet arbre est fini, puisque toute forme réduite est pré-réduite. On obtient aussi la notion de *déformation équi-pré-réductible* en remplacant dans (3.2.1) la condition 3. par la condition :

3'. *pour toute valeur assez petite de $t \in P$ l'arbre $\mathbb{A}_P(t)$ est l'arbre de pré-réduction du feuilletage formel $\mathcal{F}_P(t)$.*

Considérons l'ensemble $NPR\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ des $t_0 \in P$ tels que le germe de $\underline{\mathcal{F}}_P$ en $(0,t)$ n'est pas une déformation équi-pré-réductible de $\underline{\mathcal{F}}_P(t_0)$,

$$NPR\,(\underline{\mathcal{F}}_P) := \{\, t_0 \in P \ /\ \underline{\mathcal{F}}_P \ \text{ non-équi-pré-réductible en } \ t_0 \,\}$$

Par des arguments standard et à l'aide de $(*)$, on montre :

Proposition 3.3.2. — *$NPR\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ définit un germe à l'origine de sous-ensemble analytique fermé de P, de dimension strictement inférieure à la dimension de P, éventuellement vide.*

Pour décrire $NR\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ il reste à analyser comment s'effectue le passage de la pré-réduction à la réduction. Remarquons d'abord que le diviseur de cîme de l'arbre de pré-réduction peut possèder des *composantes dicritiques*, c'est à dire des composantes irréductibles non-invariantes. On appellera ces composantes, *composantes dicritiques du premier type*. On montre facilement, par récurence sur la hauteur de l'arbre de pré-réduction de $\underline{\mathcal{F}}_P(0)$, le lemme suivant.

Lemme 3.3.3. — *Supposons la deformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ pré-equiréductible. Alors l'ensemble* $\mathrm{Dic}^{(1)}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ *des $t \in P$ tels que la réduction de $\mathcal{F}_P(t)$ admette une composante dicritique du premier type est analytique fermé, éventuellement vide ou égale à P.*

Sur le diviseur de cîme $\mathcal{D}'$ de l'arbre de pré-réduction de $\mathcal{F}$, considérons un point m où le germe de la transformée stricte $\widetilde{\mathcal{F}}'$ de $\mathcal{F}$ est pré-réduit mais non-réduit. Dans de bonnes coordonnées z_1 , z_2 , $\mathcal{F}'$ est donné par une 1-forme du type $\alpha z_2\, dz_1 - \beta z_1\, dz_2 + \cdots$ avec $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ et $\beta/\alpha \neq 1$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les affirmations ci-dessous, en examinant chaque éventualité : m est un point régulier de $\mathcal{D}'$, ou bien m est un point singulier de $\mathcal{D}'$:

1) $\beta/\alpha \notin \mathbb{N}^* \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}^*}$. Le feuilletage est alors t.f. linéarisable dans des coordonnées transversalement formelles, il admet une intégrale première transversalement-formelle-méromorphe [11]et une ou plusieurs composantes dicritiques apparaissent dans la succession d'éclatements supplémentaires que l'on effectue, au dessus du point m, pour aboutir à des singularités réduites. Nous appellerons ces composantes, *composantes dicritiques du deuxième type*.

2) $\beta/\alpha \in \mathbb{N}^* \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}^*}$. Il existe alors des coordonnées "normalisantes" transversalement formelles dans lesquelles le feuilletage est donné par la 1-forme

$$(n\, z_1 + \lambda\, z_2^n)\, dz_2 \;-\; z_2 dz_1\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad n \geq 2.$$

Lorsque λ est non-nul, $\{z_2 = 0\}$ est l'unique séparatrice. Cette courbe correspond au diviseur, qui est lisse au point m. La réduction se fait par une chaîne de n éclatements supplémentaires. Elle crée $n-1$ singularités de type selle et une singularité de type selle-nœud, située au point d'intersection de l'avant dernière composante et de la dernière composante créé, dont c'est l'unique singularité. L'holonomie de cette

[11] C'est à dire un élément du corps des fractions de l'anneau des germes, au point m, de fonctions transversalement formelles.

dernière composante est l'identité et ce selle-nœud est tangent-résonant, c.f. (3.1.2). Par contre, si $\lambda = 0$, le feuilletage se réduit encore par une chaîne de n éclatements faisant apparaître $n-1$ singularités de type selle, mais le dernier diviseur crée est dicritique, partout transverse au transformé strict du feuilletage. Nous appellerons une telle composante, *composante dicritique du troisième type.*

Signalons enfin que le coefficient λ et les n-jets au point m de z_1 et z_2 sont donnés algébriquement par le n-jet d'une 1-forme définissant le feuilletage au point m. Lorque λ est non-nul, on peut le choisir égal à 1, quitte à effectuer une homothetie. En particulier, la distinction entre les deux types de formes normales : $\lambda = 1$ ou bien $\lambda = 0$, est donnée par le n-jet du feuilletage le long du diviseur [12] .

Considérons les ensembles $\mathrm{Dic}^{(r)}(\underline{\mathcal{F}}_P)$, $r = 1, 2, 3$, des $t \in P$ tels que la réduction de $\mathcal{F}_P(t)$ admette une composante dicritique du type r, et notons $\mathrm{Dic}(\underline{\mathcal{F}}_P) := \cup_{r=1}^{3}\mathrm{Dic}^{(r)}(\underline{\mathcal{F}}_P)$. On déduit sans trop de peine de ce qui précède, les propriétés suivantes :

Proposition 3.3.4. — *Pour les feuilletages (non-dicritiques) de deuxième espèce, la pré-réduction des singularités est égale à la réduction des singularités.*

Théorème 3.3.5. — *Supposons la déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ à nombre de Milnor constant et supposons aussi* $\mathrm{Dic}(\underline{\mathcal{F}}_P) \neq P$. *Alors :*

1. $\mathrm{Dic}^{(2)}(\underline{\mathcal{F}}_P) \cup \mathrm{Dic}^{(3)}(\underline{\mathcal{F}}_P) \subset NR(\underline{\mathcal{F}}_P) - NPR(\underline{\mathcal{F}}_P)$
2. $\mathrm{Dic}^{(3)}(\underline{\mathcal{F}}_P) \subset \overline{\mathrm{Dic}^{(2)}(\underline{\mathcal{F}}_P)} = NR(\underline{\mathcal{F}}_P) - NPR(\underline{\mathcal{F}}_P)$
3. $NR(\underline{\mathcal{F}}_P) - NPR(\underline{\mathcal{F}}_P)$ *est ou bien vide, ou bien une union dénombrable de sous ensembles analytiques fermés de P de dimension $< dimP$ et* $\overline{NR(\underline{\mathcal{F}}_P) - NPR(\underline{\mathcal{F}}_P)}$ *est un sous-ensemble semi-analytique réel $\neq P$.*

Supposons, de plus, que la déformation $\underline{\mathcal{F}}_P(t)$ dépende algébriquement de t, i.e. existe une forme différentielle $\Omega := A(x,y;t)\,dx + B(x,y;t)\,dy$, avec $A(x,y;t)$, $B(x,y;t) \in \mathbb{C}[t]\,[[x,y]]$ qui définit $\underline{\mathcal{F}}_P(t)$ chaque fois que l'on fixe $t \in P$ proche de l'origine. Alors, dans les propriétés 1. et 2. ci-dessus, on peut remplacer les termes : "analytique" et "semi-analytique réel" par les termes "algébrique" et "semi-algébrique réel".

4. Équisingularité semi-locale

Fixons un feuilletage formel $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$, non-dicritique, donné par une 1-forme formelle à singularité isolée $\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$. Notons encore $E_{\mathcal{F}} : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ l'application de réduction de $\mathcal{F}$ ainsi que $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ le diviseur exceptionnel et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le transformé strict de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Donnée une déformation équiréductible $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ de paramètres $P := (\mathbb{C}^p, 0)$, nous noterons $E_{\underline{\mathcal{F}}_P} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times P$ l'application

[12] Deux formes formelles le long d'une courbe $\widetilde{\mathcal{D}}'$ *ont même l-jet le long de* $\widetilde{\mathcal{D}}'$ si elles diffèrent d'une forme à coefficients dans $\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{D}}'}^{l+1}$, où $\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{D}}'}$ désigne le faisceau des fonctions transversallement formelles le long de $\widetilde{\mathcal{D}}'$ qui s'annullent sur $\widetilde{\mathcal{D}}'$.

d'équiréduction de $\underline{\mathcal{F}}_P$, $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ le composé de $E_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ avec la projection canonique sur P, $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ le diviseur exceptionnel $E_{\underline{\mathcal{F}}_P}^{-1}(0\times P)$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ le transformé strict de $\mathcal{F}_P$ sur $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. Nous identifions encore $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ à la fibre de $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^{-1}(0)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ à l'intersection de cette fibre avec $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. Enfin fixons un recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, c.f. (1.4.2).

4.1. Equivalence semi-locale de déformations. — Considérons deux déformations $\underline{\mathcal{F}}_P$ et $\underline{\mathcal{F}}'_P$ de $\mathcal{F}$ transversalement formelles le long de $0\times P$.

Définition 4.1.1. — Nous disons que $\underline{\mathcal{F}}_P$ et $\underline{\mathcal{F}}'_P$ sont *semi-localement équivalentes*, en abrégé $\widehat{SL}$*-équivalentes* et nous notons $\underline{\mathcal{F}}_P \sim_{\widehat{SL}} \underline{\mathcal{F}}'_P$, si $\underline{\mathcal{F}}_P$ et $\underline{\mathcal{F}}'_P$ sont équiréductibles et si elles induisent des systèmes semi-locaux (2.3.4) formellement conjugués.

Explicitons cette définition. La relation $\underline{\mathcal{F}}_P \sim_{\widehat{SL}} \underline{\mathcal{F}}'_P$ signifie l'existence pour chaque $U\in\mathcal{U}$, d'un germe le long de U de difféomorphisme $\Psi_U : \left(\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}'_P}, U\right) \longrightarrow \left(\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}, U\right)$ transversalement formel le long de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}'_P}$, qui commute aux projections $\pi_{\underline{\mathcal{F}}'_P}$ et $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, vaut l'identité sur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ et conjugue les germes le long de U de $\widetilde{\mathcal{F}}'_P$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_P$.

Fixons une déformation équiréductible $\underline{\mathcal{F}}_P$. Nous pouvons exprimer comme un espace de cohomologie l'ensemble des classes formelles de déformations équiréductibles de $\mathcal{F}$, transversalement formelles le long de $0\times P$, qui sont $\widehat{SL}$*-modelées* sur $\underline{\mathcal{F}}_P$:

$$\widehat{Mod}\,(\underline{\mathcal{F}}_P) := \frac{\left\{\,\underline{\mathcal{F}}'_P \text{ déformation équiréductible de } \mathcal{F} \;/\; \underline{\mathcal{F}}_P \sim_{\widehat{SL}} \underline{\mathcal{F}}'_P\,\right\}}{\sim_{P,\,for}}\,,$$

où $\sim_{P,\,for}$ désigne comme en (2.2) la relation d'équivalence formelle entre déformations. La classe de conjugaison de $\underline{\mathcal{F}}'_P$ sera notée $\{\underline{\mathcal{F}}'_P\}$.

Considérons le faisceau $\widehat{\widehat{\mathcal{G}}} \simeq \widehat{\mathcal{G}}$ défini en (1.3.1) des germes aux points de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ de difféomorphismes transversalement formels le long de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, qui commutent avec $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ et valent l'identité sur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Soit $\widehat{Aut}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$ le sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{G}}$ formé des éléments qui laissent invariant $\widetilde{\mathcal{F}}_P$. Supposons l'équivalence $\underline{\mathcal{F}}_P \sim_{\widehat{SL}} \underline{\mathcal{F}}'_P$ satisfaite. Avec les notations précédentes, la collection $\Phi_{UV} := \Psi_U\circ\Psi_V^{-1}$, $U,V\in\mathcal{U}$, $U\cap V\neq\emptyset$, est une 1-cochaine à valeurs dans $\widehat{Aut}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)$. Elle définit un 1-cocycle $\left[\Psi_U\circ\Psi_V^{-1}\right] \in H^1\left(\mathcal{U}, \widehat{Aut}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)\right)$, noté $\left[\underline{\mathcal{F}}'_P\right]$. Soit $\underline{\mathcal{F}}''_P$ une autre déformation $\widehat{SL}$-équivalente à $\underline{\mathcal{F}}_P$. En interprétant la relation de cohomologie comme une relation de compatibilité de conjugaisons locales, on voit immédiatement :

$$\underline{\mathcal{F}}'_P \sim_{P,\,for} \underline{\mathcal{F}}''_P \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\underline{\mathcal{F}}'_P\right] = \left[\underline{\mathcal{F}}''_P\right].$$

On a ainsi une injection

$$\widehat{Mod}\,(\underline{\mathcal{F}}_P) \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}, \widehat{Aut}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)\right), \qquad \{\underline{\mathcal{F}}'_P\} \longmapsto \left[\underline{\mathcal{F}}'_P\right]. \tag{58}$$

***Théorème 4.1.2* (de réalisation)**. — *L'application (58) ci-dessus est bijective.*

Démonstration. — La méthode de construction est similaire à celle déjà utilisée pour montrer le théorème de réalisation (2.3.6). Soit $\mathcal{C} := (\Phi_{UV}) \in Z^1\Big(\mathcal{U},\, \widehat{Aut}\,(\underline{\mathcal{F}}_P)\Big)$. Appliquons l'assertion 5. du théorème de détermination finie (1.4.8) à l'arbre d'équi-réduction $\mathbb{A}[\underline{\mathcal{F}}_P]$ et au cocycle induit par $\mathcal{C}$ dans $Z^1\Big(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\widehat{\mathcal{G}}}\Big)$. Il existe le long de chaque $U \in \mathcal{U}$ un germe Φ_U de difféomorphisme transversalement formel et des germes de biholomorphismes $\widetilde{\Phi}_{UV}$ le long des intersections non-vides $U \cap V,\ U, V \in \mathcal{U}$, qui satisfont les relations de commutation avec $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, valent l'identité au dessus de 0 et tels que : $\Phi_{UV} = \Phi_U \circ \widetilde{\Phi}_{UV} \circ \Phi_V^{-1}$. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ la variété holomorphe obtenue en recollant par les biholomorphismes $\widetilde{\Phi}_{UV}$ des voisinages, dans $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, des ouverts $U \in \mathcal{U}$. Elle est naturellement munie d'un diviseur $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$, d'une submersion $\pi_{\mathcal{C}}$ sur P et d'un plongement $\sigma_{\mathcal{C}} : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$. D'après le lemme (1.4.5) elle est biholomorphe (au dessus de P) à la cime $\mathcal{M}'$ d'un arbre $\mathbb{A}'_P$ au dessus de P ; de plus $\mathbb{A}'_P(0)$ est l'arbre de réduction de $\mathcal{F}$. L'invariance de $\underline{\mathcal{F}}_P$ par Φ_{UV} donne

$$\widetilde{\Phi}^*_{UV}\left(\Phi_U{}^*\left(\underline{\mathcal{F}}_P\right)\right) = \Phi_V{}^*\left(\underline{\mathcal{F}}_P\right).$$

Cette égalité signifie que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est aussi munie d'un feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, transversalement formel le long de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ tel que $\sigma^*_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}\right) = \widetilde{\mathcal{F}}$. On obtient ainsi sur $\mathcal{M}'$ un feuilletage transversalement formel le long du diviseur exceptionnel qui est une déformation de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Son image directe, cf. (2.1.2), (2.1.6), sur $\mathbb{C}^2 \times P$ est, par construction, une déformation de $\mathcal{F}$ qui est $\widehat{SL}$-équivalente à $\underline{\mathcal{F}}_P$. □

Remarque 4.1.3. — A priori tout ce qui précède semble dépendre du choix du recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$. Cela n'est pas gênant : tout d'abord, pour ce qui nous intéresse dans ce travail, nous pouvons fixer $\mathcal{U}$; d'autre part nous aurions pu définir la notion de $\widehat{SL}$-équivalence ainsi que l'espace de cohomologie associé en passant à la limite sur l'ensemble des recouvrements distingués de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ (qui forme clairement un système inductif). Mais cette précaution est superflue. Il est en effet possible de démontrer que, si les transformés stricts de deux déformations équiréductibles de $\mathcal{F}$ sont formellement conjugués au voisinage d'un élément U de $\mathcal{U}$, alors ils le sont aussi au voisinage de tout élément U' d'un recouvrement distingué $\mathcal{U}'$ tel que $U \subset U'$. Il en est de même pour des intersections d'ouverts de recouvrements distingués.

4.2. Déformations $\widehat{SL}$-équisingulières. — Notons $\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}$ la déformation constante de $\mathcal{F}$ de paramètres P définie en (32), c'est à dire la déformation définie par $a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$, considérée comme 1-forme transversalement formelle le long de $0 \times P$ dans $\left(\mathbb{C}^2 \times P, 0\right)$. C'est évidemment une déformation équiréductible et l'application d'équiréduction $E_{\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}}$ est le produit $E_{\mathcal{F}} \times Id_P : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \times P \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times P$ de l'application de réduction de $\mathcal{F}$ par l'identité de P. Rappelons qu'une déformation est dite *formellement triviale* si elle est formellement conjuguée à $\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}$.

Définition 4.2.1. — Une déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ transversalement formelle le long de $0 \times P$ est dite $\widehat{SL}$*-équisingulière* si elle est équiréductible et $\widehat{SL}$-équivalente à $\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}$.

La proposition (4.1.2) donne l'identification.

$$\widehat{Mod}\left(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\right) \xrightarrow{\sim} H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\right)\right), \tag{59}$$

Un germe de $\widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\right)$ s'interprète comme un (germe de) famille Φ_t de difféomorphismes de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, transversalement formels le long de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, qui laissent invariant le feuilletage réduit $\widetilde{\mathcal{F}}$ et telle que Φ_0 soit l'identité. Aussi nous adopterons souvent la notation $(\Phi_{W,\,t})_t$ pour les sections de $\widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\right)$ sur un ouvert W de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$.

Lemme 4.2.2. — *Soient $\underline{\mathcal{F}}_{P_1}$ et $\underline{\mathcal{F}}_{P_2}$ deux déformations $\widehat{SL}$-équisingulières de $\mathcal{F}$ de paramètres $P_j := (\mathbb{C}^{p_j}, 0)$, $j = 1, 2$. Il existe alors une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_{P_1\times P_2}$ de $\mathcal{F}$ de paramètres $P_1 \times P_2$ qui est conjuguée à $\underline{\mathcal{F}}_{P_1}$, respectivement à $\underline{\mathcal{F}}_{P_2}$ lorsqu'on restreint l'espace des paramètres à $P_1 \times 0$, respectivement à $0 \times P_2$.*

Démonstration. — Notons $\left(\Phi^j_{UV,\,t_j}\right) \in Z^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_{P_j}^{cst}\right)\right)$ un cocycle associé à $\underline{\mathcal{F}}_{P_j}$, par la bijection (59), $j = 1\,, 2$. Le recouvrement $\mathcal{U}$ n'ayant pas d'intersection 3 à 3 non-triviale, les "composés" $\Phi^1_{UV,\,t_1} \circ \Phi^2_{UV,\,t_2}$, $U \cap V \neq \emptyset$, définissent un élément de $Z^1\left(\mathcal{U},\, \widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_{P_1\times P_2}^{cst}\right)\right)$. La proposition (4.1.2) donne la déformation cherchée. □

Ce lemme, qui peut s'interpréter comme une propriété d'irréductibilité de l'espace des déformations $\widehat{SL}$-équisingulières, est essentiel dans la démonstration du théorème de versalité (4.6.3).

4.3. Champs basiques, champs transverses. — Un champ de vecteurs de $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ transversalement formel le long d'un ouvert de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ sera appelé ici *basique pour* $\underline{\mathcal{F}}_P$ s'il est tangent à $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ et si son flot laisse le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ invariant. Les germes de tels champs forment un faisceau de base $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ que nous notons $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$. Désignons par $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ le sous-faisceau de $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ des germes de champs de vecteurs *basiques verticaux*, c'est à dire basiques et qui annulent l'application tangente $T\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. Désignons aussi par $\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ le sous-faisceau de $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ des champs verticaux tangents à $\widetilde{\mathcal{F}}_P$. Ce dernier est un faisceau de modules cohérenr, en fait localement libre de rang 1, sur le faisceau d'anneaux $\widehat{\underline{\mathcal{O}}}^{\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}$, de base $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, des germes de fonctions transversalement formelles le long de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, cf. (24). Ce n'est plus le cas de $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ qui possède seulement une structure de faisceau de $\pi^*_{\underline{\mathcal{F}}_P}(\mathcal{O}_P)$-modules.

Définition 4.3.1. — Nous appelons *champ transverse* [13] de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ toute section du faisceau $\widehat{\underline{\mathcal{T}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ qui est défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow \widehat{\underline{\mathcal{B}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow \widehat{\underline{\mathcal{T}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow 0\,. \tag{60}$$

Nous notons $\{X\}$ la section de $\widehat{\underline{\mathcal{T}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ définie par une section X de $\widehat{\underline{\mathcal{B}}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$.

[13] Appelé aussi *symétrie transverse* dans [**10**].

Restreignons la base de ces faisceaux à $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, en d'autres termes considérons les faisceaux

$$\widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} := i^{-1}\left(\underline{\widehat{\mathcal{B}}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right), \qquad \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} := i^{-1}\left(\underline{\widehat{\mathcal{X}}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right),$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} := i^{-1}\left(\underline{\widehat{\mathcal{T}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right), \qquad \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}} := i^{-1}\left(\underline{\widehat{\mathcal{O}}}^{\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}\right),$$

où $i : \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ est l'application d'inclusion.

Explicitons les fibres de ces faisceaux en un point $m \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ où le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ est régulier. Fixons des coordonnées transversalement formelles z_1 , z_2 , $t_1, \ldots, t_p$ dans lesquelles $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ est défini par le champ $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$, $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ par $z_2 = 0$ et $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P} = (t_1, \ldots, t_p)$. Alors les éléments de $\widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P, m}$ sont les germes de champs transversalement formels (en la variable z_2) qui s'écrivent

$$\alpha(z_1, z_2, t_1, \ldots, t_p)\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \beta(z_2, t_1, \ldots, t_p)\, z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{61}$$

et $\widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P, m}$ est le $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}, m}$-module libre de base $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$. On voit ainsi que, si la coordonnée z_2 est définie sur un ouvert W de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} - Sing(\widetilde{\mathcal{F}})$, i.e. $z_2 \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}(W)$, alors l'application de restriction $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(W) \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P, m}$ est surjective. D'où :

Proposition 4.3.2. — *Sur l'ouvert $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} - Sing\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ le faisceau $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ est localement constant. En particulier, donnés deux ouverts U et W de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, $W \subset U$, dont les groupes fondamentaux en un point de base $m \in W$ satisfont $\pi_1(W; m) = \pi_1(U; m)$ et tels que $(U - W) \cap Sing\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) = \emptyset$, alors, toute section de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ sur W se prolonge de manière unique en une section de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ sur U .*

Lemme 4.3.3. — *Soit W un ouvert d'une composante irréductible D de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, $W \neq D$. Alors l'application canonique $\widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(W) \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(W)$ est surjective.*

Démonstration. — Visiblement $\widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}$-modules localement libre de rang 1. A l'aide de la suite exacte de cohomologie associée à (60) il suffit de prouver que $H^1\left(W\,;\, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}\right)$ est nul. La restriction de $\underline{\widehat{\mathcal{O}}}^{\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}_{\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}}$ à tout voisinage de Stein V de W dans $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ est isomorphe à ${\mathcal{O}_V}^{\mathbb{N}}$ d'après les écritures (25) et (26). La conclusion résulte de la cohérence de $\mathcal{O}_V$ et de l'existence d'un système fondamental de voisinages de Stein de W dans $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. □

Proposition 4.3.4. — *La suite exacte (60) associée au recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ induit une suite exacte longue*

$$\begin{array}{lllllll} 0 \longrightarrow & H^0\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \longrightarrow & H^0\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \longrightarrow & H^0\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \\ \quad \xrightarrow{\delta_0} & H^1\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \longrightarrow & H^1\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \longrightarrow & H^1\left(\mathcal{U}\,;\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) & \xrightarrow{\delta_1} 0 \end{array}$$

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant dont les lignes sont exactes d'après le lemme ci dessus :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \prod\limits_{U\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) & \longrightarrow & \prod\limits_{U\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) & \longrightarrow & \prod\limits_{U\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{T}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \prod\limits_{U,V\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U\cap V) & \longrightarrow & \prod\limits_{U,V\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U\cap V) & \longrightarrow & \prod\limits_{U,V\in\mathcal{U}} \widehat{\mathcal{T}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U\cap V) & \longrightarrow & 0
\end{array}\,.$$

Comme le recouvrement $\mathcal{U}$ est sans intersection trois à trois, la suite du serpent de ce diagramme correspond à la suite longue de cohomologie de la proposition. □

Pour simplifier le texte désignons ici par $\mathcal{N}_P$ l'un des trois faisceaux

(62) $$\widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\,, \qquad \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\,, \qquad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\,.$$

Faisons varier $\mathcal{W}$ dans le système inductif de tous les recouvrements distingués de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$.

Proposition 4.3.5. — *Chaque application canonique de $H^1(\mathcal{U}\,;\mathcal{N}_P)$ dans $\varinjlim_{\mathcal{W}} H^1(\mathcal{W}\,;\mathcal{N}_P)$ est bijective.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas $\mathcal{N}_P = \widehat{\mathcal{X}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$. On a vu dans la démonstration du lemme (4.3.3) que tout recouvrement distingué est acyclique pour ce faisceau. On conclut par le théorème de Leray. Le cas $\mathcal{N}_P = \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ est une conséquence directe de la proposition (4.3.2). Enfin le cas $\mathcal{N}_P = \widehat{\mathcal{B}}^{v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ s'obtient par passage à la limite inductive des suites exactes longues (4.3.4). □

Lorsque P est réduit à $\{0\}$ on a $\underline{\mathcal{F}}_P = \mathcal{F}$ et les faisceaux (62) sont constitués de champs de vecteurs transversalement formels sur $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Nous les notons

(63) $$\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\,, \qquad \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\,, \qquad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\,,$$

et désignons par $\mathcal{N}_0$ l'un quelconque de ces faisceaux. Pour une déformation $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_P$ avec P quelconque, la restriction $X|\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ d'une section X d'un des faisceaux $\mathcal{N}_P$ de (62) à $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ est une section du faisceau $\mathcal{N}_0$ correspondant. La trivialité locale de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ implique que, pour tout ouvert W contenu dans un ouvert U du recouvrement distingué $\mathcal{U}$, les applications $\mathcal{N}_P(W) \longrightarrow \mathcal{N}_0(W)$, $X \longmapsto X|\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ sont surjectives. Ainsi, (t) désignant l'idéal maximal de $\mathcal{O}_P$, les morphismes de faisceaux et les morphismes de $\mathcal{O}_P$-modules

(64) $$\mathcal{N}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t) \longrightarrow \mathcal{N}_0\,, \qquad \mathcal{N}_P(W) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t) \longrightarrow \mathcal{N}_0(W)\,,$$

$W \subset U \in \mathcal{U}$, donnés par $X \otimes f(t) \longmapsto f(0)\cdot X|\,\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes.

Proposition 4.3.6. — *Les applications canoniques*

$$H^1(\mathcal{U}\,;\mathcal{N}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t)) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}\,;\mathcal{N}_P) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — Comme $\mathcal{U}$ est sans intersection non-triviale 3 à 3, on a la suite exacte

$$\prod_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{N}_P(U) \longrightarrow \prod_{\substack{U,V\in\mathcal{U}\\ U\cap V\neq\emptyset}} \mathcal{N}_P(U\cap V) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}\,;\mathcal{N}_P) \longrightarrow 0\,.$$

La conclusion résulte de l'exactitude à droite de $\otimes_{\mathcal{O}_P}\mathcal{O}_P/(t)$ et des isomorphismes (64). ☐

Au chapitre suivant nous étudierons en détail les faisceaux (63) et leurs cohomologies.

4.4. Vitesses de déformation. — Soit $\mathcal{Z}$ un élément du $\mathcal{O}_P$-module $\mathcal{X}_P$ des germes de champs de vecteurs sur $P := (\mathbb{C}^p, 0)$ et $\underline{\mathcal{F}}_P$ une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière de $\mathcal{F}$. Cette déformation étant triviale sur des voisinages dans $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ de chaque ouvert $U\in\mathcal{U}$, le champ $\mathcal{Z}$ se relève suivant $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ sur ces voisinages, en des champs basiques $\mathcal{Z}_U\in\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)$, i.e. $T\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}\cdot\mathcal{Z}_U = \mathcal{Z}\circ\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. Les différences $\mathcal{Z}_{UV} := \mathcal{Z}_V - \mathcal{Z}_U$, $U\cap V\neq\emptyset$, sont des champs basiques verticaux. Le cocycle $(\mathcal{Z}_{UV})\in Z^1\Big(\mathcal{U}\,;\widehat{\mathcal{B}}^{\,v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\Big)$ dépend du choix des relèvements, mais sa classe de cohomologie n'en dépend pas.

Définition 4.4.1. — Nous appelons *application de Kodaira-Spencer de* $\underline{\mathcal{F}}_P$ l'application

$$\left[\frac{\partial\underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right] : \mathcal{X}_P \longrightarrow H^1\Big(\mathcal{U}\,;\widehat{\mathcal{B}}^{\,v}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\Big)\,,\quad \mathcal{Z}\longmapsto[\mathcal{Z}_{UV}]\,.$$

Un calcul direct montre que si $[\Phi_{UV,t}]\in H^1\Big(\mathcal{U},\,\widehat{Aut}\,\big(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\big)\Big)$ est la classe du cocycle associé à $\underline{\mathcal{F}}_P$ par (4.1.2), on a l'égalité

$$[\mathcal{Z}_{UV}] = \left[\frac{\partial\Phi_{UV,t}}{\partial t}\circ\Phi^{-1}_{UV,t}\cdot\mathcal{Z}\right]. \tag{65}$$

Par construction la classe $[\mathcal{Z}_{UV}]$ est exactement l'obstruction à l'existence d'un relèvement global de $\mathcal{Z}$ en un champ basique. Plus précisément le sous-module

$$\mathcal{K} := ker\left(\left[\frac{\partial\underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]\right)\ \subset\ \mathcal{X}_P$$

est exactement constitué des champs de vecteurs sur P qui possèdent un relevé global $\widetilde{\mathcal{Z}}\in H^0\Big(\mathcal{D}_{\mathcal{F}};\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\Big)$. On en déduit imédiatement :

Proposition 4.4.2. — *Une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_P$ est formellement triviale si et seulement si* $\left[\frac{\partial\underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]$ *est l'application identiquement nulle.*

Nous allons raffiner cette proposition et obtenir la trivialité de $\underline{\mathcal{F}}_P$ suivant les feuilles d'un feuilletage de P. Remarquons d'abord que $\mathcal{K}$ est un sous-module *involutif* de $\mathcal{X}_P$, i.e. stable par crochet de Lie. En effet le crochet de Lie commute aux images directes des champs de vecteurs (lorsqu'elles sont définies) et le crochet de deux champs basiques est aussi un champ basique. En général $\mathcal{K}$ n'est pas un sous-module libre de $\mathcal{X}_P$ et ses générateurs peuvent être singuliers à l'origine. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{K}(0)$ de l'espace tangent T_0P de P à l'origine, constitué des valeurs

[14] à l'origine des éléments de $\mathcal{K}$. Un résultat de D. Cerveau [**9**] donne l'existence d'un sous-module libre involutif de $\mathcal{K}$, non-unique, qui possède une base constituée de champs de vecteurs réguliers dont les valeurs à l'origine forment une base de $\mathcal{K}(0)$. Il définit un germe de feuilletage holomorphe régulier $\mathcal{H}$ sur P.

Lemme 4.4.3. — *Soit $P' \subset P$ un germe de sous-variété strictement transverse à $\mathcal{K}(0)$, i.e. $T_0P = T_0P' \oplus \mathcal{K}(0)$ et soit $\iota : P' \hookrightarrow P$ l'application d'inclusion. Notons $\underline{\mathcal{F}}_{P'}$ la déformation $\iota^*\underline{\mathcal{F}}_P$ obtenue en restreignant les paramètres (2.2) à P'. Alors il existe un germe de submersion $\lambda : P \longrightarrow P'$ telle que $\underline{\mathcal{F}}_P$ soit formellement conjugué à $\lambda^*\underline{\mathcal{F}}_{P'}$.*

Démonstration. — Le feuilletage $\mathcal{H}$ précédemment défini peut être engendré par des champs $\mathcal{Z}_j$, $j = 1, \ldots, r$, $r := dim\mathcal{K}(0)$, qui commutent entre eux. Ces champs admettent, sur un voisinage de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ dans $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$, des relèvements globaux en des champs basiques $\widetilde{\mathcal{Z}_j}$. L'intégration successive des $\mathcal{Z}_j$ avec conditions initiales sur P' donne une rectification $P \xrightarrow{\sim} P' \times \mathbb{C}^r$ de $\mathcal{H}$. Elle induit une submersion λ de P sur P' qui consiste à suivre les feuilles de $\mathcal{H}$. L'intégration successive des relevés $\widetilde{\mathcal{Z}_j}$ donne alors la conjugaison cherchée. □

4.5. Codimension formelle de $\mathcal{F}$. — En dérivant un cocycle $[\Phi_{UV,t}] \in H^1\left(\mathcal{U}, \widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}_P^{cst}\right)\right)$ associé par (58) à une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ on obtient des cocycles

$$\left(\frac{\partial \Phi_{UV,t}}{\partial t_j}\bigg|_{t=0}\right) \in Z^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right), \qquad j = 1, \ldots, p$$

à valeurs dans le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ des champs basiques de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Leurs classes de cohomologies notées

$$\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t_j}\right]_{t=0} \in H^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right), \quad j = 1, \ldots, p$$

ne dépendent que de $\underline{\mathcal{F}}_P$. Elles s'interprètent comme les "vitesses initiales de déformation" de $\underline{\mathcal{F}}_P$. Grâce à (65) et à l'identification $H^1\left(\mathcal{U}\,; \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \simeq H^1\left(\mathcal{U}\,; \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t)$ donnée par (4.3.6), l'application linéaire

$$\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]_{t=0} : T_0P \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}\,; \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right), \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \frac{\partial}{\partial t_j}\bigg|_{t=0} \longmapsto \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t_j}\right]_{t=0} \tag{66}$$

peut être vue comme le tensorisé de l'application de Kodaira-Spencer de $\underline{\mathcal{F}}_P$, c'est à dire :

$$\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right] \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t). \tag{67}$$

---

[14] Notons qu'en général $\mathcal{K}(0) \neq \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t)$, mais $\mathcal{K}(0)$ est l'image de $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t) \longrightarrow \mathcal{X}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P/(t) = T_0P$.

Remarquons enfin que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout germe d'application holomorphe $\lambda : \left(\mathbb{C}^k, 0\right) \longrightarrow P$, on a :

$$\left[\frac{\partial \lambda^* \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial s}\right]_{s=0} = \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]_{t=0} \circ \left.\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right|_{s=0} . \tag{68}$$

Définition 4.5.1. — On appelle *déformation $\widehat{SL}$-infinitésimale* de $\mathcal{F}$ tout élément de $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$.

On a la propriété de réalisation suivante :

Théorème de réalisation 4.5.2. — *Données des déformations $\widehat{SL}$-infinitésimales $v_1, \ldots, v_q \in H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$, il existe une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_Q$ de $\mathcal{F}$ de paramètres $Q := (\mathbb{C}^q, 0)$ telle que $\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_Q}{\partial t_j}\right]_{t=0} = v_j$, $j = 1, \ldots, q$.*

Démonstration. — Soient $\left(X^j_{UV}\right) \in Z^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$ tels que $v_j = \left[X^j_{UV}\right]$, $j = 1, \ldots, q$. Les composés $\Phi_{UV,\,t} := \Phi^1_{UV,\,t_1} \circ \cdots \circ \Phi^q_{UV,\,t_q}$ des flots $\Phi^j_{UV,\,s}$ des X^j_{UV} définissent un cocycle à valeurs dans $\widehat{Aut}\left(\underline{\mathcal{F}}^{cst}_Q\right)$. Il définit par la bijection (59) une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière qui convient. $\square$

Définition 4.5.3. — Un feuilletage formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par une 1-forme différentielle formelle ω est dit *de type formel fini*, en abrégé t.f.f., si ω est non-dicritique, à singularité isolée et $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Sa dimension, notée $\widehat{\beta}(\mathcal{F})$ ou encore $\widehat{\beta}(\omega)$ est appelée *codimension formelle de $\mathcal{F}$, ou de ω*.

Nous caractériserons plus loin les feuilletages t.f.f. par des conditions combinatoires sur l'arbre dual de réduction de $\mathcal{F}$ que l'on a enrichi d'un nombre fini de données supplémentaires. Auparavant comparons $\widehat{\beta}\,(\mathcal{F})$ aux nombres

$$\widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\, H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\tau}\,(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\, H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) . \tag{69}$$

Une version formelle d'un résultat de [**20**] dont la démonstration se transcrit littéralement, donne la formule

$$\widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) \;=\; \sum_c \frac{(\nu_c - 1)\,(\nu_c - 2)}{2} , \tag{70}$$

où dans cette somme, c décrit l'ensemble $\sqcup_{j=0}^h \Sigma^j_{\mathcal{F}}$ de tous les points singuliers (y compris $0 \in \mathbb{C}^2$) qui apparaissent dans le processus de réduction de $\mathcal{F}$, cf. (42) et où ν_c désigne la multiplicité algébrique de transformé strict du feuilletage au point c. Signalons que cette formule est valable en toute généralité, même si $\mathcal{F}$ est dicritique.

Rappelons [**10**] qu'une *intégrale première formelle*, resp. un *facteur intégrant formel* de $\mathcal{F}$, ou de ω, est un élément f de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}$ tel que

$$df \wedge \omega = 0\,, \quad \text{resp.} \quad d(\omega/f) = 0\,. \tag{71}$$

Le quotient de deux facteurs intégrants est une *intégrale première méromorphe formelle* de ω, c'est à dire un élément f du corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}$ satisfaisant $df \wedge \omega = 0$. Enfin si X est un champ de vecteurs formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ qui est *basique pour* $\mathcal{F}$, ie. $L_X\omega \wedge \omega = 0$, et non-tangent, alors $\omega \cdot X$ est un facteur intégrant de $\mathcal{F}$.

Notons $\widehat{Int}\,(\omega)$ le sous-espace vectoriel de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}$ des facteurs intégrants formels qui s'annulent sur les séparatrices formelles $\widehat{Sep}\,(\omega)$ de ω, cf. (3.1.8), et $\widehat{\mathcal{B}}(\omega) \subset \widehat{\mathcal{X}}_{\mathbb{C}^2,0}$ le sous-espace vectoriel du module des champs formels à l'origine de $\mathbb{C}^2$ qui sont basiques pour ω. On a la

Proposition 4.5.4. — *Supposons $\mathcal{F}$ non-dicritique. Alors $\widehat{\beta}(\mathcal{F})$ est fini si et seulement si $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$ est fini. De plus on a l'inégalité :*

$$\widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) \;+\; \widehat{\tau}\,(\mathcal{F}) \;-\; \widehat{\varepsilon}\,(\mathcal{F}) \;\leq\; \widehat{\beta}\,(\mathcal{F}) \;\leq\; \widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) \;+\; \widehat{\tau}\,(\mathcal{F})\;,$$

avec $\widehat{\varepsilon}\,(\mathcal{F}) \;:=\; dim_{\mathbb{C}}\left(\widehat{Int}\,(\omega) \Big/ \left(\omega \cdot \widehat{\mathcal{B}}(\omega)\right)\right)$. *Lorsque $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce, l'égalité*

$$\widehat{\beta}\,(\mathcal{F}) = \widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) + \widehat{\tau}\,(\mathcal{F}) - \widehat{\varepsilon}\,(\mathcal{F})$$

est réalisée et $\widehat{\varepsilon}(\mathcal{F}) = 0$ ou 1.

Démonstration. — La suite exacte longue (4.3.4) donne

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow 0 \tag{72}$$

avec $N \;:=\; coker\left(H^0\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow H^0\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)\right)$. Remarquons que $H^0\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$ s'identifie à $\widehat{\mathcal{B}}(\omega)$. En effet tout champ de vecteurs holomorphe global sur un voisinage de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ est l'image réciproque d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{C}^2, 0)$; la commutation des opérations de complétion et d'image directe [**1**, page 269] étend ce fait aux champs formels. De même l'évaluation par $E_{\mathcal{F}}^*\,(\omega)$ induit une injection

$$0 \longrightarrow H^0\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow \widehat{Int}\,(\omega)\,. \tag{73}$$

La formule d'Euler de la suite (72) donne l'inégalité cherchée.

Supposons maintenant $\mathcal{F}$ de deuxième espèce. Il suffit de montrer que l'injection ci-dessus est un isomorphisme. Pour cela donnons nous un facteur intégrant $f \in \widehat{Int}\,(\omega)$ et montrons l'existence en tout point $m \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ d'un germe $X_m \in \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m}$ tel que $E_{\mathcal{F}}^*\,(\omega) \cdot X_m = f \circ E_{\mathcal{F}}$.

Lorsque $\widetilde{\mathcal{F}}$ est régulier en m, fixons des coordonnées transversalement formelles $z_1,\, z_2$ appropriées où $E_{\mathcal{F}}^*\,(\omega) = u(z_1, z_2)\, {z_2}^{\alpha}\, dz_2$, avec $u(0,0) \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. Les deux facteurs intégrants $u(z_1,z_2)\,{z_2}^{\alpha}$ et $f\circ E_{\mathcal{F}}$ de $E^*_{\mathcal{F}}(\omega)$ diffèrent d'un facteur multiplicatif qui est une intégrale première formelle méromorphe, ce qui donne :

$$f\circ E_{\mathcal{F}} = u(z_1,z_2)\,{z_2}^{\beta}\,l\,(z_2)\,,\quad \text{avec}\quad l\,(z_2)\in\mathbb{C}[[z_2]]\,,\quad l\,(0)\neq 0\,,\quad \beta\in\mathbb{Z}\,.$$

Par hypothèse f est une équation (non-nécessairement réduite) de $\widehat{Sep}\,(\omega)$. La caractérisation (3.1.9) des feuilletages de deuxième espèce donne $\beta\geq\alpha+1$. Le champ $X_m := l\,(z_2)\,{z_2}^{\beta-\alpha}\,\dfrac{\partial}{\partial z_2}$ est basique et convient.

Lorsque m est un point singulier de $\widetilde{\mathcal{F}}$ il existe d'après (3.1.3) des coordonnées transversalement formelles z_1, z_2 dans lesquelles $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ est défini par un monôme et $E^*_{\mathcal{F}}(\omega)$ s'écrit $u(z_1,z_2)\,z_1^{\alpha}z_2^{\beta}\,\widetilde{\omega}$, $u(0,0)\neq 0$, où $\widetilde{\omega}$ est l'une des formes normales 1. à 4. de (3.1). On voit facilement sur ces expressions qu'il existe toujours un germe $Z_m\in\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m}$ non-tangent au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. Cela sera explicité en détail au paragraphe suivant. Ainsi $h := u(z_1,z_2)\,z_1^{\alpha}z_2^{\beta}\,\widetilde{\omega}(Z_m)$ est un facteur intégrant de $E^*_{\mathcal{F}}(\omega)$. Si $\widetilde{\mathcal{F}}$ ne possède pas au point m de germe d'intégrale première formelle non-constante, on a $f\circ E_{\mathcal{F}} = c\,h$, $c\in\mathbb{C}$ et le champ $X_m := c\,Z_m$ convient. Sinon $\widetilde{\omega}$ s'écrit $q\,z_1\,dz_2 + p\,z_2\,dz_1$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*$ et $(p,q)=1$. Alors $\mathbb{C}[[z_1^p z_2^q]]$ est l'anneau des germes en m d'intégrales premières formelles cf. [**22**]. Visiblement le champ radial $R_m := z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}$ est basique et non-tangent. Il vient $f\circ E_{\mathcal{F}} = l\,(z_1^p z_2^q)\,h(z_1,\,z_2)$, où, comme précédemment, l est une série formelle d'une variable car $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce. Le champ $X_m := l\,(z_1^p z_2^q)\,h(z_1,\,z_2)\,R_m$ convient.

Il reste à prouver que $\widehat{\varepsilon}(\mathcal{F})$ vaut 0 ou 1. Visiblement que $\widehat{Int}\,(\omega)$ est un module libre de rang 1 sur l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}$ des germes à l'origine de $\mathbb{C}^2$, d'intégrales premières formelles de $\mathcal{F}$. De même $\omega\cdot\widehat{\mathcal{B}}(\omega)$ est un sous $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}$-module. Ainsi, le résultat est trivial quand $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}=\mathbb{C}$.

Lorsque w possède une intégrale première formelle non-constante f dont la décomposition en facteurs irréductibles est ${f_1}^{n_1}\cdots {f_p}^{n_p}$, elle s'écrit

$$\omega = u\,f_1\cdots f_p\left(n_1\frac{df_1}{f_1}+\cdots+n_p\frac{df_p}{f_p}\right)\qquad u\in\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}\,,\quad u(0,0)\neq O$$

et $g := f_1\cdots f_p$ est une équation réduite de $\widehat{Sep}(\omega)$. Ainsi $\widehat{Int}\,(\omega) = \mathbb{C}[[f]]\,ug$. On voit facilement que g appartient à l'idéal $I(\omega)$ engendré par les coefficients de ω si et seulement si f est *quasi-homogène*, i.e. $f\in I(df)$. Lorsque c'est le cas on obtient un champ X tel que $\omega\cdot X = ug$ et $\widehat{\varepsilon}(\mathcal{F})=0$. Si f n'est pas quasi-homogène, $ug\notin\omega\cdot\widehat{\mathcal{B}}(\omega)$ et $\widehat{\varepsilon}(\mathcal{F})\neq 0$. Mais le théorème de Briançon [**4**] assure que l'on peut résoudre l'équation $df\cdot X = f^2$. Il vient $\omega\cdot X = ugf$ et $\omega\cdot\widehat{\mathcal{B}}(\omega) = (f^2)\cdot ug$. D'où $\widehat{\varepsilon}(\mathcal{F})=1$. □

4.6. Déformations $\widehat{SL}$-verselles. — Dans cette partie nous montrons, sous une condition générique sur le feuilletage -$\mathcal{F}$ bon- un théorème de versalité pour les déformations $\widehat{SL}$-équisingulières.

Définition 4.6.1. — Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est *bon* s'il existe, soit une singularité m du transformé strict $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, soit une composante irréductible D du diviseur $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, telle que au voisinage de m, ou le long de $D^* := \Big(D - Sing(\widetilde{\mathcal{F}}) \cap D\Big)$, toute intégrale première transversalement formelle est constante : $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F},m} = \mathbb{C}$, ou $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(D^*) = \mathbb{C}$.

Remarquons que la condition $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(D^*) = \mathbb{C}$ équivaut à la non-finitude du groupe d'holonomie H_D de la composante D, défini en (2.1.7).

Fixons une déformation $\underline{\mathcal{F}}_Q$ de $\mathcal{F}$ de paramètres $Q := (\mathbb{C}^q, 0)$, $q \in \mathbb{N}$, transversalement formelle le long de $0 \times Q$ et $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière, donnée par une forme différentielle formelle

$$\overline{\omega} := a(x, y;\, u)\, dx + b(x, y;\, u)\, dy\,.$$

Définition 4.6.2. — Nous disons que $\underline{\mathcal{F}}_Q$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$*-verselle* si pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute déformation $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$ de paramètres $P := (\mathbb{C}^p, 0)$, transversalement formelle le long de $0 \times P$ et $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière, il existe un germe d'application holomorphe $\lambda : P \longrightarrow Q$ tel que $\underline{\mathcal{F}}_P$ soit formellement conjuguée à $\lambda^*\underline{\mathcal{F}}_Q$. Lorsque $Q = \{0\}$ et $\underline{\mathcal{F}}_Q$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$-verselle, nous dirons que $\mathcal{F}$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$*-stable*.

En d'autres termes, $\underline{\mathcal{F}}_Q$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$-verselle si toute déformation formelle $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière de $\mathcal{F}$ est définie par une 1-forme qui s'écrit $\Phi^*\left(a(x, y;\, \lambda(t))\, dx + B(x, y;\, \lambda(t))\, dy\right)$, où $\Phi(x, y; t) = (\underline{\Phi}(x, y;\, t);\, t)$ est un difféomorphisme de $\left(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p, 0\right)$ transversalement formel le long de $0 \times \mathbb{C}^p$. En particulier la $\widehat{\mathcal{SL}}$-stabilité signifie que tout déformation $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière de $\mathcal{F}$ est formellement triviale.

Théorème de versalité 4.6.3. — *Supposons $\mathcal{F}$ bon. Lorsque $Q \neq \{0\}$, la déformation $\underline{\mathcal{F}}_Q$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$-verselle si et seulement si les "vitesses initiales de déformation"*

$$\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_Q}{\partial u_1}\right]_{u=0}, \ldots, \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_Q}{\partial u_q}\right]_{u=0}, \qquad u = (u_1, \ldots, u_q)\,, \tag{74}$$

forment un système de générateurs de $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. D'autre part $\mathcal{F}$ est $\widehat{\mathcal{SL}}$-stable si et seulement si $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) = 0$.

Un ingrédient essentiel de la démonstration de ce résultat est le théorème ci-dessous. Nous le démontrerons au paragraphe (5.6)

Théorème de préparation 4.6.4. — *Supposons $\mathcal{F}$ bon et t.f.f.. alors, pour toute déformation $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_P$ de $\mathcal{F}$, le $\mathcal{O}_P$-module $H^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est de type fini. Si de plus $\mathcal{F}$ ne possède pas de facteur intégrant formel, alors $H^1\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est un $\mathcal{O}_P$-module libre de rang $\widehat{\beta}(\mathcal{F})$.*

Démonstration du théorème de versalité.. — Supposons que les cocycles (74) engendrent $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. Soit $\underline{\mathcal{F}}_P$ une déformation $\widehat{\mathcal{SL}}$-équisingulière de $\mathcal{F}$. Donnons-nous grâce au lemme (4.2.2) une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_{P\times Q}$ de paramètres $P\times Q$, qui est conjuguée à $\underline{\mathcal{F}}_P$ lorsqu'on restreint les paramètres à $P\times 0$ et qui est conjuguée à $\underline{\mathcal{F}}_Q$ lorsqu'on restreint les paramètres à $0\times Q$. Pour alléger le texte notons :

$$\Delta \;:=\; \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_{P\times Q}}{\partial(t;u)}\right] \;:\; \mathcal{X}_{P\times Q} \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_{P\times Q}}\right) \qquad \text{et}$$

$$\Delta_0 \;:=\; \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_{P\times Q}}{\partial(t;u)}\right]_{t=0\,,u=0} \;:\; T_{(0;\,0)}P\times Q \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)\,.$$

Par (67), Δ_0 est surjective et son noyau est transverse à $0\times T_0Q$. On déduit de (67) l'égalité : $coker\,(\Delta)\otimes_{\mathcal{O}_{P\times Q}}(\mathcal{O}_{P\times Q}/\mathfrak{m}) \;=\; 0$, où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{P\times Q}$. D'après le théorème (4.6.4) de préparation $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_{P\times Q}}\right)$ - et à fortiori $coker\,(\Delta)$, est un $\mathcal{O}_{P\times Q}$ module de type fini. Le lemme de Nakayama appliqué à $coker\,(\Delta)$ donne la surjection de $\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_{P\times Q}}{\partial(t;u)}\right]$. En tensorisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{X}_{P\times Q} \xrightarrow{\Delta} H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_{P\times Q}}\right) \longrightarrow 0$$

par $\otimes_{\mathcal{O}_{P\times Q}}(\mathcal{O}_{P\times Q}/\mathfrak{m})$, on obtient $\mathcal{K}(0) \;=\; ker(\Delta_0)$, avec :

$$\mathcal{K}(0) \;:=\; \{\,\mathcal{Z}(0)\,|\,\mathcal{Z}\in\mathcal{K}\} \;=\; Im\left(\alpha\otimes_{\mathcal{O}_{P\times Q}}(\mathcal{O}_{P\times Q}/\mathfrak{m})\right)\,.$$

Le lemme (4.4.3) donne une submersion $\Lambda : P\times Q \longrightarrow Q$ telle que $\underline{\mathcal{F}}_{P\times Q}$ est formellement conjugué à $\Lambda^*\underline{\mathcal{F}}_Q$. On obtient la factorisation cherchée en restreignant Λ à $P\times 0$.

Réciproquement, supposons que la déformation $\underline{\mathcal{F}}_Q$ est $\widehat{SL}$-verselle et donnons-nous une déformation infinitésimale $v\in H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. D'après le théorème de réalisation (4.5.2) il existe une déformation $\widehat{SL}$-équisingulière $\underline{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ de base $(\mathbb{C},\,0)$ telle que $v = \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}}{\partial t}\right]_{t=0}$. a équivalence près on peut poser $\underline{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} \;=\; \lambda^*\underline{\mathcal{F}}_Q$, avec $\lambda := (\lambda_1,\ldots,\lambda_q) : (\mathbb{C},\,0) \longrightarrow Q$ holomorphes. Par (68) et (66) on obtient :

$$v \;=\; \sum_{j=1}^{q} \frac{d\lambda_j}{dt}(0)\cdot\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_Q}{\partial u_j}\right]_{u=0}\,,$$

d'où la conclusion.

Remarquons enfin que ces démonstrations s'adaptent au cas $Q=\{0\}$. Elles prouvent alors que $\mathcal{F}$ est stable si et seulement si $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)=0$. $\square$

Le théorème de versalité, joint au théorème de réalisation (4.5.2) donne immédiatement :

Théorème 4.6.5. — *Tout feuilletage $\mathcal{F}$ bon et de type formel fini possède une déformation $\widehat{SL}$-verselle $\underline{\mathcal{F}}_P$, telle que l'application*

$$\left[\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}_P}{\partial t}\right]_{t=0} : T_0P \longrightarrow H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \tag{75}$$

définie en (66) est un isomorphisme.

5. Caractérisation des singularités t.f.f.

5.1. Description du faisceau $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$. — Rappelons d'abord quelques résultats de classification formelle des sous-groupes de type fini H du groupe $\widehat{Diff}(\mathbb{C},0)$ des difféomorphismes formels de $(\mathbb{C},0)$, cf. [**27**] ou [**14**]. Nous notons $\widehat{\mathcal{O}}_H \subset \mathbb{C}[[z]]$ l'anneau des séries formelles invariantes par l'action à droite $g \star h := h \circ g^{-1}$ de H sur $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C},0} = \mathbb{C}[[z]]$. Les éléments de $\widehat{\mathcal{O}}_H$ sont appelés *intégrales premières de H*. De même un champ de vecteurs formel qui s'annule à l'origine et qui est invariant par l'action (de conjugaison) de H est appelé *symétrie formelle de H*. L'espace de ces champs est noté $\widehat{\mathcal{T}}_H$. On a :

1. $\widehat{\mathcal{T}}_H$ est soit nul, soit un $\widehat{\mathcal{O}}_H$-module libre de rang 1 ;
2. H est fini, $\#H =: p$, si et seulement si il existe $f \in \widehat{\mathcal{O}}_H$ non-constante. Dans ce cas, il existe une coordonnée formelle $\widetilde{z}$ telle que H est engendré par la rotation $e^{2i\pi/p}\,\widetilde{z}$. On a alors nécessairement : $\widehat{\mathcal{O}}_H = \mathbb{C}[[\widetilde{z}^p]]$, $\widehat{\mathcal{T}}_H = \widehat{\mathcal{O}}_H \widetilde{z}\dfrac{\partial}{\partial\omega} z$;
3. H est commutatif si et seulement si son action laisse invariant un champ de vecteurs formel $Z \in \mathbb{C}[[z]]z\dfrac{\partial}{\partial z}$ non-identiquement nul. Si de plus H est d'ordre infini, alors $\widehat{\mathcal{T}}_H = \mathbb{C}Z$.

Nous dirons qu'un couple $(f,Z) \in \widehat{\mathcal{O}}_H \times \widehat{\mathcal{T}}_H$ est *normalisé* si, avec la convention $\mathbb{C}[[1]] := \mathbb{C}$, il satisfait les relations de dualité :

$$\widehat{\mathcal{O}}_H = \mathbb{C}[[f]]\,, \quad \widehat{\mathcal{T}}_H = \mathbb{C}[[f]]\,Z\,, \quad \text{il existe } c \in \mathbb{C} \text{ tel que } df \cdot Z = c\,f\,. \tag{76}$$

Dans chacun des cas 1., 2., 3. l'existence de tels couples est claire.

Notons $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ le faisceau de base $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ des germes, aux points de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, des intégrales premières transversalement formelles de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Nous allons expliciter, pour les ouverts U du recouvrement distingué $\mathcal{U}$, les espaces $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)$ de sections du faisceau des champs transverses (4.3.1).

5.1.1. L'ouvert $U \in \mathcal{U}$ ne contient pas de singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}$. — Fixons un point m_0 sur U, ainsi qu'un germe de courbe T_{m_0} analytique ou formelle, lisse et transverse à U en m_0. Nous la munissons d'une coordonnée formelle $z \in \widehat{\mathcal{O}}_{T_{m_0}}$, $z(m_0) = 0$. D'après l'écriture (61) tout champ formel Z sur T_{m_0} qui s'annule en m_0 s'étend en un germe de champ basique en m_0, définissant un unique élément de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m_0}$. De plus tout élément de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m_0}$ est de ce type. ainsi $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m_0} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{T_{m_0}}\, z\dfrac{\partial}{\partial z}$. La restriction de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ à U est un faisceau localement constant (4.3.2) dont la monodromie le long d'un lacet

γ dans U d'origine m_0 s'exprime, avec l'identification précédente, par $Z \longmapsto h_\gamma^*(Z)$, où h_γ est l'image de $[\gamma]$ par la représentation sur T_{m_0}

$$\mathcal{H}_U : \pi_1(U;\, m_0) \longrightarrow \widehat{Diff}(T_{m_0})$$

de l'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de U. Notons $H_U := \mathcal{H}_U\,(\pi_1(U;\, m_0))$ le *groupe d'holonomie de* U. Toute intégrale première de H_U se prolonge de manière unique [**22**] en une intégrale première de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de U. On obtient finalement :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{H_U}\,, \qquad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \simeq \widehat{\mathcal{T}}_{H_U}\,.$$

Trois éventualités se présentent, suivant la nature de H_U.

a. H_U *est fini,* $\#H_U =: p$. Choisissons pour z une coordonnée formelle sur T_{m_0} dans laquelle H_U est un groupe de rotation. alors z^p se prolonge en une intégrale première transversalement formelle f_U le long de U et $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}\,[[f_U]]$. Le champ de vecteurs formel $Z := z\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ sur T_{m_0}, invariant par H_U, induit une section Z_U de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ sur U et

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}\,[[f_U]] \simeq \mathbb{C}\,[[z^p]]\,, \quad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}\,[[f_U]]\cdot Z_U \simeq \mathbb{C}\,[[z^p]]\cdot z\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

B. H_U *est commutatif et infini.* La symétrie formelle non-identiquement nulle Z de H_U, unique à constante multiplicative près, s'étend encore en une section $Z_U \in \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)$ et

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C} \qquad\qquad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}\cdot\, Z_U.$$

C. H_U *n'est pas commutatif.* alors

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \{0\}\,.$$

On posera $f_U := 1$, $Z_U := 0$.

5.1.2. L'ouvert $U \in \mathcal{U}$ est un voisinage d'une singularité de $\widetilde{\mathcal{F}}$. — Plus précisément supposons que U est la trace sur $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ d'un petit polydisque centré en un point singulier m. D'après la proposition (4.3.2) l'application canonique $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m}$ est un isomorphisme. Décrivons $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m}$ lorsqu'il existe en m des coordonnées transversalement formelles z_1, z_2, $z_1(m) = z_2(m) = 0$, dans lesquelles $\widetilde{\mathcal{F}}$ est défini par une des 1-formes normales $\widetilde{\omega}$ de (3.1). C'est toujours le cas, sauf peut-être lorsque la singularité est un selle-nœud tangent. Nous discuterons ce cas séparément.

Supposons que $z_2 = 0$ est une équation d'une branche locale U_0 de U em m. Notons h l'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long d'un lacet γ engendrant $\pi_1(U_0^*;\, m_0)$, $U_0^* := U_0 - \{m\}$ et réalisée sur le germe $T_{m_0} := \{z_1 = z_1(m_0)\}$ de transversale [(15)] à U_0^* en un de ses points m_0. Pour une section Z de $\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ nous désignerons par $\{Z\}$ sa classe dans $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$. On voit alors que

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m} = \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m}\cdot\{Z_m\}\,,$$

(15) Ici T_{m_0} est une courbe formelle.

avec, suivant les cas :

1. $\widetilde{\omega} := \lambda_1 z_1\, dz_2 + \lambda_2 z_2\, dz_1$ avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0\,, \lambda_1+\lambda_2 = 1\,,\ \lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{C}-\mathbb{Q}\,,$

$$\{Z_m\} \ = \ \frac{1}{2}\left\{\lambda_1 z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\} \ = \ \left\{\lambda_1 z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right\} = \left\{\lambda_2 z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\}$$
$$h(z_2) \ = \ e^{-2i\pi\lambda_2/\lambda_1}\, z_2\,, \qquad \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m} \ = \ \mathbb{C}\,.$$

2. $\widetilde{\omega} := q\, z_1\, dz_2 + p\, z_2\, dz_1$ avec $p,q\in\mathbb{N}^*\,,\ (p,q)=1\,,$

$$\{Z_m\} \ = \ \frac{1}{2}\left\{p z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + q z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\} \ = \ \left\{p z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right\} = \left\{q z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\}$$
$$h(z_2) \ = \ e^{-2i\pi p/q}\, z_2\,, \qquad \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m} = \mathbb{C}\,[[z_1^p z_2^q]]\ .$$

3. $\widetilde{\omega} := q\, z_1(1+\zeta\,(z_1^p z_2^q)^k)\, dz_2 + p\, z_2(1+(\zeta-1)\,(z_1^p z_2^q)^k)\, dz_1$ avec $p,q,k\in\mathbb{N}^*\,,\ (p,q)=1\,,$ $\zeta\in\mathbb{C}\,,$

$$\{Z_m\} = \left\{-q z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + p z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\} = \left\{\frac{(z_1^p z_2^q)^k}{1+\zeta(z_1^p z_2^q)^k}\, z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right\} = \left\{\frac{(z_1^p z_2^q)^k}{1+(\zeta-1)\,(z_1^p z_2^q)^k}\, z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}\,,$$
$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m} = \mathbb{C}\,, \qquad h(z_2) = e^{\frac{-2i\pi p}{q}}\exp\left(2i\pi\frac{p z_2^{qk+1}}{q(1+\zeta z_2^{qk})}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\,.$$

4. $\widetilde{\omega} := (\zeta z_2^p - p) z_1\, dz_2 + z_2^{p+1}\, dz_1$, avec $p\in\mathbb{N}^*\,,\ \zeta\in\mathbb{C}\,,$

$$\{Z_m\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{z_2^{p+1}}{(\zeta z_2^p - p)}\frac{\partial}{\partial z_2} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right\} = \left\{\frac{z_2^{p+1}}{(\zeta z_2^p - p)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right\} = \left\{z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}\,,$$
$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},m} = \mathbb{C}\,, \qquad h \text{ n'est jamais périodique }\ .$$

5. *$\widetilde{\omega}$ est un selle-nœud tangent à $\{z_2=0\}$, c.f.* (3.1.2).
Dans ce cas, il peut être impossible de réaliser, comme en 4., une forme normale par des coordonnées transversalement formelles à $\{z_2=0\}$. Cependant L'holonomie h de cet axe peut quand même être périodique. C'est le cas pour la 1-forme $z_1^{p+1}\, dz_2 + (\zeta z_1^p - p)\, z_2\, dz_1$, avec $\zeta\in\mathbb{Q}$, qui admet l'intégrale première

$$F(z_1,z_2) \ := \ z_1^n\, z_2^m\, e^{-\frac{n}{z_1^p}}\,, \qquad \zeta =: \frac{m}{n}\,, \quad m,\, n\,\in\mathbb{N}^*\,,$$

holomorphe sur $\{z_1\neq 0\}$.

5.1.3. Extension en un point singulier. — Soient U , V des ouverts de $\mathcal{U}$ avec $U\cap V\neq\emptyset$ et U_0 la branche de U contenant $U\cap V$. Supposons que U contient un point singulier m de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui n'est pas un selle nœud tangent à U_0 . L'intersection $U\cap V$ est une couronne. Nous conservons les notations ci-dessus et supposons que le point m_0 ainsi que le lacet γ sont contenus dans $U\cap V$.

Remarquons que toute section de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ resp. de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ sur $U\cap V$ s'étend en une section de ce faisceau sur U . En effet le germe en m_0 d'une section $X\in\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U\cap V)$ peut être représenté par un germe de champ basique tangent à T_{m_0} dont la composante en $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$ est nulle. La restriction X^0 de ce champ à T_{m_0} est invariante par h. Elle admet une extension unique en un champ basique $\widetilde{X} \in \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U - \{m\})$. Comme $E^*_{\mathcal{F}}(\omega) \cdot \widetilde{X}$ et $E^*_{\mathcal{F}}(\omega) \cdot Z_m$ sont deux facteurs intégrants de $E^*_{\mathcal{F}}(\omega)$, leur quotient Q est une intégrale première méromorphe transversalement formelle. La restriction Q^0 de Q à T_{m_0} est invariante par h, et, quitte à remplacer Q par $1/Q$ on peut supposer que $Q^0 \in \widehat{\mathcal{O}}_{T_{m_0}}$. Dans les cas 1., 3. et 4. h n'est pas périodique, ce qui implique que l'intégrale première Q^0 - et donc aussi Q - est constante $\neq 0$. Visiblement $\widetilde{X} - \mu\, Z_m$, avec $\mu := Q$ ou $1/Q \in \mathbb{C}^*$, est un champ tangent. ainsi $\{\mu Z_m\}$ est une extension de $\widetilde{X}$ sur U.

Il reste à examiner le cas 2. Un calcul direct de l'invariance de X^0 par h montre alors que $X^0 = l\,(z_2^q) z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$, $l(\xi) \in \mathbb{C}[[\xi]]$. ainsi $l\,(z_1^p z_2^q) z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$ est une extension de X.

La démonstration de l'extension des intégrales premières est similaire. Nous la laissons au lecteur.

Remarque 5.1.1. — L'exemple $z_1^{p+1}\, dz_2 + (\zeta z_1^p - p) z_2\, dz_1$ du selle nœud tangent donné en 4.b possède une intégrale première sur $U - \{m\}$, puisque l'holonomie h est périodique, qui ne s'étend évidemment pas au point m. Nous verrons que la présence d'une singularité de ce type pourra empêcher le feuilletage $\mathcal{F}$ d'être de type formel fini.

5.1.4. Récapitulation. — De même qu'en (76) appelons encore *couple normalisé sur un ouvert* W *de* $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ tout élément (f, Z) de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(W) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(W)$ qui vérifie, toujours avec la convention $\mathbb{C}[[1]] := \mathbb{C}$, la relation de dualité

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(W) = \mathbb{C}[[f]]\,, \quad \widehat{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}(W) = \mathbb{C}[[f]]\, Z\,, \\ \text{il existe } \ c \in \mathbb{C} \text{ tel que } \ df \cdot Z = c\, f\,. \end{array} \right. \tag{77}$$

Il est maintenant clair que pour chaque $W \in \mathcal{U}$ de tels couples existent. L'étude cas par cas que l'on vient de faire, complétée par des calculs immédiats, peut se résumer en la proposition suivante

Proposition 5.1.2. — *Soient U et V des ouverts de $\mathcal{U}$, $U \cap V \neq \emptyset$ tels que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est régulier sur V et U contient un point singulier m de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui n'est pas un selle-nœud tangent. Soit T_{m_0} un germe de courbe formelle lisse transverse à V en un point $m_0 \in U \cap V$. Notons H_V, resp. H_{U^*} les sous-groupes de $\widehat{Diff}(T_{m_0})$ d'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de V, resp. le long de $U^* := U - \{m_0\}$. alors les applications naturelles*

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m} \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}},\,m}\,, \quad \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U \cap V) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U \cap V)\,,$$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{H_{U^*}} \times \widehat{\mathcal{T}}_{H_{U^*}}\,, \quad \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{H_V} \times \widehat{\mathcal{T}}_{H_V}$$

sont des isomorphismes respectant les couples normalisés. En particulier toute section de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V)$ se prolonge en une section de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U \cup V) \times \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U \cup V)$.

Supposons de plus que $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \neq \mathbb{C}$ *, et donc aussi* $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \neq \mathbb{C}$ *. Fixons des couples normalisés* (f_U, Z_U) *et* (f_V, Z_V) *sur* U *et* V *respectivement. Il existe alors des constantes* c *,* $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *et une série formelle d'une variable* $K(\xi)$ *telle que*

$$f_V = \alpha\, f_U^d\, e^{K(f_U)}\,, \qquad Z_V = \frac{c}{1 + \frac{1}{d}\, f_U\, K'(f_U)} \cdot Z_U\,, \quad d := [H_V : H_{U^*}]\,. \tag{78}$$

En particulier on a les identifications :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \;=\; \mathbb{C}[[\, f_U^d\, e^{K(f_U)}]] \;\subset\; \mathbb{C}[[f_U]] \;=\; \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)\,,$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(V) \;=\; \mathbb{C}[[\, f_U^d\, e^{K(f_U)}]]\, \frac{1}{1 + \frac{1}{d}\, f_U\, K'(f_U)} \cdot Z_U \;\subset\; \mathbb{C}[[f_U]] \cdot Z_U \;=\; \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)\,.$$

5.2. Nerf complet associé à $\mathcal{F}$ **.** — Considérons *le nerf* $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$ du recouvrement distingué $\mathcal{U}$: chaque ouvert U de $\mathcal{U}$ correspond biunivoquement à un sommet s de $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$. Nous noterons alors $U =: U_s$. Deux sommets s et s' sont liés par une arête, notée ss' ou bien $s's$, lorsque $U_{ss'} := U_s \cap U_{s'}$ est non-vide. L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathcal{F})$ des sommets de $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$ se divise en l'ensemble $\mathfrak{S}_0(\mathcal{F})$ des sommets *de type* 0, correspondant aux éléments de $\mathcal{U}$ qui sont des voisinages de points singuliers de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et en l'ensemble $\mathfrak{S}_1(\mathcal{F})$ des sommets *de type* 1, correspondant aux éléments de $\mathcal{U}$ le long desquels $\widetilde{\mathcal{F}}$ est régulier chaque point. Par construction $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$ est un graphe connexe et simplement connexe.

Soit K une partie connexe de $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$ telle que toutes les arêtes de K joignent deux sommets de K ; nous dirons que K est un *sous-graphe connexe de* $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$. appelons *valence dans* K *d'un sommet* s de K, le nombre d'arêtes de K portées par ce sommet. Les sommets de valence 1 dans K sont dits *extrémités* de K et leur nombre $v(K)$ s'appellera *valence de* K.

5.2.1. Coloriage, pondération et orientation locale de $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$. — Pour chaque sommet s et chaque arête ss', nous notons :

$$E_s := \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U_s)\,, \quad E_{ss'} := \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U_{ss'})\,, \quad \mathcal{A}_s := \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U_s)\,, \quad \mathcal{A}_{ss'} := \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U_{ss'})\,,$$

et nous fixons un couple normalisé $(f_s,\, Z_s)$ sur U_s, resp. $(f_{ss'},\, Z_{ss'})$ sur $U_{ss'}$, cf. (77). Lorsque s est de type 0 et la singularité portée par U_s n'est pas un selle-nœud tangent (3.1.2), nous prenons pour $(f_{ss'},\, Z_{ss'})$ la restriction de $(f_s,\, Z_s)$ à $U_{ss'}$. ainsi, le symbole $*$ désignant un sommet s ou une arête ss', nous avons seulement trois possibilités :

1. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}$ et $E_* = \{0\}$,
2. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}$ et $E_* = \mathbb{C} \cdot Z_*$, avec $Z_* \neq 0$
3. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}[[f_*]]$ et $E_* = \mathbb{C}[[f_*]] \cdot Z_*$, avec $\mathcal{A}_* \neq \mathbb{C}$, $Z_* \neq 0$.

Dans tous les cas, toujours avec la convention $\mathbb{C}[[1]] := \mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \cdot \{0\} := \{0\}$, nous pouvons écrire :

$$E_* = \mathcal{A}_* \cdot Z_* \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_* = \mathbb{C}[[f_*]]\,.$$

Pour chaque arête ss' nous disposons d'opérations de restrictions qui s'expriment comme des injections $\mathbb{C}$- linéaires

$$\rho^s_{ss'} : E_s \hookrightarrow E_{ss'} \qquad \text{et} \qquad \sigma^s_{ss'} : \mathcal{A}_s \hookrightarrow \mathcal{A}_{ss'} \tag{79}$$

et que nous considérerons comme des inclusions. On a ainsi des relations

$$Z_s = a^s_{s'}(f_{ss'})\, Z_{ss'}\,, \quad f_s = b^s_{s'}(f_{ss'})\,, \quad a^s_{s'}(\zeta)\,,\ b^s_{s'}(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]\,. \tag{80}$$

Dans le cas 3. les formules (78) de (5.1.2) précisent les expressions des séries $a^s_{s'}(\zeta)$ et $b^s_{s'}(\zeta)$. En particulier $a^s_{s'}(0) \neq 0$. Dans les autres cas $a^s_{s'}(\zeta)$ et $b^s_{s'}(\zeta)$ sont des constantes, éventuellement nulles.

Nous allons maintenant orienter les arêtes de $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$. Nous convenons que :

$\circ_s \;\rightarrow\; \circ_{s'}$ signifie : $\rho^s_{ss'}$ n'est pas bijective et $\rho^{s'}_{ss'}$ est bijective,
$\circ_s \;\leftarrow\; \circ_{s'}$ signifie : $\rho^s_{ss'}$ est bijective et $\rho^{s'}_{ss'}$ n'est pas bijective,
$\circ_s \;\leftrightarrow\; \circ_{s'}$ signifie : $\rho^s_{ss'}$ et $\rho^{s'}_{ss'}$ sont bijectives,
$\circ_s \;\leftarrow\!\!\!\mapsto\; \circ_{s'}$ signifie : $\rho^s_{ss'}$ et $\rho^{s'}_{ss'}$ ne sont pas bijectives.

Lorsqu'on ne veut pas préciser $\circ_s$ —— $\circ_{s'}$ signifiera l'un quelconque de ces cas.

Nous allons maintenant colorier en vert ou rouge $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{F})$ puis pondérer les sommets rouges et les arêtes vertes qui joignent deux sommets verts.

Un sommet ou une arête, noté $*$, est *colorié en rouge* si $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}$ ou, ce qui revient au même, si $dim_{\mathbb{C}}\, E_* = 0$ ou 1. Les arêtes et les sommets $*$ tels que $\mathcal{A}_* \neq \mathbb{C}$ sont *coloriés en vert*. Le sommet s se dessinera par $\bullet_s$ s'il est rouge et par $\star_s$ s'il est vert. Lorsque nous ne désirons pas préciser la couleur nous le dessinerons par $\circ_s$.

Remarquons que toute arête joint un sommet de type 1 (correspondant à un ouvert $U \in \mathcal{U}$ sans singularité du feuilletage) à un sommet de type 0 (l'ouvert U correspondant porte une singularité). Un sommet rouge correspond à un ouvert d'holonomie non-commutative lorqu'il est de type 1. ; lorsqu'il est de type 0, il correspond à une singularité sans intégrale première. Une arête reliée à un sommet vert est verte. Pour une arête verte, le sommet de type 0 auquel elle est reliée est soit vert, soit rouge et correspondant à une singularité de type selle-noeud tangent. Les seules possibilités, pour une arête verte, sont :

$$\begin{array}{lll} a.\ \star_{s'} \leftarrow \star_s\,, & b.\ \star_{s'} \leftrightarrow \star_s\,, & \\ c.\ \star_{s'} \leftarrow \bullet_s\,, & d.\ \star_{s'} \leftarrow\!\!\!\mapsto \bullet_s\,, & e.\ \bullet_{s'} \leftarrow\!\!\!\mapsto \bullet_s\,. \end{array} \tag{81}$$

Le sommet s' est de type 0 dans le cas a. ; Par contre s est de type 0 et U_s contient une singularité selle-nœud tangent dans le cas d.. La configuration c. peut se produire avec s' de type 0, ou bien avec s' de type 1 et dans ce cas U_s contient un selle-nœud tangent ; enfin dans le cas e., soit U_s soit $U_{s'}$ contient un selle-nœud tangent.

On associe à un sommet rouge $\bullet_s$, *son poids*

$$d_s := dim_{\mathbb{C}}\, E_s = 0 \text{ ou } 1\,.$$

Pour toute arête rouge ss', on a $dim_{\mathbb{C}} E_{ss'} = 1$, puisque l'holonomie d'une couronne est commutative. Visiblement, pour une arête rouge, les seules configurations possibles sont :

$$\overset{1}{\bullet} \leftrightarrow \overset{1}{\bullet}\,, \qquad \overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{0}{\bullet}\,, \qquad \overset{0}{\bullet}\!\longleftrightarrow\!\overset{0}{\bullet}\,, \tag{82}$$

et dans la dernière configuration, le sommet de type 0 correspond à une singularité de type selle-noeud.

Définition 5.2.1. — Nous appelons *nerf complet de* $\mathcal{F}$ et notons $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ le nerf colorié de $\mathcal{F}$, où chaque sommet rouge est muni de son poids 0 ou 1. La partie rouge de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ sera désignée par $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$. Nous le munissons de la métrique pour laquelle chaque arête est isométrique au segment [0, 1] standard.

Clairement $\mathcal{F}$ est bon (4.6.1) si et seulement si $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est non-vide.

5.2.2. Parties actives du nerf de $\mathcal{F}$. — Ce sont les parties de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ qui contribueront à la dimension de $H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$.

Nous appelons *partie active rouge de* $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ tout sous-graphe connexe de $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ dont les sommets extrémité sont de poids 0, tous les autres sommets étant de poids 1. Remarquons que $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ peut ne pas posséder de partie active rouge. D'autre part chaque sous-graphe $\overset{0}{\bullet}\!\longleftrightarrow\!\overset{0}{\bullet}$ est une partie active rouge.

Définition 5.2.2. — Supposons $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ non-vide et connexe. Nous appelons *bouquet de cercles assosié à* $\mathcal{F}$ l'espace topologique $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})$ obtenu à partir de la réalisation géométrique de $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ en identifiant à un seul et même point tous les sommets de poids 0.

Cet espace topologique est séparé. Il a bien le type d'homotopie d'un bouquet de cercles, ou d'un point. Le nombre de cercles se calcule à partir des parties actives $L_1, \dots, L_r$ de $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ par la formule :

$$\widehat{\sigma}(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{Z}}\, H_1\left(\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})\,;\,\mathbb{Z}\right) = \sum_{j=1}^{r} \left(v(L_j) - 1\right)\,, \tag{83}$$

où la valence $v(L_j)$ est le nombre de sommets extrémités de L_j.

5.3. Les critères de finitude formelle de $\mathcal{F}$. — La finitude formelle de $\mathcal{F}$, en abrégé $\mathcal{F}$ est t.f.f., que l'on a définie en (4.5.3) par $\widehat{\beta}(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\, H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) < \infty$, équivaut par (4.5.4) à celle de $\widehat{\tau}(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\, H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. La formule (70) montre que $\widehat{\delta}(\mathcal{F}) := dim_{\mathbb{C}}\, H^1\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$ se calcule à partir de l'arbre dual doublement pondéré $\check{\mathbb{A}}[\mathcal{F}]$ introduit en (3.1.6). Lorsque $\mathcal{F}$ ne possède pas de facteur intégrant formel on a $\widehat{\beta}(\mathcal{F}) = \widehat{\tau}(\mathcal{F}) + \widehat{\delta}(\mathcal{F})$ d'après (4.5.4) et nous verrons que $\widehat{\beta}(\mathcal{F})$ ne dépend que de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ si $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Nous disons qu'un sous-graphe connexe K de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ est *répulsif* si toute arête attachée à un sommet $s \notin K$ est soit du type simple flèche $\circ_s \ \to \ \circ_{s'}$ dirigée vers l'extérieur [16] de K, soit du type $\circ_s \ \leftrightarrow \ \circ_{s'}$. En particulier $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ est répulsif.

Théorème de codimension 5.3.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage formel non-dicritique à singularité isolée non-réduite à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Supposons $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ non-vide*[17]*. Alors on a :*

1. *$\mathcal{F}$ est t.f.f. si et seulement si $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est connexe et répulsif. Dans ce cas $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$ est égal au nombre $\widehat{\sigma}(\mathcal{F})$ de cercles du bouquet $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})$ défini en (5.2.2), et de plus :*
$$\widehat{\beta}\,(\mathcal{F}) = \widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) + \widehat{\tau}\,(\mathcal{F}) - \widehat{\varepsilon'}\,(\mathcal{F})\ ,$$
où $\widehat{\delta}(\mathcal{F})$ est défini par la formule (69) et où $\widehat{\varepsilon'}(\mathcal{F}) = 0$ ou 1.
2. *Si $\mathcal{F}$ est t.f.f. et de deuxième espèce (3.1.4) alors $\widehat{\varepsilon'}(\mathcal{F}) = 0$ ou 1. Le cas $\widehat{\varepsilon'}(\mathcal{F}) = 1$ se produit exactement lorsque $\mathcal{F}$ possède un facteur intégrant (71) formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ qui s'annule sur les séparatrices formelles de $\mathcal{F}$ et il n'existe pas de champ formel à l'origine de $\mathbb{C}^2$ basique et non-tangent pour $\mathcal{F}$. De plus $\widehat{\delta}(\mathcal{F})$ est égal à la dimension de la strate à μ-constant de l'ensemble des séparatrices formelles $\widehat{Sep}(\mathcal{F})$, c.f. (3.1.8).*

5.4. Démonstration du Théorème de codimension. — Une partie des résultats du théorème se déduit de la proposition (4.5.4). Lorsque $\mathcal{F}$ est t.f.f. on a, avec les notations de (4.5.4) : $\widehat{\beta}\,(\mathcal{F}) \ = \widehat{\delta}\,(\mathcal{F}) \ + \ \widehat{\tau}\,(\mathcal{F}) \ - \ \widehat{\mathcal{E}'}\,(\mathcal{F})$ où
$$0 \ \leq \ \widehat{\mathcal{E}'}\,(\mathcal{F}) \ \leq \ dim_{\mathbb{C}} \left(\widehat{Int}\,(\omega) \Big/ \left(\omega \cdot \widehat{\mathcal{B}}(\omega)\right)\right)\ .$$

Si $\mathcal{F}$ est t.f.f. et $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, il n'existe pas d'intégrale première globale non-constante le long de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ et donc tout intégrale première formelle de $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est constante. Comme $\mathcal{F}$ est non-dicritique toute intégrale première méromorphe formelle à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est aussi constante. On en déduit que $\widehat{Int}\,(\omega) \Big/ \left(\omega \cdot \widehat{\mathcal{B}}(\omega)\right)$ est de dimension 0 ou 1, puisque le quotient de deux facteurs intégrants est une intégrale première méromorphe. On a donc bien $\widehat{\mathcal{E}'}\,(\mathcal{F}) = 0$ ou 1.

Lorque $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce, on a
$$\widehat{\mathcal{E}'}\,(\mathcal{F}) = dim_{\mathbb{C}} \left(\widehat{Int}\,(\omega) \Big/ \left(\omega \cdot \widehat{\mathcal{B}}(\omega)\right)\right) = 0 \text{ ou } 1\,.$$

Le cas $\widehat{\mathcal{E}'}\,(\mathcal{F}) = 1$ se produit exactement lorsque, à l'origine de $\mathbb{C}^2$, il existe un facteur intégrant formel s'annulant sur les séparatrices formelles de $\mathcal{F}$, mais tout champ formel basique est tangent.

[16] Ceci a un sens puisque K est connexe et $|\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\,|$ simplement connexe.

[17] i.e. la réduction de $\mathcal{F}$ comporte un élément critique $C \subset \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ tel que $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(C) = \mathbb{C}$.

Supposons à présent $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ non-vide et montrons que $\mathcal{F}$ est t.f.f. si et seulement si $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est connexe répulsif.

Soit K un sous-graphe de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$. Notons $\mathfrak{S}(K) \subset \mathfrak{S}(\mathcal{F})$ l'ensemble des sommets de K et $\mathfrak{S}_i(K)$ le sous-ensemble des sommets de K de type i, avec $i = 0$ ou 1 . Nous appelons *application de cohomologie associée à* K l'application $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\begin{aligned} &\Delta_K \ : \ \prod_{s \in \mathfrak{S}(K)} E_s \ =: \ Z^0(K) \ \longrightarrow Z^1(K) \ := \prod_{(s,s') \in \mathfrak{S}(K)^{\check{2}}} E_{ss'} \,, \\ &(X_s)_s \longmapsto (X_{ss'})_{(s,s')} \,, \quad \text{avec} \quad X_{ss'} := X_{s'} - X_s \,, \end{aligned} \tag{84}$$

où

$$\mathfrak{S}(K)^{\check{2}} := \{ \ (s,s') \in \mathfrak{S}_0(K) \times \mathfrak{S}_1(K) \ / \ \ ss' \text{ arête de } K \ \} \,. \tag{85}$$

Nous noterons dans tout ce qui suit :

$$\mathcal{H}^0\,(K) := \mathit{ker}\,(\Delta_K)\ , \qquad \mathcal{H}^1\,(K) := \mathit{coker}\,(\Delta_K)\ .$$

Remarquons que deux sous-graphes K et K' de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ vérifient :

$$\mathit{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^1(K) \geq \mathit{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^1(K') \qquad \text{dès que} \qquad K' \subset K\,. \tag{86}$$

En effet, π désignant la projection linéaire $Z^1\,(K) \longrightarrow Z^1\,(K')$ induite par la structure produit, les applications $\Delta_{K'}$, $\pi \circ \Delta_K$ ont même image.

Visiblement

$$\mathcal{H}^1\,\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right) = H^1\,\left(\mathcal{U}\,;\,\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)\,. \tag{87}$$

Pour voir que $\mathcal{F}$ n'est pas t.f.f. il suffit donc de détecter un sous-graphe K de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ tel que $\mathit{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^1(K) = \infty$.

Remarque 5.4.1. — En fait $\mathcal{H}^1\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right)$ peut s'interpréter comme un espace de cohomologie de Cech : munissons la réalisation géométrique $\left|\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right|$ de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ de la topologie dont une base d'ouverts est la collection $\mathcal{V}$ des réalisations géométriques $\mathcal{V}_s$, $s \in \mathfrak{S}(\mathcal{F})$, des parties de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ constituées d'un sommet s et de toutes les arêtes qui y sont attachées. Considérons le faisceau $\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{F}}$ de base $\left|\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right|$ défini par

$$\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_s) := E_s\,, \qquad \widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_s \cap \mathcal{V}'_s) := E_{ss'}\,, \quad (s,s') \in \mathfrak{S}(K)^{\check{2}}\,,$$

les applications de restriction associées aux inclusions $\mathcal{V}_s \cap \mathcal{V}_{s'} \subset \mathcal{V}_s$ et $\mathcal{V}_s \cap \mathcal{V}_{s'} \subset \mathcal{V}_{s'}$ étant respectivement les injections $\rho^s_{ss'}$ et $\rho^{s'}_{ss'}$ définies en (79). alors

$$\mathcal{H}^j\,(K) \;=\; H^j\left(\mathcal{V}_K;\,\widehat{\mathbb{T}}_{\mathcal{F}}\right)\,, \qquad j = 0,\,1\,,$$

où $\mathcal{V}_K$ est le recouvrement $(\mathcal{V}_s)_{s \in \mathfrak{S}(K)}$ de K .

Lemme 5.4.2. — *Soit K une géodésique* [18] *de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ de l'un des types suivants :*

1. $\bullet_{s_0} \;\text{——}\; \star_{s_1} \;\text{——} \cdots\cdots\cdots \text{——}\; \star_{s_n} \;\longleftarrow\; \star_{s_{n+1}}$ *avec* $n \geq 1$,
2. $\bullet_{s_0} \;\text{——}\; \star_{s_1} \;\text{——} \cdots\cdots\cdots \text{——}\; \star_{s_n} \;\text{——}\; \bullet_{s_{n+1}}$ *avec* $n \geq 1$,
3. $\bullet_{s_0} \;\text{——}\; \bullet_{s_1}$ *l'arête étant verte,*
4. $\bullet_{s_0} \longleftrightarrow \star_{s_1}$,

les sommets $s_2, \ldots, s_{n-1}$ étant verts et l'orientation des arêtes $s_j s_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$ étant quelconque. alors : $dim_{\mathbb{C}}\, \mathcal{H}^1(K) = \infty$.

Démonstration. — Examinons le cas 1. Quitte à raccourcir la géodésique, on supposera grâce à (86) que toutes les arêtes $s_j s_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n-1$ sont, soit des doubles flèches $\star_{s_j} \longleftrightarrow \star_{s_{j+1}}$, soit des flèches orientées vers s_n , i.e. $\star_{s_j} \longrightarrow \star_{s_{j+1}}$. En considérant les opérateurs d'extension et de restriction comme des inclusions, on obtient les identifications suivantes :

$$E_{s_0} \subset E_{s_0 s_1} \subset E_{s_1} \subset E_{s_1 s_2} \subset \cdots\cdots \subset E_{s_n} \subset E_{s_n s_{n+1}} \supsetneq E_{s_{n+1}} \,. \tag{88}$$

qui permettent de considérer tous les espaces comme des sous espaces de $E_{s_n s_{n+1}}$. Les sommets s_n et s_{n+1} sont de type 0 et 1 respectivement. Fixons un couple normalisé $(f, Z) \in \mathcal{A}_{s_n\, s_{n+1}} \times E_{s_n\, s_{n+1}}$. Par (5.1.2) les identifications ci-dessus s'écrivent :

$$\mathbb{C} \cdot a(f)\, Z \;\subset\; \cdots\cdots \;\subset\; \mathbb{C}[[f]] Z \;\supset\; \mathbb{C}[[\widetilde{b}(f)]] \cdot \widetilde{a}(f)\, Z \,. \tag{89}$$

où a , $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ sont des séries formelles d'une variable satisfaisant : $\widetilde{b}(0) = \widetilde{b}'(0) = 0$ et $\widetilde{a}(0) \neq 0$. Il suffit de montrer que le conoyau du composé $\widetilde{\Delta}_K$ de l'application de cohomologie Δ_K définie en (84) avec la surjection linéaire

$$Z^1(K) \longrightarrow E_{s_n,\, s_{n+1}} \,, \qquad \left(X_{j,\, j+1}\right)_{j=0\,,\ldots,n} \longmapsto \sum_{j=0}^{n} X_{j,\, j+1}$$

est de codimension infinie. L'application $\widetilde{\Delta}_K$ envoie $\left(X_{j,\, j+1}\right)_{j=0\,,\ldots,n}$ sur $X_{n+1} - X_0$. ainsi l'image de $\widetilde{\Delta}_K$ s'écrit :

$$Im\left(\widetilde{\Delta}_K\right) = \left(\mathbb{C}\left[\left[\widetilde{b}(f)\right]\right] \widetilde{a}(f) + \mathbb{C}\, a(f)\right) \cdot Z \,,$$

avec $\widetilde{b}(0) = \widetilde{b}'(0) = 0$; d'où la conclusion.

Dans le cas 2. la même méthode montre que $Im\left(\widetilde{\Delta}_K\right)$ est de dimension finie. Le cas 3. est trivial et le cas 4. donne le même résultat que le cas 2.. □

Remarquons que, d'après la liste (81), $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ ne peut posséder d'arête du type $\bullet \longleftarrow \star$. Il découle clairement du lemme ci-dessus que si $\mathcal{F}$ est t.f.f., alors $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est connexe et répulsif, à moins qu'il ne soit vide.

[18] rappelons que nous avons muni $\mathbb{N}^*(\mathcal{F})$ de la métrique pour laquelle chaque arête est isométrique au segment [0, 1] standard.

Pour obtenir la réciproque définissons maintenant des "opérations d'élagage" d'un sous-graphe de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$, qui ne changent pas la dimension de l'espace de cohomologie associé.

Appelons *branche verte sécable* d'un sous-graphe connexe K de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$, toute géodésique $B \subset K$, reliant deux sommets de K, qui vérifie :

1. tous les sommets de B, autres que ses extrémités, sont verts et de valence 2 dans K ;
2. l'un des sommets extrémité de B, que nous appelons *sommet d'attache de* B, est *répulsif dans* B : chaque arête de B est soit une double flèche $\circ \leftrightarrow \circ$, soit une flèche simple $\circ \rightarrow \circ$ orientée vers l'autre sommet extrémité de B, que nous appelons *sommet libre de* B ;
3. le sommet libre de B est vert et de valence 1 dans K ; le sommet d'attache est : soit rouge, soit de valence $\neq 2$, soit vert du type $\longleftarrow \ \star \ \longrightarrow$.

Remarquons que l'on peut avoir $B = K$. Dans ce cas, lorsque toutes les flèches sont des doubles flèches, le choix du sommet d'attache est arbitraire.

Désignons par $El_B(K)$ le *graphe* K *élagué de la branche* B c'est à dire le graphe connexe obtenu à partir de K en supprimant toutes les arêtes et tous les sommets de B, sauf le sommet d'attache. Lorsque $B = K$, $El_B(K)$ est le graphe trivial réduit à un seul sommet. Pour un sous-graphe L de K, nous désignons par λ_L^1 l'injection de $Z^1(L)$ dans $Z^1(K)$ définie par $\lambda_L^1 \cdot (X_{ss'})_{(s,s')} := (Y_{ss'})_{(s,s')}$, avec $Y_{ss'} := X_{ss'}$ si s, s' sont les sommets d'une arête de L et $Y_{ss'} = 0$ sinon.

Lemme 5.4.3. — *Soit B une branche verte sécable de K, l'application*

$$\left[\kappa_{K'}^1\right] : \mathcal{H}^1(K') \longrightarrow \mathcal{H}^1(K), \quad \left[(X_{ss'})_{(s,s')}\right] \longmapsto \left[\kappa_{K'}^1 \cdot (X_{ss'})_{(s,s')}\right],$$

avec $K' := El_B(K)$, est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $\circ_{s_0} \ — \ \star_{s_1} \ — \cdots\cdots\cdots — \ \star_{s_{n+1}}$ la branche verte sécable B, s_0 désignant le sommet d'attache. Considérons l'injection $\widetilde{\lambda}^0 : Z^0(B - \{s_0\}) \longrightarrow Z^0(K)$, $(X_s)_s \longmapsto (Y_s)_s$ définie par $Y_s := X_s$ si s est un sommet de $B - \{s_0\}$ et $Y_s = 0$ sinon. Le diagramme suivant est commutatif et ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z^0(B - \{s_0\}) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}^0} & Z^0(K) & \xrightarrow{\pi^0} & Z^0(K') & \longrightarrow & 0 \\
& & \widetilde{\Delta}_B \downarrow & & \Delta_K \downarrow & & \Delta_{K'} \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z^1(B) & \xrightarrow{\lambda_B^1} & Z^1(K) & \xrightarrow{\pi^1} & Z^1(K') & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où π^0, π^1 sont les projections canoniques données par les structures produits et l'application $\widetilde{\Delta}_B$ est définie par la relation de commutativité qu'elle doit vérifier. La suite exacte longue associée donne

$$\cdots \longrightarrow coker(\widetilde{\Delta}_B) \longrightarrow \mathcal{H}^1(K) \longrightarrow \mathcal{H}^1(K') \longrightarrow 0.$$

Montrons que $\widetilde{\Delta}_B$ est surjective. Donnons nous un élément $(X_{j,j+1})_{j=0,\dots,n}$ de $Z^1(B)$. Faisons les identifications

$$E_{s_0} \subset E_{s_0 s_1} \subset E_{s_1} \subset E_{s_1 s_2} \subset \cdots\cdots \subset E_{s_n} \subset E_{s_n s_{n+1}} \subset E_{s_{n+1}},$$

puisque s_0 est un sommet répulsif de la branche sécable B. Il est évident que l'on peut résoudre le système d'équations

$$X_1 - 0 = X_{0,1}, \quad X_2 - X_1 = X_{1,2}, \quad \dots, \quad X_{n,n+1} = X_{n+1} - X_n,$$

d'inconnues $X_j \in E_{s_j}$.

Ainsi π^1 induit un isomorphisme $[\pi^1] : \mathcal{H}^1(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^1(K')$. Comme l'application $\lambda^1_{K'}$ est une section de π^1, on obtient que $[\lambda^1_{K'}]$ est aussi un isomorphisme. □

Supposons $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ connexe, non-vide et répulsif et montrons que $\mathcal{F}$ est t.f.f.. Notons $K_0 := \widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$. aucun sommet vert de K_0 n'est du type $\longleftarrow \star \longrightarrow$. Chaque sommet vert s_j extrémité de K_0, $j = 1, \dots, r_0$ est aussi l'extrémité libre d'une branche verte sécable B_j de K_0, le sommet d'attache de B_j étant soit un sommet rouge, soit un sommet vert de valence ≥ 3. Considérons le sous-graphe K_1 obtenu en élagant K_0 (dans un ordre indifférent) des branches $B_1, \dots, B_{r_0}$. Le graphe K_1 est connexe et $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est toujours une partie connexe répulsive de K_1. En répétant cette opération on obtient une filtration $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F}) =: K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_p$ avec $K_p = \widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$. Le lemme donne :

$$\mathcal{H}^1\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right) = \mathcal{H}^1\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right) \tag{90}$$

Nous allons maintenant élaguer $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$.

Appelons *branche rouge sécable* d'un sous-graphe connexe K de $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ toute géodésique $B \subset K$ qui joint une extrémité de K de poids 1 à un sommet de K qui est soit de valence $\neq 2$ dans K, soit de valence 2 dans K et de poids 0, et telle que les autres sommets sont de valence 2 dans K et de poids 1. Lorsque $B = K$ et tous les sommets de B sont de poids 1, on choisit arbitrairement l'un des sommets extrémité que l'on appelle *sommet d'attache de* B. Dans les autres cas on appelle *sommet d'attache de* B le sommet extrémité qui est de valence ≥ 3 ou de poids 0.

Chaque sommet extrémité de $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ qui n'est pas de poids 0 est aussi l'extrémité libre d'une branche rouge sécable. En itérant l'opération qui consiste à élaguer successivement toutes ces branches, on construit de nouveau une filtration finie décroissante de premier terme $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$. Le dernier terme de cette filtration est soit un point, soit un sous-graphe connexe $El(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})) \subset \widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ dont les sommets extrémité sont de poids 0. ainsi $El(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F}))$ est l'union (non-vide) des parties actives rouges $L_1, \dots, L_r$ de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$. On a :

$$\mathcal{H}^1\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^1\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^1\left(El\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right)\right).$$

Pour achever la démonstration il reste à montrer le

Lemme 5.4.4. — *On a : $dim_{\mathbb{C}}\,\mathcal{H}^1\left(El\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right)\right) = dim_{\mathbb{Z}}\,H_1\left(\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})\,;\,\mathbb{Z}\right)$, où $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})$ désigne le bouquet de cercles associé à $\mathcal{F}$ défini en (5.2.2).*

Démonstration. — Supposons que $El\,(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F}))$ n'est pas réduit à un point, sinon l'égalité est triviale. Visiblement

$$\mathcal{H}^1\left(\,El\,\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right)\,\right) = \bigoplus_{j=1}^{r}\mathcal{H}^1\,(\,L_j\,)\ .$$

On supposera donc que $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ ne possède qu'une seule partie active rouge, notée K. Soit v la valence de K. L'homologie de $\widehat{\mathfrak{C}}(\mathcal{F})$ est celle du complexe simplicial C de dimension 1, obtenu en rajoutant à K un sommet, noté s_0, et v arêtes qui relient s_0 aux extrémités $s_1,\dots,s_v$ de K. Considérons maintenant le sous-complexe simplicial K' obtenu en ôtant à K chaque sommet d'extémité et l'arête qui lui est attachée. Toutes les arêtes de K' sont du type $\overset{1}{\bullet}\ \leftrightarrow\ \overset{1}{\bullet}$ et l'on a : $E_s \xrightarrow{\sim} E_{ss'} \xrightarrow{\sim} E_{s'}$. Ces espaces étant tous de dimension 1, nous les identifions à $\mathbb{C}$. ainsi $Z^0(K')$, $Z^1(K')$ et $Z^1(K)$ peuvent être considérés comme des espaces de cochaines simpliciales à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$Z^0(K') \xrightarrow{\sim} Z^0(K'\,;\mathbb{C}) := \bigoplus_{s\in\mathfrak{S}(K')} \mathbb{C}\cdot s\,,$$

$$Z^1(K') \xrightarrow{\sim} Z^1(K'\,;\,\mathbb{C}) = \bigoplus_{ss'\in\mathfrak{S}(K')^{\check{2}}} \mathbb{C}\cdot ss'\,,$$

$$Z^1(K) \xrightarrow{\sim} Z^1(K\,;\,\mathbb{C}) = \bigoplus_{ss'\in\mathfrak{S}(K)^{\check{2}}} \mathbb{C}\cdot ss'\,,$$

où $\mathfrak{S}(K')^{\check{2}}$ et $\mathfrak{S}(K)^{\check{2}}$ ont été définis en (85). D'autre part, $E_s = 0$ lorsque s est un sommet extrémité de K. ainsi nous pouvons identifier $Z^0(K')$ à $Z^0(K)$ et Δ_K peut être vue comme une application de $Z^0(K';\mathbb{C})$ dans $Z^1(K;\mathbb{C})$. On obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^0(K';\mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota^0} & Z^0(C\,;\,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi^0} & \bigoplus_{j=0}^{v}\mathbb{C}\cdot s_j & \longrightarrow & 0 \\ & & \Delta_K\downarrow & & \delta^1_C\downarrow & & \sigma\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^1(K;\mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota^1} & Z^1(C\,;\,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi^1} & \bigoplus_{j=1}^{v}\mathbb{C}\cdot s_js_0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{91}$$

avec π^0 et π^1 les projections linéaires canoniques, ι^0 et ι^1 les injections linéaires induites par les inclusions de sous-complexes, et δ^1_C l'application de cobord $\sum\lambda_s\cdot s\longmapsto \sum(\lambda_s-\lambda_{s'})\cdot ss'$ dont la restriction à $\bigoplus_{j=0}^{v}\mathbb{C}\cdot s_j$ est

$$\sigma(\sum_{j=0}^{v}\lambda_j\cdot s_j\,)\ =\ \sum_{j=0}^{v}(\lambda_j-\lambda_0)\cdot s_js_0\,.$$

On obtient la suite exacte :

$$ker(\delta^1_C)\ \longrightarrow\ \ker(\sigma)\ \longrightarrow\ \mathcal{H}^1(K)\ \longrightarrow H^1(C\,;\,\mathbb{C})\ \longrightarrow\ coker(\sigma) \tag{92}$$

On voit facilement :

$$ker(\delta_C^1) = \mathbb{C} \cdot \sum_{s \in \mathfrak{S}(C)} s\,, \qquad \ker(\sigma) = \mathbb{C} \cdot \sum_{s=0}^{v} s_j$$

où $\mathfrak{S}(C)$ est l'ensemble des sommets de C, et la première flèche de (92) est un isomorphisme. Comme σ est visiblement surjective, on obtient la conclusion. $\square$

Ceci achève la démonstration du théorème de codimension (5.3.1)

5.5. Feuilletages de deuxième espèce non-dégénérés. — Mettons maintenant en évidence une classe de feuilletages t.f.f. pour lesquels $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$ peut se calculer seulement à partir de la donnée de l'arbre dual $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$.

Pour cela munissons $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ de la métrique pour laquelle les arêtes sont isométriques à l'intervalle $[0,1]$. Rappelons que la *valence d'un sommet* s de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$, notée $v(s)$, est le nombre de flèches et d'arêtes attachées à s. On appellera aussi *valence d'une composante* D du diviseur exceptionnel $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ et l'on notera $v(D)$ la valence du sommet de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ correspondant. Nous appellerons *chaine de* $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ toute géodésique de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ qui joint deux sommets de valence ≥ 3. Une chaine de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ peut être éventuellement réduite à un segment de longueur 1. A une chaine de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$ correspond biunivoquement, soit une union connexe maximale de diviseurs de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ de valence 2, soit un point d'intersection de deux composantes de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ de valence ≥ 3, appelée dans les deux cas *chaine de* $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$.

Définition 5.5.1. — Un feuilletage formel de deuxième espèce (3.1.4) $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est dit *non-dégénéré* s'il satisfait les conditions suivantes :

1. le groupe d'holonomie H_D de toute composante D de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ de valence ≥ 3 est non-commutatif,
2. pour toute chaine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ on a : $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathcal{C}) = \mathbb{C}$.

Remarquons que la condition de deuxième espèce implique que tout germe d'intégrale première $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F},m}$ en un point singulier m situé sur une chaine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, se prolonge à toute la chaine : $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C})$. Ainsi on obtient une définition équivalente en remplaçant la condition 3. par :

2'. pour toute chaine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ et tout un ouvert U d'un recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ intersectant $\mathcal{C}$ on a : $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(U) = \mathbb{C}$.

Sur les chaines $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ non-réduites à un point, cette condition est aussi équivalente à la non-finitude du groupe d'holonomie d'une composante irréductible quelconque de $\mathcal{C}$.

On a le corollaire suivant au théorème de codimension (5.3.1) :

Corollaire 5.5.2. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de deuxième espèce non-dégénéré à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors $\mathcal{F}$ est t.f.f., satisfait l'égalité $\widehat{\beta}(\mathcal{F}) = \widehat{\tau}(\mathcal{F}) + \widehat{\delta}(\mathcal{F})$ et $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$ est égal à la somme du nombre de chaines de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$.*

Démonstration du corollaire. — La condition 1. de la définition ci-dessus exclu, d'après [**10**], l'existence d'un facteur intégrant formel de $\mathcal{F}$. La proposition (4.5.4) donne alors l'égalite $\widehat{\beta}(\mathcal{F}) = \widehat{\tau}(\mathcal{F}) + \widehat{\delta}(\mathcal{F})$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})$ est connexe répulsif et de calculer $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$.

Examinons maintenant les propriétés du nerf $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ induites par les conditions de non-dégénérescence. Nous reprenons les notions de branches sécable et d'élagage introduites dans la démonstration du théorème (5.3.1). D'après ce qui précède, en examinant les listes (81) et (82) on voit que :

(a) tout sommet de valence ≥ 3 est rouge et de poids 0, tout sommet rouge de valence ≤ 2 est de poids 1.

(b) toute arête verte est : soit une simple flèche orientée vers son sommet de type 0, qui est aussi vert, soit une double flèche,

(c) toute arête verte de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ qui joint deux sommets de valence ≤ 2 est une double flèche joignant deux sommets verts,

On en déduit que les sommets s_j , $j = 1, \ldots, r$, extrémités de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ sont aussi chacun l'extrémité d'une branche sécable rouge ou bien verte B_j . Les sommets d'extrémités du sous-graphe $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ obtenu en élagant $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ des branches $B_1, \ldots, B_r$, étaient visiblement, dans $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$, des sommets de valence ≥ 3 et donc des sommets rouges de poids 0. Ainsi l'élagage total est effectué en une seule étape :

$$El\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right) = \widehat{\mathfrak{N}}_1 .$$

Chaque arête de $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ fait visiblement partie d'une géodésique $\mathcal{C}$ dont les sommets sont de valence 2 dans $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$, sauf les sommets d'extrémités qui sont de valence ≥ 3 dans $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$. Une telle géodésique correspond à une chaine de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$. D'après la condition 2'. de (5.5.1) les sommets et les arêtes de $\mathcal{C}$ sont rouges et d'après (a) sont tous de poids 1, sauf les sommets d'extrémités qui sont de poids 0. Ainsi tous les sommets et arêtes de $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ sont rouges. Les sommets de valence ≥ 3 ainsi que les sommets d'extrémités sont de poids 0. Tous les autres sommets ainsi que les arètes sont de poids 1. Les géodésiques de $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ dont les sommets sont tous de poids 1 sauf les extrémités qui sont de poids 0, correspondent biunivoquement aux chaines de $\mathbb{A}^*(\mathcal{F})$. La formule (83) et le théorème de codimension (5.3.1) montrent que le nombre de ces géodésiques est $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$. Ceci achève la démonstration. □

5.6. Démonstration du théorème de préparation (4.6.4)**.** — Conservons les notations fixées en tête de ce chapitre 4. En particulier le composé de l'application $E_{\underline{\mathcal{F}}_P} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times P$ d'équiréduction de $\underline{\mathcal{F}}_P$ et de la projection de $\mathbb{C}^2 \times P$ sur P est noté

$$\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P} \longrightarrow P \simeq (\mathbb{C}^p, 0)\,, \quad \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P} = (t_1, \ldots, t_p)\,, \quad t_j := pr_j \circ \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}\,,$$

où $pr_j : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne la j-ième projection. Nous identifions toujours la cime $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ de la réduction de $\mathcal{F}$ à la fibre $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^{-1}(0)$, et le diviseur exceptionnel $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$

à l'intersection de $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^{-1}(0)$ et du diviseur exceptionnel $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P} \subset \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$. On peut donc écrire : $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{F}_P}$. Par hypothèse, pour chaque ouvert U du recouvrement distingué $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, le germe de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ le long de U est conjugué au germe de la déformation constante. On dispose ainsi de germes de rétractions

$$R_U := \left(\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{F}}_P}, U\right) \longrightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{F}}, U)\ , \qquad U \in \mathcal{U}\,,$$

tels que l'image réciproque [(19)] $R_U^*\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et l'application tangente de $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ définissent $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ au voisinage de U, c'est à dire : $\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} = R_U^*\left(\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) + (dt_1, \ldots, dt_p)$. Considérons le faisceau d'anneaux $\underline{\widehat{\mathcal{O}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ de base $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ constitué des germes $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P},m}$ de fonctions transversalement formelles le long de $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}$ qui sont des *intégrales premières* de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$, c'est à dire qui vérifient $df \wedge \eta = 0$, pour tout germe $\eta \in \widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P,m}$. Restreignons ce faisceau au dessus de 0 et considérons le faisceau suivant

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P} := i^{-1}\left(\underline{\widehat{\mathcal{O}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)\ , \quad \text{où} \quad i : \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{D}_{\underline{\mathcal{F}}_P}\ , \quad i(m) := m$$

qui a mêmes fibres que $\underline{\widehat{\mathcal{O}}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}$ mais est de base $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$. Les co-morphismes

$$R_U^* : \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) \quad \text{et} \quad \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^* : \mathcal{O}_P \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)\,, \quad U \in \mathcal{U}\,,$$

permettent de considérer $\mathcal{O}_P$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)$ comme des sous-anneaux de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)$. On voit que les seules éventualités sont :

– $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^*(\mathcal{O}_P) = \mathbb{C}\{t\}$,

– $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}[[f_U]]$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^*(\mathcal{O}_P)\,[[f_U \circ R_U]] = \mathbb{C}\{t\}\,[[f \circ R_U]]$,

où $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^*(\mathcal{O}_P)\,[[f_U \circ R_U]]$ désigne le complété de $\pi_{\underline{\mathcal{F}}_P}^*(\mathcal{O}_P)\,[f_U \circ R_U]$ dans $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)$ pour la topologie $(f_U \circ R_U)$-adique et où $\mathbb{C}\{t\}$ est l'anneau des séries convergentes en les variables $t_1, \ldots, t_p$.

Tout champ de vecteurs basique $X \in \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, se relève par R_U en un unique champ basique et vertical noté $R_U^*(X)$, grâce encore à la trivialité de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ le long de U. Pour le $\mathbb{C}\{t\}$-module $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)$, les seules éventualités sont :

1. $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(U) = \mathbb{C}[[f_U]]$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C}[[f_U]] \cdot \{X_U\}$, où f_U est une intégrale première non-constante et où $X_U \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(U)$ définit un élément non-nul aproprié $\{X_U\}$ de $\widehat{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}(U)$. Alors $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \mathbb{C}\{t\}[[F_U]]$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \mathbb{C}\{t\}[[F_U]] \cdot \{Z_U\}$, avec $F_U := f_U \circ R_U \notin \mathbb{C}\{t\}$ et $Z_U := R_U^*(X_U)$ définissant un élément $\{Z_U\}$ non-nul de $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U)$.
2. $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(U) = \mathbb{C}$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \mathbb{C} \cdot \{X_U\}$ avec $\{X_U\} \neq \{0\}$. Alors $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \mathbb{C}\{t\}$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \mathbb{C}\{t\} \cdot \{Z_U\}$, avec $Z_U := R_U^*(X_U)$ et $\{Z_U\} \neq \{0\}$.

[(19)]Il s'agit du faisceau engendré par les images réciproques par R_U des germes formes différentielles de $\widehat{\Lambda}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$, cf. (2.1.1)

3. $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}(U) = \mathbb{C}$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(U) = \{0\}$. Alors $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \mathbb{C}\{t\}$ et $\widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U) = \{0\}$.

En désignant toujours par $*$ un sommet s ou une arête ss' du nerf $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$, posons maintenant :

$$\mathcal{A}_* := \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U_*) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_* := \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}(U_*)\,,$$

où U_* est défini comme en (5.2). Nous avons seulement, comme en (5.2), les trois possibilités :

1. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}\{t\}$ et $\mathcal{E}_* = \{0\}$,
2. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}\{t\}$ et $\mathcal{E}_* = \mathbb{C}\{t\} \cdot \mathcal{Z}_*$, avec $\mathcal{Z}_* \neq 0$
3. $\mathcal{A}_* = \mathbb{C}\{t\}[[F_*]]$ et $\mathcal{E}_* = \mathbb{C}\{t\}[[F_*]] \cdot \mathcal{Z}_*$, avec $\mathcal{A}_* \neq \mathbb{C}\{t\}$, $\mathcal{Z}_* \neq 0$.

Pour chaque arête ss' nous disposons, comme en (79), d'opérations de restrictions

$$\mathfrak{r}^s_{ss'} : \mathcal{E}_s \hookrightarrow \mathcal{E}_{ss'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{s}^s_{ss'} : \mathcal{A}_s \hookrightarrow \mathcal{A}_{ss'}\,,$$

qui sont maintenant des morphismes injectifs de $\mathbb{C}\{t\}$-modules. De plus, toujours à cause de la trivialité de $\widetilde{\mathcal{F}}_P$ le long de U_*, le morphisme $\mathfrak{r}^s_{ss'}$, resp. $\mathfrak{s}^s_{ss'}$, est bijectif si et seulement si $\rho^s_{ss'}$, resp. $\sigma^s_{ss'}$, l'est. La $\widetilde{\mathcal{F}}_P$*-application de cohomologie* associée à un un sous-graphe K de $\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})$, définie comme en (84) par :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{D}_K : \prod_{s\in\mathfrak{S}(K)} \mathcal{E}_s =: \mathfrak{Z}^0(K) & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^1(K) := \prod_{(s,s')\in\mathfrak{S}(K)^{\check{2}}} \mathcal{E}_{ss'}\,, \\ (\mathcal{Z}_s)_s & \longmapsto & (\mathcal{Z}_{s'} - \mathcal{Z}_s)_{(s,s')}\,, \end{array}$$

est maintenant un morphisme de $\mathbb{C}\{t\}$-modules. En notant $\mathcal{H}^1_P(K) := coker(\mathfrak{D}_K)$, il vient :

$$H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right) = \mathcal{H}^1_P\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*_P(\mathcal{F})\right).$$

Le procédé d'élagage des branches vertes et rouges sécables utilisé dans la démonstration du théorème (5.3.1) se retranscrit ici littéralement : le lemme (5.4.3) reste vrai lorqu'on remplace $\mathcal{H}^1(K)$, $\mathcal{H}^1(K')$ par $\mathcal{H}^1_P(K)$, $\mathcal{H}^1_P(K')$ et, sous l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est t.f.f., on a encore

$$\mathcal{H}^1_P\left(\widehat{\mathfrak{N}}^*(\mathcal{F})\right) \simeq \mathcal{H}^1_P\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right) \simeq \mathcal{H}^1_P\left(El\left(\widehat{\mathfrak{R}}^*(\mathcal{F})\right)\right).$$

Les calculs de la démonstration du lemme (5.4.4) se retranscrivent aussi. Les $\mathbb{C}\{t\}$-modules $\mathfrak{Z}^0(K')$, $\mathfrak{Z}^1(K')$ et $\mathfrak{Z}^1(K)$ sont respectivement isomorphes aux espaces de cochaines simpliciales

$$Z^0(K';\mathbb{C}\{t\}) := \bigoplus_{s\in\mathfrak{S}(K')} \mathbb{C}\{t\}\cdot s\,, \quad Z^1(K';\mathbb{C}\{t\}) := \bigoplus_{ss'\in\mathfrak{S}(K')^{\check{2}}} \mathbb{C}\{t\}\cdot ss'\,,$$

$$Z^1(K;\mathbb{C}\{t\}) := \bigoplus_{ss'\in\mathfrak{S}(K)^{\check{2}}} \mathbb{C}\{t\}\cdot ss'\,.$$

On obtient un diagramme similaire au diagramme (91), dont la suite exacte longue associée produit un isomorphisme $\mathbb{C}\{t\}$-linéaire entre $\mathcal{H}^1_P(K)$ et $H^1(C;\mathbb{C}\{t\})$. Comme $H^1(C;\mathbb{C}\{t\}) \simeq H^1(C;\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{t\}$, on peut finalement conclure que $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est un $\mathbb{C}\{t\}$-module libre de rang égal à $dim_{\mathbb{Z}} H^1(\mathfrak{C}(\mathcal{F});\mathbb{Z})$, c'est à dire de rang $\widehat{\tau}(\mathcal{F})$, où $\mathfrak{C}(\mathcal{F})$ est le bouquet de cercles défini en (5.2.2).

Pour voir que $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est de type fini sur $\mathbb{C}\{t\}$, il suffit maintenant de rappeler [**20**] que $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est libre de type fini et de considérer les derniers termes de la suite exacte longue (4.3.4). Lorsque $\mathcal{F}$ n'admet pas de facteur intégrant formel, on voit facilement à l'aide de (73) que $H^0\left(\mathcal{U}; \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est nul. Ainsi (4.3.4) montre que $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{B}}^v_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ est la somme directe de $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{X}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$ et de $H^1\left(\mathcal{U};\, \widehat{\mathcal{T}}_{\widetilde{\mathcal{F}}_P}\right)$.

6. Généricité des singularités t.f.f.

6.1. Jets déterminant les singularités de deuxième espèce. — Considérons l'espace $\widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ comme la limite projective des espaces de jets, via les applications canoniques $j^k : \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0} \to J^k_0\Lambda := \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0} \Big/ \widehat{\mathfrak{m}}_2 \cdot \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$, où $\widehat{\mathfrak{m}}_2$ désigne l'idéal maximal de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}$. A l'aide des coordonnées canoniques identifions $J^k_0\Lambda$ à l'espace vectoriel

$$\mathcal{P}_k := \{\,(P,Q) \in \mathbb{C}[X,Y] \;/\; deg(P), deg(Q) \leq k\}\ .$$

Classiquement pour chaque entier r, le sous-ensemble $L_{k,r} \subset \mathcal{P}_k$ des couples (P,Q) qui engendrent un idéal de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}$ de *colongueur*

$$\mu(P,Q) := dim_{\mathbb{C}}\left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2,0}/(P,Q)\right)$$

supérieure ou égale à r, est algébrique fermé. En raffinant la partition de $\mathcal{P}_k$ par les composantes connexes des différences $L_{k,r+1} - L_{k,r}$, on obtient une une stratification $\underline{\mathcal{E}}^k_\mu$ de $\mathcal{P}_k$, localement finie pour la topologie de zariski, telle que chaque strate est un ensemble constructible lisse le long duquel $\mu(P,Q)$ est constant.

Considérons maintenant la famille "linéaire" de feuilletages $\underline{\mathcal{F}}_{\mathcal{P}_k}$, d'espace (global) de paramètres $\mathcal{P}_k$, définie par :

$$\Omega_{P,Q} := \widetilde{E}_P(x,y)\,dx + \widetilde{E}_Q(x,y)\,dy \quad \text{où} \quad \widetilde{E}_F(x,y) := F(x,y)\,, \quad F \in \mathcal{P}_k\,.$$

Il découle(20) de l'inclusion $\widehat{\mathfrak{m}}_2^{\mu(P,Q)} \subset (P,Q)$ que l'ouvert

$$W^k_{\mu.det} \;:=\; J^k_0\widehat{\Lambda} \;-\; L_{k,k+1}\,,$$

est *k-déterminant pour le nombre de Milnor*, c'est à dire : $\mu(\omega) = \mu(\eta) < \infty$ dès que $j^k\omega = j^k\eta \in W^k_{\mu.det}$. Visiblement $W^k_{\mu.det}$ est une union de strates de $\underline{\mathcal{E}}^k_\mu$ et la famille $\mathcal{W}^k_{\mu.det} := (j^k)^{-1}(W^k_{\mu.det})$ vérifie :

$$\mathcal{W}^k_{\mu.det} \subset \mathcal{W}^{k+1}_{\mu.det}\,, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{W}^j_{\mu.det} \;=\; \widehat{\Lambda}_{sat}\,,$$

(20) La suite de sous-espaces vectoriels de codimension finie $F_j := (P,Q) + \widehat{\mathfrak{m}}_2^j \subset \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ est décroissante et $F_r = F_{r+1}$ pour un entier $r \leq \mu(P,Q)$. On conclut par le lemme de Nakayama.

où $\widehat{\Lambda}_{sat}$ désigne l'ensemble des 1-formes formelles à singularité isolée.

Désignons par ν_ω la multiplicité algébrique à l'origine de $\omega \in \widehat{\Lambda}_{sat}$ et par h'_ω la hauteur de son arbre de pré-réduction (3.3.1). Rappelons qu'après un éclatement la multiplicité du transformé strict de ω en un point quelconque du diviseur exceptionnel est au plus $\nu_\omega + 1$. Définissons alors la fonction $\sigma : \mathbb{N}^{*2} \longrightarrow \mathbb{N}$ par la relation de récurence :

$$\begin{cases} \sigma(v,1) := v+1\,, \qquad \sigma(v,2) := 2v+1\,, \\ \sigma(v,h+2) = \sigma(v,h+1) + \sigma(v,h) + v + h\,. \end{cases}$$

On voit facilement qu'en chaque point m du diviseur de cîme $\widetilde{\mathcal{D}}'_\omega$ de la pré-réduction de ω, le transformé strict de $\mathcal{F}_\omega$ s'obtient en divisant l'image réciproque de ω par un facteur $u^p v^{\varepsilon q}$, $\varepsilon = 0$ ou 1, avec :

$$p,\ q\ \leq\ \sigma\,(\nu_\omega, h'_\omega)\ .$$

$uv^\varepsilon = 0$ étant une équation réduite locale de $\widetilde{\mathcal{D}}'_\omega$ en m. Comme pour tout entier r, le r-jet(21) de l'image réciproque de ω le long de $\mathcal{D}'_\omega$ ne dépend que du r-jet de ω à l'origine, on obtient :

Lemme 6.1.1. — *Soit ω une 1-forme formelle à singularité isolée et k, l des entiers qui vérifient : $0 < l < k - \sigma\,(\nu_\omega, h'_\omega)$. Alors $j^k\omega$ est l-déterminant pour la pré-réduction des singularités, i.e. η et ω ont même pré-réduction des singularités dès que $j^k\eta = j^k\omega$.*

A l'aide du le théorème (3.3.5) appliqué à la famille $(\Omega_{P,\,Q})_{(P,Q)\in S}$ on peut construire une filtration décroissante de chaque strate $S \in \underline{\mathcal{E}}^k_\mu$ par des sous-ensembles algébriques fermés $L'_{k,r+1}(S)$ telle que les différences $\Delta_{k,\,r}(S) := L'_{k,r}(S) - L'_{k,\,r-1}(S)$ sont lisses et telle ,que lorsque (P,Q) varie dans $\Delta_{k,\,r}(S)$, le germe de $\Omega_{P,\,Q}$ en chaque point de $\Delta_{k,\,r}(S)$ définit une déformation équi-pré-réductible . Notons $\underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}$ la stratification de $\mathcal{P}_k$ dont les strates sont les composantes connexes des $\Delta_{k,\,r}(S)$, $S \in \underline{\mathcal{E}}^k_\mu$.

Pour chaque strate $S \in \underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}$, notons respectivement h'_S et ν_S la hauteur de l'arbre de pré-réduction et la multiplicité à l'origine d'une 1-forme quelconque $\Omega_{P,\,Q}$, $(P,Q) \in S$. Pour chaque entier l, $0 \leq l < k$, considérons l'ensemble constructible $L"_{k,\,l}$ formé de l'union des strates S de $\underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}$ telles que $k - \sigma\,(\nu_S, h'_S)\ \leq\ l$. Notons :

$$W^{k,\,l}_{p.red}\ :=\ J^k_0\widehat{\Lambda}\ -\ (L_{k,\,k+1} \cup L"_{k,\,l}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^{k,\,l}_{p.red} := \left(j^k\right)^{-1}\left(W^{k,\,l}_{p.red}\right)\ .$$

Fixons l'entier $l \geq 1$ et notons $j^k_{k'} : J^{k'}_0\widehat{\Lambda} \longrightarrow J^k_0\widehat{\Lambda}$, $k \leq k'$, les applications canoniques. Il découle du lemme (6.1.1) :

(21) Deux formes formelles le long d'un diviseur $\widetilde{\mathcal{D}}$ *ont même r-jet le long de* $\widetilde{\mathcal{D}}$ si elles diffèrent d'une forme à coefficients dans $\mathcal{I}^{r+1}_{\widetilde{\mathcal{D}}}$, où $\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ désigne le faisceau des fonctions transversallement formelles le long de $\widetilde{\mathcal{D}}$ et nulles sur $\widetilde{\mathcal{D}}$.

1. Si $j^k\omega \in W^{k,\,l}_{p.red}$ alors ω est à singularité isolée et son k-jet est l-déterminant pour la pré-réduction des singularités;
2. Si S est une strate de $\underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}$ contenue dans $W^{k,\,l}_{p.red}$ et $k \le k'$, alors $(j^k_{k'})^{-1}(S)$ est une strate de $\underline{\mathcal{E}}^{k'}_{p.red}$ contenue dans $W^{k',\,l}_{p.red}$; En particulier $(j^k_{k'})^{-1}(W^{k,\,l}_{p.red}) \subset W^{k',\,l}_{p.red}$;
3. On a : $\mathcal{W}^{k,\,l}_{p.red} \subset \mathcal{W}^{k',\,l}_{p.red}$, $k \le k'$ et $\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r>l}} \mathcal{W}^{r,\,l}_{p.red} = \widehat{\Lambda}_{sat}$.

Ainsi deux éléments distincts de la famille

$$\mathcal{E}_{p.red} := \left\{ (j^k)^{-1}(S) \subset \widehat{\Lambda}_{sat} \Big/ S \in \underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}\,,\, k - \sigma(\nu_S, h'_S) > 1\,, k \in \mathbb{N} \right\}$$

sont d'intersection vide. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème (3.3.5) à chaque $S \in \underline{\mathcal{E}}^k_{p.red}$ avec $k - \sigma(\nu_S, h'_S) > 1$. Finalement nous obtenons :

Théorème 6.1.2. — *Pour chaque $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_{p.red}$ il existe une fonction croissante k_S : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour $k \ge k_S(l)$ on a :*

1. *l'ensemble $\underline{S}_k := j^k(\mathcal{S})$ est constructible et $\mathcal{S} = (j^k)^{-1}(\underline{S}_k)$,*
2. *les jets d'ordre k des éléments de $\mathcal{S}$ sont l-déterminants pour la pré-réduction des singularités,*
3. *une famille $\{\omega_t\}_t$ de 1-formes formelle dépendant analytiquement d'un paramètre t définit une déformation équi-pré-réductible de ω_0 si et seulement si $\omega_t \in \mathcal{S}$.*
4. *le sous-ensemble $\mathcal{S}^2 \subset \mathcal{S}$ des éléments de $\mathcal{S}$ qui sont des 1-formes de deuxième espèce vérifie :*
   (a) *$\mathcal{S}^2 = (j^k)^{-1}(\underline{S}^2_k)$ avec $\underline{S}^2_k := j^k(\mathcal{S}^2)$*
   (b) *la différence $\underline{S}_k - \underline{S}^2_k$ est une union dénombrable localement finie (dans $\underline{S}_k$, pour la topologie usuelle) de sous ensembles algébriques et l'adhérence $\overline{\underline{S}_k - \underline{S}^2_k}$ est semi-algébrique réelle.*

6.2. Krull-densité des singularités t.f.f.— Nous étudions ici la Krull densité des feuilletages t.f.f.. Nous nous restreignons ici aux feuilletages de deuxième espèce, qui donnent des ennoncés plus concis. Mais la Krull densité peut s'obtenir pour des classes plus larges de feuilletages, en permettant par exemple des singularités de type selle-nœud tangent résonant (3.1.2).

Désignons par $\widehat{\mathfrak{E}}^2$, resp. $\widehat{\mathfrak{E}}^2_{tff}$, resp. $\widehat{\mathfrak{ND}}$, les sous-ensembles de $\widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ des 1-formes formelles de deuxième espèce, resp. de deuxième espèce t.f.f., resp. non-dégénérées (5.5.1). D'après (5.5.2) on a $\widehat{\mathfrak{ND}} \subset \widehat{\mathfrak{E}}^2_{tff}$. Une conséquence immédiate du théorème précédent (6.1.2) est que $\widehat{\mathfrak{E}}^2$ et $\widehat{\mathfrak{ND}}$ sont des ouverts de $\widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ pour la topologie de Krull.

Théorème de généricité 6.2.1. — *L'ouvert $\widehat{\mathfrak{ND}}$ - et à fortiori $\widehat{\mathfrak{E}}^2_{tff}$, est dense dans $\widehat{\mathfrak{E}}^2$ pour la topologie de Krull.*

De manière plus explicite :

Théorème 6.2.2. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage formel de deuxième espèce (3.1.4)à l'origine de $\mathbb{C}^2$ donné par une 1- forme formelle $\omega \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ et soit k un entier positif. Alors il existe une 1-forme $\omega' \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ et un entier $k' \geq k$ tels que :*

1. *ω' est non-dégénérée au sens de (5.5.1), à fortiori t.f.f., et a même k-jet que ω' : $j^k\omega' = j^k\omega$,*
2. *toute 1- forme $\eta \in \widehat{\Lambda}_{\mathbb{C}^2,0}$ vérifiant l'égalité $j^{k'}\eta = j^{k'}\omega'$ est aussi de deuxième espèce et non-dégénérée.*

Démonstration. — L'assertion 2. est une reformulation du fait que $\widehat{\mathfrak{ND}}$ est un ouvert pour la topologie de Krull, ce qui se déduit sans peine de théorème (6.1.2). Démontrons l'assertion 1.

Notons ici $\boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}})$ l'ensemble $\boldsymbol{C}\left(\mathbb{A}[\mathcal{F}]\right)$ des éléments critiques de l'arbre de réduction de $\mathcal{F}$, défini en (1.4.1). Les propriétés de non-dégénérescence sont "semi-locales", dans le sens où elles se vérifient à partir seulement de la collection des germes $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ le long de chaque ensemble $K \in \boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}})$, du transformé strict $\widetilde{\mathcal{F}}$ de la réduction de $\mathcal{F}$. La démonstration va consister à construire un système semi-local cohérent (2.3.5) de déformations de $\widetilde{\mathcal{F}}$

$$\mathbb{S} := \left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}\right)_{K \in \boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}})}, \tag{93}$$

d'espace de paramètres $(\mathbb{C}, 0)$ tel que, lorsque l'on fixe le paramètre t assez petit et non-nul, les feuilletages t.f. $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}(t)$ satisfont les propritéés de non-dégénérescence. De plus ces déformations seront tangentes à la déformation constante, à un ordre l suffisamment grand pour que le théorème de réalisation tangente (2.3.7) donne le résultat.

Avant de commencer cette construction, fixons le vocabulaire que nous allons employer ici. Soit $L \subset \mathcal{D}_\omega$ une union de composantes iréductible du diviseur $\mathcal{D}_\omega$ de la réduction de $\mathcal{F}$. Notons $Comp(L)$ l'ensemble des composantes irréductibles de L. Pour $D \in Comp(L)$ nous appelons respectivement *L-valence de D* et *$\widetilde{\mathcal{F}}$-valence de D* les entiers

$$v_L(D) := Card\,(D \cap Sing(L))\ , \quad \text{resp.} \quad v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D) := Card\left(D \cap Sing(\widetilde{\mathcal{F}})\right)\ .$$

Les éléments de $Comp(L)$ de L-valence 1 s'appellent *extrémités de L*. Une extrémité D de L sera appelée *diviseur de tête de L* si $v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D) \geq 3$. Soit C une union connexe maximale de composantes irréductibles de L de $\widetilde{\mathcal{F}}$-valences égales à 1 ou à 2. Si l'une des deux extrémités de C est aussi une extrémité de L nous dirons que C est une *$\widetilde{\mathcal{F}}$-branche de L*. Dans ce cas l'adhérence de $L - C$ est encore connexe et $(\overline{L - C}) \cap L$ est réduit à un seul point, appelé *point d'attache de C sur L*. Par contre, si C ne contient pas d'extrémité de L, on dit que C est une *$\widetilde{\mathcal{F}}$-chaine de L*. Alors C est aussi une *chaine de L* [22], l'adhérence de $L - C$ n'est plus connexe

[22] i.e. une union connexe maximale de composantes de L de L-valences 2.

et $(\overline{L-C})\cap L$ est composé de deux points appelés encore *points d'attache de* C *sur* L.

Pour toute la suite de la démonstration fixons un élément $D'_0 \in Comp(\mathcal{D}_\omega)$ tel que : $v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D'_0) > v_{\mathcal{D}_\omega}(D'_0)$ et $v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D'_0) \geq 3$. Considérons la filtration (finie) de $\mathcal{D}_\omega$

$$\mathcal{D}_\omega =: L^0 \supsetneq L^1 \supsetneq \cdots \supsetneq L^q = D'_0$$

définie par :

a. si l'union $Br(L^k)$ des $\widetilde{\mathcal{F}}$-branches de L^k est non-vide, nous posons $L^{k+1} := L^k - Br(L^k)$,

b. si $Br(L^k)=\emptyset$, alors l'ensemble des diviseurs de tête $\neq D'_0$

$$Tet(L^k) := \left\{ D \in Comp(L^k) \;\middle/\; v_{L^k}(D) = 1,\, v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D) \geq 3,\, D \neq D'_0 \right\}$$

est non-vide et nous posons $L^{k+1} := \overline{L^k - \cup_{D\in Tet(L^k)} D}$.

L'opération $L^k \longmapsto L^{k+1}$ sera appelée un *élagage de* L^k dans le cas a. et un *étêtage de* L^k dans le cas b.. La filtration $(L^j)_j$ de $\mathcal{D}_\omega$ induit le filtration $\mathcal{C}^0 \subsetneq \mathcal{C}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}^q$ de $\boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}})$ définie par :

$$\mathcal{C}^k := \left\{ K \in \boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}}) \middle/ K \subset \overline{\mathcal{D}_\omega - L^{k+1}} \right\}.$$

C'est par induction suivant cette dernière cette filtration que nous allons construire la collection (93) . Nous nous appuierons sur la proposition (2.3.3) et sur le lemme suivant.

Lemme 6.2.3. — *Soit* $C \subset \mathcal{D}_\omega$ *une* $\widetilde{\mathcal{F}}$*-chaine de* $\mathcal{D}_\omega$ *et* K_0 *un élément critique de* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *contenu dans* C. *Soit* $l \in \mathbb{N}$ *et* $\widetilde{\mathcal{F}}'_{\mathbb{C},\,K_0}$ *une déformation t.f. du germe* $\widetilde{\mathcal{F}}_{K_0}$ *de* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *le long de* K_0, *réalisée sur le germe d'espace produit* $(\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{C},\, K_0 \times \{0\})$. *Supposons de plus que* $\widetilde{\mathcal{F}}'_{\mathbb{C},\,K_0}$ *est* l*-tangente le long de* $(\mathcal{D}_\omega \times \mathbb{C}\,, K_0 \times \{0\})$ *à la déformation constante. Alors il existe une collection*

$$\widetilde{\mathcal{F}}'_{\mathbb{C},\,K}\,, \quad \textit{où :} \qquad K \subset C\,, \quad K \in \boldsymbol{C}(\widetilde{\mathcal{F}})\,, \tag{94}$$

de germes, le long des ensembles critiques $K \subset C$, *de déformations t.f. des germes* $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ *de* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *le long de* K, *qui sont* l*-tangentes à l'identité le long de* $\mathcal{D}_\omega$ *et qui vérifient les relations de cohérence (2.3.5). De plus les éléments de cette collection sont uniques à conjugaison t.f. près.*

Démonstration. — La construction se fait de proche en proche grâce à la proposition (2.3.3) et au sous-lemme suivant dont la démonstration résulte immédiatement de la classification t.f. des singularités réduites, par l'holonomie de l'une des variétés invariantes (la variété forte dans le cas d'un selle nœud), cf. [**19**] et [**18**]. □

Sous-lemme 6.2.4. — *Soit* $\mathcal{F}'$ *un germe à l'origine d'un feuilletage t.f. le long de* $S := \mathbb{C} \times 0 \subset \mathbb{C}^2$. *Supposons que* S *est un ensemble invariant de* $\mathcal{F}'$ *et que* $\mathcal{F}'$ *est réduit mais n'est pas un selle-nœud tangent à* S. *Alors, pour toute déformation t.f.*

[(23)] *de l'holonomie* $\underline{h}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ *de* $\mathcal{F}'$ *le long d'un petit lacet* $\gamma(s) := (\varepsilon e^{2i\pi s}, 0)$, $s \in [0,1]$*, il existe un germe* $\mathcal{F}'_{\mathbb{C}}$ *de déformation de* $\mathcal{F}'$*, t.f. le long de* S*, d'espace de paramètres* $(\mathbb{C}, 0)$*, unique à conjugaison t.f. près, telle que* $h(z,t)$ *soit l'holonomie de* $\mathcal{F}'_{\mathbb{C}}$ *le long de* γ*. De plus, si pour un entier* r *donné on a* $h(z,t) = \underline{h}(z)$ $mod(z^{r+1})$*, alors la déformation* $\mathcal{F}'_{\mathbb{C}}$ *peut être choisie* r*-tangente le long de* S *à la déformation constante.*

Nous sommes maintenant en mesure de commencer la construction de la collection (93).

• *Première étape :* *la construction de* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},K}$ *pour* $K \in \mathcal{C}^0$ *lorsque* $Br(\mathcal{D}_\omega) \neq \emptyset$. Pour $B \in Br(\mathcal{D}_\omega)$, deux cas se présentent :

a) les deux extrémités de B *sont de valence égale à 2.* Visiblement l'une d'elle (celle qui est aussi extrémité de $\mathcal{D}_\omega$) porte un point singulier c_0 de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui n'est pas une singularité de $\mathcal{D}_\omega$. Nous choisissons pour $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, c_0}$ une déformation t.f. telle que pour t asez petit, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, c_0}(t)$ ne possède au voisinage de c_0 qu'un seul point singulier et qu'en ce point il soit réduit, sans intégrale première t.f. non-constante et tangent à $\mathcal{D}_\omega$. Nous exigeons de plus que $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, c_0}$ soit tangente à la déformation constante le long de $\mathcal{D}_\omega$ à l'ordre l voulu. Pour les autres ensembles critiques $K \in \mathcal{C}^0$, $K \subset B$, nous prenons pour $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, K}$ les déformations données par le lemme (6.2.3).

b) B *possède une extrémité de valence égale à 1.* Il est facile de voir que $\widetilde{\mathcal{F}}$ possède alors le long de tout B un germe d'intégrale première t.f. non-constante $f_B \in \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(B)$ qui s'annule sur le diviseur. Nous prenons alors pour $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, K}$, $K \in \mathcal{C}^0$, $K \subset B$, les déformations constantes.

Dans les deux cas a) et b), traçons sur la composante D_B de L^1 qui porte le point d'attache c_B de B à L^1, un lacet $\widetilde{\gamma}$ bordant un disque conforme W' tel que $\overline{W'} \cap Sing(\widetilde{\mathcal{F}}) = \{c_B\}$

Lemme 6.2.5. — *l'holonomie* $\widetilde{h}(z,t)$ *de* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\, c_B}$ *le long de* $\widetilde{\gamma}$ *n'est pas égale à l'identité.*

Démonstration. — L'assertion est triviale dans le cas a). Dans le cas b) ordonnons les composantes de B , $B = D_0 \cup \cdots \cup D_q$ de sorte que $v_{\widetilde{\mathcal{F}}}(D_0) = 1$, $D_j \cap D_{j-1}$ est réduit à un point c_j, $j = 1, \ldots, q$ et $D_q \cap D_B = \{c_B\}$.

La formule d'indice de Camacho-Sad [**7**] donne les relations suivantes entre les multiplicités m_j des D_j comme composantes irréductibles des zéros de l'intégrale

[(23)] i.e. toute série $h(z,t) = \underline{h}(z) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(t) z^j \in \mathbb{C}\{t\}[[z]]$ telle que les rayons de convergences des coefficients $h_j(t)$ sont uniformément minorés par une constante > 0.

première f_B :

$$\begin{cases} m_0e_0 + m_1 \quad = 0 \\ m_0 + m_1e_1 + m_2 \quad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{j-1} + m_je_j + m_{j+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{q-1} + m_qe_q + m \quad = 0 \end{cases}$$

où e_j désigne l'auto-intersection (D_j, D_j) et m la multiplicité du germe de courbe (D_B, c_B) comme zéro de f_B. Il vient

$$m_0(e_0+2) + \cdots + m_q(e_q+2) = m_0 + m_q - m\,.$$

la minimalité de la réduction donne : $e_j \leq -2\,, \quad j = 0, \ldots, q$. D'où :

$$\frac{m_q}{m} \leq 1 - \frac{m_0}{m} < 1\,.$$

Mais l'holonomie $\widetilde{h}(z,t)$ est conjuguée à $(z,t) \longmapsto exp(2i\pi\frac{m_q}{m}\cdot z)$, car la déformation $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c_B}$ est constante. Ainsi $\widetilde{h}(z,t)$ est bien distinct de l'identité. $\square$

• <u>Deuxième étape</u> *: la construction de* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},K}$ *pour* $K \in \mathcal{C}^0$ *lorsque* $Br(\mathcal{D}_\omega) = \emptyset$. Alors $\overline{\mathcal{D}_\omega - L^1}$ est une union de composantes de tête de $\mathcal{D}_\omega$. Soit D l'une d'elles. Notons $c_1, \ldots, c_{r+1}$, $r \geq 2$, les points singuliers de $\widetilde{\mathcal{F}}$ situés sur D, c_{r+1} désignant le point d'attache de D à L^1. Donnons nous des lacets simples γ_j d'origine m_0 commune, bordant des disques conformes $W_j \subset D$ tels que $\overline{W_j} \cap \overline{W_k} = \{m_0\}$, $j \neq k$ et $\overline{W_j} \cap Sing(\widetilde{\mathcal{F}}) = \{m_j\}$, $m_j \in \overset{\circ}{W}_j$, $j,k = 1, \ldots, r+1$. Nous choisissons ces lacets pour que leurs classes $\overset{\bullet}{\gamma}_j$ dans $\pi_1(D^*, m_0)$, $D^* := D - \{c_1, \ldots c_{r+1}\}$, vérifient : $\overset{\bullet}{\gamma}_1 \vee \cdots \vee \overset{\bullet}{\gamma}_r = \overset{\bullet}{\gamma}{}^{-1}_{r+1}$. Ainsi les holonomies $\underline{h}_j(z)$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long des $\gamma_j$vérifient : $\underline{h}_1(z) \circ \cdots \circ \underline{h}_r(z) = \underline{h}^{-1}_{r+1}(z)$. Donné un entier $l \geq 1$, fixons des déformations t.f. $h_j(z,t)$ des $\underline{h}_j(z)$, $j = 1, \ldots, r+1$, de sorte que $h_j(z,t) = \underline{h}_j(z) \quad mod(z)^{l+1}$ et que, pour $t \neq 0$ petit, $h_{r+1,\,t} := (h_{1,\,t} \circ \cdots \circ h_{r,\,t})^{-1}$ ne soit pas périodique et que le groupe engendré par $h_{1,\,t}, \ldots, h_{r,\,t}$ ne soit pas commutatif. Le lemme (6.2.4) et la proposition (2.3.3) définissent alors des déformations $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c_j}$, $j = 1, \ldots, r+1$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,D^*}$ respectivements. Ces déformations, l-tangentes à la déformation constante, sont uniques à conjugaison t.f. près. Nous définissons la collection $\widetilde{\mathcal{F}}_{K,\mathbb{C}}$ $K \in \mathcal{C}^0$, en effectuant cette construction pour chaque composante de $\overline{\mathcal{D}_\omega - \mathcal{L}^1}$.

Remarque 6.2.6. — En chaque point d'attache c' d'une composante de $\overline{\mathcal{D}_\omega - L^1}$ sur L^1, pour $t \neq 0$ petit, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c'}(t)$ ne possède pas d'intégrale première t.f. non-constante.

• <u>Troisième étape</u> *: L'induction.* pour un entier k, $0 \leq k \leq q-1$, supposons construite la collection $\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}\right)_{K \in \mathcal{C}^k}$de manière que les conditions de cohérence, de non-dégénerescence et de tangence à la déformation constante soient satisfaites. Nous allons construire les déformations

$$(95) \qquad \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}\,, \qquad K \in \mathcal{C}^{k+1} - \mathcal{C}^{k}\,,$$

pour que la collection $\left(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}\right)_{K\in\mathcal{C}^{k+1}}$ satisfasse aussi les mêmes conditions.

Lorsque l'opération $L^{k+1} \longmapsto L^{k+2}$ est un élagage, chaque branche B de L^{k+1} porte sur l'une de ses extrémités un point singulier c_B qui est un point d'attache d'une branche ou d'un diviseur de tête de L^k. Ainsi c_B est un élément de $\mathcal{C}^k$ et la déformation $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c_B}$ est déjà donné par l'induction. Nous définissons alors les autres déformations de la collection (95) à l'aide du lemme (6.2.3).

Supposons maintenant que l'opération $L^{k+1} \longmapsto L^{k+2}$ est un étêtage. Considérons un diviseur de tête $D \subset L^{k+1}$. Adoptons les mêmes notations qu'à la deuxième étape. Ordonnons aussi les points singuliers portés par D pour que :

$$c_1, \dots, c_s \in \mathcal{C}^k \qquad \text{et} \qquad c_j \notin \mathcal{C}^k \quad \text{pour} \quad j \geq s+1\,,$$

et pour que c_{r+1} soit le point d'attache de D sur L^{k+1}. On a : $s \geq 1$ et $r \geq 2$. Pour $j = 1, \dots, s$, les déformations $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c_j}$ sont déja données par l'induction. En plus du système de lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_{r+1}$, donnons-nous aussi pour chaque $j = 1, \dots, s$ un disque conforme $\Delta_j \subset W_j$, $c_j \in \mathring{\Delta}_j$ suffisament petit pour que les germes $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},c_j}(t)$, soient réalisés et à singularités isolées $c_j(t)$ dans Δ_j.

Remarquons d'abord que les holonomies $\widetilde{\underline{h}}_{j,t}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},c_j}(t)$ le long des lacets $\beta_j := \partial\Delta_j$, $j = 1, \cdots, s$, sont toutes différentes de l'identité. En effet, si $k > 1$, les germes $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},c_j}(t)$ en $c_j(t)$ ne possèdent pas d'intégrale première t.f. non-constante d'après les conditions de non-dégénérescence de l'induction : les points $c_1, \dots, c_s$ sont des points d'attache de chaines de $\mathcal{D}_\omega$, ou bien des points d'intersections de deux composantes de $\mathcal{D}\omega$ de valence ≥ 3. Si $k = 1$, les points $c_1, \dots, c_s$ sont des points d'attache de branche ou de diviseurs de tête. Le lemme (6.2.5) ou la remarque (6.2.6) ci dessus permettent de conclure.

Première éventualité $s = r$. Pour construire $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}$ pour $K = D - \{c_1, \dots, c_{r+1}\}$, il suffit de déterminer des difféomorphismes formels $h_{1,t}, \dots, h_{r+1,t}$ dépendant holomorphiquement d'un petit paramètre $t \in (\mathbb{C}, 0)$, qui satisfont les condition (a)–(c) ci dessous, puis d'appliquer la proposition (2.3.3)à ces difféomorphismes :

(a) pour $j = 1, \dots, s$, chaque $h_{j,t}$ est t.f. conjugué à $\widetilde{\underline{h}}_{j,t}$ par un difféomorphisme t.f. l-tangent à l'identité,

(b) $h_{r+1,t} = (h_{1,t} \circ \cdots \circ h_{r,t})^{-1}$,

(c) pour $t \neq 0$, $h_{r+1,t}$ n'est pas périodique et le groupe engendré par $h_{1,t}, \dots, h_{r,t}$ n'est pas abélien.

Les difféomorphismes t.f. $\widetilde{\underline{h}}_{j,t}$ étant différents de l'identité pour $t \neq 0$ nous déterminons aisément $h_{2,t}, \dots, h_{r,t}$ vérifiant (a) pour que $g_t := h_{2,t} \circ \cdots h_{r,t}$ ne soit pas l'identité. On utilise alors lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 6.2.7. — *Pour tout entier $l \geq 1$ il existe une famille holomorphe de séries formelles $\Phi_t(z)$ telle que :*

1. $\phi_t(z) = z \quad mod\,(z^{l+1})$,
2. $\phi_t \circ \widetilde{\underline{h}}_{1,t} \circ \Phi_t^{-1}$ *et* g_t *ne commuttent pas,*
3. $\phi_t \circ \widetilde{\underline{h}}_{1,t} \circ \Phi_t^{-1} \circ g_t$ *n'est pas périodique.*

On pose $h_{1,t} := \phi_t \circ \widetilde{\underline{h}}_{1,t} \circ \Phi_t^{-1}$ et $h_{r+1,t}$ est donné par la condition (b). Ceci achève la construction de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,K}$.

Pour construire $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C},\,c_{r+1}}$, on applique le lemme (6.2.4) à $\Psi \circ h_{r+1,t} \circ \Psi^{-1}$, où $\Psi(z)$ désigne le transport holonome, via le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$, le long d'un chemin simple α tracé sur $W_{r+1} - \{c_{r+1}\}$ qui relie m_0 à l'origine de β_{r+1}.

Seconde éventualité : $s \leq r-1$. Visiblement les points $c_{s+1}, \dots, c_r$ ne sont pas des singularités de $\mathcal{D}_\omega$. Il suffit de construire $h_{1,t}, \dots, h_{r+1,t}$ vérifiant les conditions (a)–(c) précédentes, ainsi que la condition suivante :

(d) pour $j = s+1, \dots, r$ chaque $h_{j,t}$ est une déformation t.f. de l'holonomie $\underline{h}_j$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long du lacet γ_j et de plus $h_{j,t} = \underline{h}_j \quad mod(z^{l+1})$.

Les degrés de liberté supplé mentaires que nous avons ici rendent plus facile cette construction et nous laissons au lecteur le soin de lachever. □

Références

[1] C. Bănică et O. Stănăşilă, *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes 1,2*, Collection Varia Mathematica, Gauthier-Villars, (1977)

[2] I. Bendixon, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Ofv. Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlinger, Stokholm, **vol. 9, 198**, pages 635 à 658, (1898)

[3] M. Berthier, R. Meziani et P. Sad, *On the classification of nilpotent singularities*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **vol. 123**, pages 351 à 370, (1999)

[4] J. Briançon et H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **série A 278**, pages 949 à 951, (1974)

[5] C. Camacho et P.Sad, *Topological classification and bifurcation of holomorphic flows with resonances in* $\mathbb{C}^2$, Inventiones Mathematicae, **67,n3**, pages 447 à 472, (1982)

[6] C. Camacho, A. Lins Neto et P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, Journal of Differential Geometry, **20**, pages 143 à 174, (1984)

[7] C. Camacho et P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Annals of Mathematics, **115**, pages 579 à 595, (1982)

[8] M. Canalis-Durand, J-P Ramis, R.Schffke et Y. Sibuya, *Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations*, Journal fr die Reine und Angewandte Mathematik, **518**, pages 95 à 129, (2000)

[9] D. Cerveau, *Distributions involutives singulières*, Annales de l'Institut Fourier, **29, 3**, pages 261 à 294, (1979)

[10] D. Cerveau et J.-F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque, **97**, (1982)

[11] D. Cerveau et R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* $(\mathbb{C},0)$ *et équations différentielles* $y\,dy+\cdots=0$, Bulletin de la Société Mathématique de France, **116**, pages 459 à 488, (1988)

[12] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, Journal de l'Ecole Polytechnique, **2, sec. 9**, pages 1 à 125, (1904)

[13] M.Hukuhara, T.Kimura et T.Matuda, *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publications of the Mathematical Society of Japan, **7**, (1961)

[14] P. M. Elizarov, Y. S. Il'yashenko, A. A. Scherbakov et S. M. Voronin, *Finitely generated groups of germs of one-dimensional conformal mappings, and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane*, Advances in Soviet Mathematics, **14**, pages 57 à 105, (1993)

[15] F. Loray, *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*, Journal of Differential Equations, **158,1**, pages 152 à 173, (1999)

[16] F. Loray, *Analytic normal forms for non degenerate singularities of planar vector fields* , Prépublication du C.R.M. 545, (2003)

[17] J. Martinet, *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D Brjno*, Bourbaki Seminar,vol 1980/1981, Lectures Notes in Mathematics, **901**, pages 55 à 70, (1981)

[18] J. Martinet et J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour les équations différentielles non-linéaires du premier ordre*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **55**, pages 64 à 164, (1982)

[19] J. Martinet et J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non-linéaires résonnantes du premier ordre*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **Série 4, t.16**, pages 571 à 621, (1983)

[20] J.-F. Mattei, *Modules de feuilletages holomorphes singuliers : 1 Equisingularité*, Inventiones Mathematicae, **103**, pages 297 à 325, (1991)

[21] J.-F. Mattei, *Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletqges holomorphes en dimension 2*, Géométrie complexe et Dynamique, Orsay 1995, Astérisque, **261**, pages 253 à 276, (2000)

[22] J.-F. Mattei et R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **Série 4, t. 13**, pages 469 à 523, (1980)

[23] J.-F. Mattei et E. Salem, *Classification formelle de feuilletages de* $(\mathbb{C}^2,0)$, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **série A 325**, pages 773 à 778, (1997)

[24] J.-F. Mattei et E. Salem, *Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of* $(\mathbb{C}^2,0)$, Mathematical Research Letters, **4**, pages 131 à 141, (1997)

[25] J.-F. Mattei et E. Salem, *Classification topologique locale des feuilletages singuliers en dimension 2*, en préparation

[26] R. Meziani, *Classification analytique d'équations différentielles ydy+... et espaces de modules*, Boletim da Socedade Brasilera Mathematica, **27**, pages 23 à 53, (1996)

[27] E. Paul, *Groupes résolubles de germes de difféomorphismes analytiques*, Vietnam Journal of Mathematics, **23, Special Issue**, pages 84 à 96, (1995)

[28] E. Paul, *Forme normale formelle d'une perturbation à séparatrices fixées d'un champ intégrable quasi-homogène*, preprint del'Université de Toulouse, (2003)

[29] H.Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal des Mathématiques pures et appliquées, **3**, pages 375 à 422, (1881)

[30] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differentiable equation* $A\,dY = B\,dX$, American Journal of Mathematics, **90**, pages 248 à 269, (1968)

[31] E. Strozyna et H. Zoladek, *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity*, Journal of Differential Equations, **179,2**, pages 479 à 537, (2002)

[32] F. Takens, *Normal forms for certain singularities of vector fields*, Annales de l'Institut Fourier, **23,n2**, pages 163 à 195, (1973)

J.-F. Mattei, Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE Cedex 4 France, fax : 33 (0)5 61 55 82 00
E-mail : `mattei@picard.ups-tlse.fr`

E. Salem, Institut de Mathématiques,, Université de Paris 6, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris Cedex. Et : Department of Mathematics, Ben Gurion University of the Negev, POB 653, Beer Sheva 84105, Israel, • *E-mail :* `salem@math.jussieu.fr`