Annales des devoirs, partiels et examens de la 2 ème année d'université en mathématiques
Algèbre linéaire et Analyse. 1996-2003
Université Paul Sabatier, Toulouse

Gérard Letac

Résumé

Un dévoué professeur, sentant sa r'traite prochaine,
Fit v'nir ses étudiants,
Leur parla pour leur bien.
"Gardez vous," leur dit il
"De balancer les pages
Qu'vous ont données les enseignants.
Le sujet de l'exam' en est caché dedans."

Partiel de Deug MIA 03, Nov.96 *(Durée : 2 heures. Aucun document. Barème : 1= 6 points, 2= 2 pts, 3= 3 pts, 4= 2 pts, 5= 4 pts, 6= 3 pts.)*

On note par $\log x$ le logarithme népérien de x.

1. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}.$$
Montrer qu'il existe deux nombres positifs A et B, qu'on ne demande pas de calculer, tels que pour tout x de $[1, \infty[$ on ait $\log x \leq Ax^{1/4}$ et, pour tout t de $]0, 1]$ on ait $|\log t| \leq Bt^{-1/4}$. En déduire la convergence des trois intégrales impropres suivantes :
$$I_1 = \int_1^\infty f(x)dx, \quad I_2 = \int_0^1 f(t)dt, \quad I = \int_0^\infty f(x)dx.$$
Montrer par un changement de variable que $I = 0$.

2. Montrer que l'intégrale impropre
$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$
converge et la calculer par un changement de variable simple.

3. Montrer que l'intégrale impropre
$$K = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2} dx$$
converge et la calculer par l'intégration par parties obtenue en posant $u(x) = \sqrt{x}\log x$ et à l'aide des valeurs de I et J obtenues aux questions 1 et 2.

4. Si a, b et c sont réels, montrer que $|6a + 3b + 2c| \leq 7\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Cas d'égalité ?

5. L'espace vectoriel réel E des polynômes réels de degré $\leq n$ est muni de la structure euclidienne
$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$
Soit f la forme linéaire sur E définie par $f(P) = P(1/3)$.
(a) Dans le cas où $n = 1$, trouver Q dans E tel que pour tout P de E on ait $f(P) =< P, Q >$.
(b) Dans le cas d'un n quelconque, montrer l'existence et l'unicité d'un Q dans E tel que pour tout P de E on ait $f(P) =< P, Q >$ (on énoncera en détail le théorème du cours utilisé).

6. L'espace $\mathbb{R}^5$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^5$ des $(x_1, \cdots, x_5)$ tels que $x_1 + \cdots + x_5 = 0$. E est donc également un espace euclidien, dont les vecteurs
$$\vec{f_1} = (1, -1, 0, 0, 0), \ \vec{f_2} = (1, 0, -1, 0, 0), \ \vec{f_3} = (1, 0, 0, -1, 0), \ \vec{f_4} = (1, 0, 0, 0, -1)$$
forment une base f ordonnée. Calculer la base orthonormale de E associée à f par le procédé de Schmidt.

Corrigé du Partiel de Deug MIA 03, Nov.96

1. Rappelons d'abord que si f est une fonction continue sur une demi droite $[a, +\infty[$ telle que $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et est réelle, alors f est bornée sur $[a, +\infty[$, c'est à dire qu'il existe un nombre A tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a $|f(x)| \leq A$. (Pour le voir, on observe que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $b_\epsilon > a$ tel que si $x > b_\epsilon$ on a $|f(x) - L| \leq \epsilon$; prenant par exemple $\epsilon = 1$ on en tire que pour $x > b_1$ on a $|f(x)| \leq |L| + 1$; enfin, f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b_1]$ y est bornée. D'où le résultat)

Appliquons alors le rappel précédent à la fonction continue sur $[1, \infty[$ définie par $x^{-1/4} \log x$, qui d'après la propriété connue ("la puissance l'emporte sur le logarithme"), a pour limite $L = 0$ si $x \to \infty$. L'existence de A est donc acquise.

Pour l'existence de B, on peut procéder de plusieurs manières. La plus simple est d'utiliser l'existence de A en posant $x = 1/t$ et en prenant $A = B$. Une autre est de considérer la fonction sur $]0, 1]$ définie par $t^{1/4} \log t$, de la prolonger par continuité en 0 par sa limite, qui est 0 car de nouveau "la puissance l'emporte sur le logarithme", et d'utiliser le fait que cette nouvelle fonction continue sur l'intervalle *fermé* borné $[0, 1]$ y est bornée.

Soit alors la fonction sur $[1, \infty[$ définie par $g(x) = \frac{A}{x^{1/4}(1+x)}$, et la fonction sur $]0, 1]$ définie par $h(t) = \frac{B}{t^{3/4}(1+t)}$. Si $x \to \infty$, $g(x) \sim x^{-5/4}$. Donc, puisque $5/4 > 1$, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^\infty g(x)dx$ converge, et donc d'après le critère de comparaison (qui est bien applicable car f est positive sur $[1, \infty[)$ l'intégrale I_1 converge. De même, si $t \to 0$, $h(t) \sim t^{-3/4}$. Donc, puisque $3/4 < 1$, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ converge, et donc d'après le critère de comparaison l'intégrale I_2 converge absolument, et donc converge. Donc I converge, comme somme des deux intégrales convergentes I_1 et I_2 . Finalement, le changement de variable dans I_2 défini par $t = 1/x$ (licite, car c'est un difféomorphisme entre $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$) montre que $I_2 = -I_1$ et donc que $I = 0$.

2. Soit $J_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ et $J_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Alors si $x \to \infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim x^{-3/2}$. Donc, puisque $3/2 > 1$, d'après le critère de Riemann, l'intégrale J_1 converge. Si $x \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim x^{-1/2}$. Donc, puisque $1/2 < 1$, d'après le critère de Riemann, l'intégrale J_2 converge. Et donc J converge. Le changement de variable dans J défini par $x = t^2$ (licite, car c'est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui même) montre que

$$J = \int_0^\infty \frac{2dt}{1+t^2} = 2[\arctan t]_0^{+\infty} = \pi$$

3. Dans K, la fonction à intégrer tend vers 0 à l'origine et y est donc prolongeable par continuité. Sur $[1, +\infty[$, la majoration du 1) est applicable, et on y a

$$\frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2} \leq \frac{Ax^{3/4}}{(1+x)^2} \sim Ax^{-5/4}.$$

Comme $5/4 > 1$, le critère de Riemann puis le critère de comparaison montrent que K converge. L'intégration par parties définie par $u(x) = \sqrt{x}\log x$, $u'(x) = \frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $v(x) = -\frac{1}{(1+x)}$ permet d'écrire

$$K = [-\frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)}]_0^{+\infty} + I/2 + J = \pi.$$

4. Appliquons l'inégalité de Schwarz aux vecteurs (a, b, c) et $(6, 3, 2)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. La norme carrée du second est $6^2 + 3^2 + 2^2 = 49 = 7^2$, l'inégalité est donc claire. On sait que l'inégalité de Schwarz devient une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont proportionnels. Donc, ici, l'égalité est réalisée si et seulement si il existe un réel λ tel que $a = 6\lambda$, $b = 3\lambda$ et $c = 2\lambda$.

5. (a) Notons par $Q(t) = ct + d$ le polynôme inconnu. On sait que pour tout polynôme P de la forme $P(t) = at + b$ on a

$$a/3 + b = \int_0^1 (at + b)(ct + d)dt = a(c/3 + d/2) + b(c/2 + d),$$

et donc $1/3 = c/3 + d/2$, $1 = c/2 + d$, ou encore $c = -2, d = 2$ et $Q(t) = -2t + 2$.

(b) Pour traiter le cas général, rappelons le théorème suivant du cours :

Soit E un espace euclidien et soit E^* son espace dual, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Si $\vec{x}$ est dans E, notons $\phi_{\vec{x}}(\vec{y}) =< \vec{x}, \vec{y} >$. Alors $\phi_{\vec{x}}$ est une forme linéaire sur E et $\vec{x} \mapsto \phi_{\vec{x}}$ est un isomorphisme linéaire entre E et E^*.

Appliquons cela à l'espace euclidien de dimension $n+1$ des polynômes de degré $\leq n$ muni du produit scalaire indiqué. f est un élément de E^*, et comme l'isomorphisme ci dessus est surjectif, il existe Q dans E tel que $f = \phi_Q$, ou encore tel que pour tout P de E on ait $f(P) = \phi_Q(P) =< P, Q >$. Comme un isomorphisme est aussi injectif, un tel Q est unique (bien que pénible à calculer si n est grand).

6. D'après le procédé vu en cours, on considère

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_1/||\vec{f}_1|| = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, 0),$$

$$\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - < \vec{f}_2, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 = (1/2, 1/2, -1, 0, 0),$$

$$\vec{e}_2 = \vec{g}_2/||\vec{g}_2|| = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 0, 0),$$

$$\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - < \vec{f}_3, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 - < \vec{f}_3, \vec{e}_2 > \vec{e}_2 = (1/3, 1/3, 1/3, -1, 0),$$

$$\vec{e}_3 = \vec{g}_3/||\vec{g}_3|| = (1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12}, -3/\sqrt{12}, 0),$$

$$\vec{g}_4 = \vec{f}_4 - < \vec{f}_4, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 - < \vec{f}_4, \vec{e}_2 > \vec{e}_2 - < \vec{f}_4, \vec{e}_3 > \vec{e}_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4, -1),$$

$$\vec{e}_4 = \vec{g}_4/||\vec{g}_4|| = (1/\sqrt{20}, 1/\sqrt{20}, 1/\sqrt{20}, 1/\sqrt{20}, -4/\sqrt{20}).$$

Et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ est la base orthonormale de Schmidt demandée.

Exercices d'analyse de Deug Mia 03, cours du vendredi 15 novembre 1996 (Gérard Letac)

1. (Divergence de la série harmonique par les sommes de Riemann) On note $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Montrer que $\lim_{n\infty} s_{2n} - s_n = \log 2$. Méthode : trouver une fonction f telle que
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$
et appliquer le théorème sur les sommes de Riemann. En déduire une nouvelle démonstration de la divergence de la série harmonique.
2. (Permutation des termes d'une série) On considère la série de terme général u_n défini par $u_{2p-1} = \frac{1}{p}$ et $u_{2p} = \frac{-1}{p}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge et calculer sa somme. On considère ensuite la série de terme général v_n défini par $v_{3p} = u_{2p}$, $v_{3p+1} = u_{4p+1}$, $v_{3p+2} = u_{4p+3}$. Montrer par récurrence que si $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, alors avec les notations de l'exercice précédent on a $S_{3n} = s_{2n} - s_n$. Du résultat de l'exercice précédent, déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme.
3. (Permutation des termes de la série harmonique alternée : théorème de A. Pringsheim (1883)) Pour tout entier $n > 0$, soit $u(n) = (-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers > 0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que
(1) pour tout entier $p > 0$ on a $\tau(2p-1) < \tau(2p+1)$ et $\tau(2p) < \tau(2p+2)$.
(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha = \lim_{n\infty} p(n)/n$ existe et est dans $]0, 1[$.
Dans le cas particulier où σ est définie par
$$\sigma(3p) = 2p,\ \sigma(3p+1) = 4p+1,\ \sigma(3p+2) = 4p+3,$$
calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.
On note $f(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty} f(n) = \gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n = u(\sigma(n))$ et on note $s_n = v_1 + \cdots + v_n$.
Montrer par récurrence que
$$s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$$
$$= \frac{1}{2}f(p(n)) + \frac{1}{2}f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2}\log\frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$
En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.
4. (Etude d'une suite se ramenant à une série) Soit la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par
$$s_n = (8n+5)\sqrt{4n+1} - 24\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$
Montrer que $\lim_{n\infty} s_n$ existe. Méthode : considérer la série de terme général u_n défini par $u_1 = s_1$ et, pour $n > 1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$. Montrer sa convergence en trouvant un équivalent de u_n de la forme A/n^{α}, obtenu en considérant un développement limité en $1/n$.

5. (Formule de Stirling de poche) Montrer qu'il existe un nombre $A > 0$ tel que

$$A = \lim_{n\infty} \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$$

Méthode : considérer la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, définie par

$$s_n = \log \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$$

comme la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, avec $u_1 = s_1$ et, pour $n > 1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$. Expliciter u_n, en trouver un équivalent par un développement limité en $1/n$, et montrer la convergence de cette série. (Le fait que $A = \sqrt{2\pi}$ est plus difficile à montrer)

6. (La limite d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue) Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$. Calculer $f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$ pour chaque valeur réelle de x. La fonction f est elle continue ? Tracer les graphes de f_n et de f. Calculer, pour n fixé, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|$ et $\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)|$, ainsi que les limites de ces 2 suites si $n \to \infty$. Interpréter les résultats à la lumière du théorème sur la continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un intervalle. En considérant les fonctions sur $\mathbb{R}$ $u_1 = f_1$ et, pour $n > 1$, $u_n = f_n - f_{n-1}$, montrer que même si une série de fonctions continues est convergente, sa somme n'est pas nécessairement continue.

7. (Etude d'une suite se ramenant à une série) Soit $x > 0$. Pour n entier positif ou nul on définit $P_n(x)$ par $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x(x+1)$ et, plus généralement $P_{n+1}(x) = (n+x)P_n(x)$. Montrer que

$$L(x) = \lim_{n\infty} \frac{P_n(x)}{n!n^{x-1}}$$

existe et est un nombre de $]0 + \infty[$. Méthode : considérer la série de terme général pour $n > 0$:

$$g_n(x) = \log(n+x) - x\log(n+1) + (x-1)\log n,$$

comparer sa somme partielle d'ordre $n-1$ avec $\log \frac{P_n(x)}{n!n^{x-1}}$, et, à l'aide d'un développement imité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que, pour $x > 0$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

converge vers un nombre noté $G(x)$.

Exercices d'analyse de Deug Mia 03, cours du vendredi 23 novembre 1996 (Gérard Letac)

1. (Continuité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions) On garde les notations de l'exercice précédent, et on pose pour $x > 0$ $h_n(x) = g'_n(x)$. Montrer que pour $x > 0$ fixé,
$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$
converge vers un nombre noté $H(x)$. Montrer que $h'_n(x) < 1/n^2$ et en déduire que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} h'_n(x)$$
converge normalement dans $]0+\infty[$. Pourquoi H est elle dérivable dans $]0+\infty[$? Pourquoi H est elle continue ? Pourquoi la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$
converge t elle uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset]0+\infty[$? Pourquoi G est elle dérivable dans $[a,b]$? Pourquoi G est elle dérivable dans $]0+\infty[$? Pourquoi G est elle deux fois dérivable ? Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout n, G est n fois dérivable. Même question pour L.
2. (Fonction hypergéométrique) On conserve la notation $P_n(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ déjà utilisée ci dessus. Soit a, b et c des nombres > 0. A l'aide du critère de d'Alembert, montrer que 1 est le rayon de convergence de la série entière
$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(a)P_n(b)}{P_n(c)} \frac{z^n}{n!}.$$
En utilisant l'équivalent $L(x)n^{x-1}$ de $P_n(x)/n!$ obtenu dans un exercice précédent, dire pour quels triplets (a,b,c) la série précédente converge lorsque $z = 1$.

Exercices d'algèbre de Deug Mia 03, cours du lundi 19 novembre 1996 (Gérard Letac)

1. (Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$) On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f. Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}. Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.
2. (Endomorphisme d'un espace de matrices) Soit K un corps commutatif quelconque, et soit $F = \mathcal{M}_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Si i et j sont des entiers compris entre 1 et n, on note par F_{ij} l'élément de F dont le coefficient (i, j) est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les F_{ij} forment une base de F. Dimension de F ? Soit D dans F et diagonale. Soient α et β dans K et soit l'endomorphisme Φ de F qui à la matrice X fait correspondre la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$. Calculer $\Phi(F_{ij})$. Φ est il un endomorphisme diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de D et de α et β.
3. (Endomorphisme diagonalisable dans $L(L(E))$) Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension n sur K, et soit $F = L(E)$ l'espace de ses endomorphimes. Soit a dans F diagonalisable et soit Φ dans $L(F)$ défini par $\Phi(x) = \alpha xa + \beta ax$. A l'aide de la question précédente, montrer que Φ est diagonalisable.
4. Mêmes hypothèses et notations qu'à l'exercice précédent. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E non nul, et soit $\vec{w}$ dans E. Montrer qu'il existe a dans F tel que $a(\vec{v}) = \vec{w}$. En déduire que $\{a(\vec{v}); a \in F\} = E$, et que si $f = \{f_{ij}; 1 \leq i, j \leq n\}$ est une base de F, alors la famille de vecteurs de E égale à
$$\{f_{ij}(\vec{v}); 1 \leq i, j \leq n\}$$
est une famille génératrice.
5. (Réciproque du 3) Mêmes hypothèses et notations qu'à l'exercice précédent, mais on suppose de plus que le corps K est celui des complexes. Soit a dans F : montrer que a possède au moins un vecteur propre $\vec{v}$. On note par μ la valeur propre correspondante. On suppose de plus que l'endomorphisme Φ dans $L(F)$ défini par $\Phi(x) = \alpha xa + \beta ax$ est diagonalisable, et on note par λ_{ij} et f_{ij} les valeurs propres et vecteurs propres correspondants. Montrer que l'élément de E $f_{ij}(\vec{v})$ est à son tour un vecteur propre de a quand il n'est pas nul, et préciser la valeur propre correspondante en fonction de μ, λ_{ij}, α et β. Déduire de l'exercice précédent que a est donc aussi diagonalisable.
6. (Caractérisation des multiples de l'identité) Soit a un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie sur le corps K tel que tout vecteur de E non nul soit un vecteur propre de a. Montrer qu'il existe α dans K tel que $a = \alpha \mathrm{id}_E$. Méthode : prendre 2 vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et considérer (α, β, γ) tels que $a(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$, $a(\vec{v}) = \beta\vec{v}$ et $a(\vec{u} + \vec{v}) = \gamma(\vec{u} + \vec{v})$.

Exercices d'algèbre de Deug Mia 03, cours du lundi 25 novembre 1996 (Gérard Letac)

1. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère les quatre matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer par récurrence que $\det B = \cos(n\theta)$ et que $\det C = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det C$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0, \pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n + A$ et $2I_n - A$ sont strictement positives. Imaginer une méthode analogue pour trouver les valeurs propres de D. (Vocabulaire : les polynômes de degré n définis par $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ et $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ s'appellent les polynômes de Tchebychev, respectivement de première et de deuxième espèce.)

2. On note par $S(n)$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques (n, n). Montrer que $< X, Y >= \mathrm{trace}\, XY$ définit sur $S(n)$ une structure euclidienne. Soit ensuite A une matrice réelle (n, n), pas nécessairement symétrique ; on note par A' sa matrice transposée. Si $X \in S(n)$, soit $g_A(X) = AXA'$. Montrer que g_A est un endomorphisme de l'espace euclidien $S(n)$ et que son adjoint est $g_{A'}$. Montrer que $g_{AB} = g_A \circ g_B$ et que $\det g_{AB} = \det g_A \det g_B$. Si A est inversible, quel est l'inverse de g_A?

   On note ensuite, pour $i = 1, \cdots, n$, par E_{ii} l'élément de $S(n)$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de (i, i), où le coefficient est égal à 1. On note, pour $1 \leq i < j \leq n$, par E_{ij} l'élément de $S(n)$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de (i, j) et de (j, i), où le coefficient est égal à 1. On considère également une matrice $D \in S(n)$ qui soit diagonale. Soit $(d_1, \cdots, d_n)$ les coefficients de cette diagonale. Montrer que pour $1 \leq i \leq j \leq n$, le vecteur $E_{ij} \in S(n)$ est un vecteur propre de g_D, et préciser la valeur propre correspondante à l'aide des d_j. L'endomorphisme g_D admet il une base de vecteurs propres ? Est il diagonalisable ? Montrer que $\det g_D = (d_1 \cdots d_n)^{n+1} = (\det D)^{n+1}$.

   On suppose ensuite $A \in S(n)$. Pourquoi existe t-il D diagonale et $U \in O(n)$ tels que $A = UDU'$? Montrer à l'aide de tout ce qui précède que $\det g_A = (\det A)^{n+1}$.

Exercices d'analyse de Deug Mia 03, cours du vendredi 29 novembre 1996 (Gérard Letac)

1. (Formule de Gauss) On conserve les hypothèses et notations de l'exercice précédent. Montrer par récurrence que si $0 < b < c$, et pour n entier ≥ 0, alors l'intégrale suivante I_n satisfait

$$I_n = \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt = \frac{P_n(b)}{P_n(c)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt.$$

(Méthode : faire une intégration par parties dans I_{n+1} avec $u(t) = t^{b+n}$ pour obtenir

$$I_{n+1} = \frac{n+b}{c-b}(I_n - I_{n+1}).)$$

Si $|z| < 1$ déduire du résultat précédent que la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(a) I_n \frac{z^n}{n!}$$

converge et a pour somme $I_0 F(a,b;c;z)$.

Montrer à l'aide de la formule du binôme généralisé que pour $|z| < 1$ et pour $0 \leq t \leq 1$ on a

$$(1-tz)^{-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(a)}{n!} t^n z^n.$$

Si z est fixé, montrer que la série précédente converge uniformément par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$. En permutant la somme d'une série et une intégrale, montrer alors la formule de Gauss :

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt = I_0 F(a,b;c;z).$$

Exercices d'analyse de Deug Mia 03, cours du vendredi 6 décembre 1996 (Gérard Letac)

1. Soit, pour n entier ≥ 0, c_n le nombre de couples (x, y) d'entiers ≥ 0 tels que $x + 2y = n$. Montrer que la série de terme général $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ est le produit de Cauchy des séries $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, où $a_n = 1$ pour tout n et où $b_n = 1$ si n est pair et $b_n = 0$ si n est impair. Calculer les rayons de convergence et les sommes à l'intérieur du disque de convergence des trois séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ et $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Par une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $C(z)$, en déduire l'expression explicite de c_n en fonction de n.

2. Soit $0 < \theta < \pi$. Rayon de convergence et somme à l'intérieur du disque de convergence des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} z^n$. Méthode : penser à la formule de Moivre.

3. Soit a et $b > 0$, et r_+ et r_- les 2 racines de l'équation $r^2 - ar - b = 0$, avec $r_- < 0 < r_+$. Soit $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de réels tels que pour tout entier $n \geq 0$ on ait
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
Montrer qu'il existe deux réels A_+ et A_- tels que pour tout entier $n \geq 0$ on ait $u_n = A_+(r_+)^n + A_-(r_-)^n$. En déduire le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ (discuter suivant les cas $A_+ \neq 0$, puis $A_+ = 0$ et $A_- \neq 0$, puis $A_+ = A_- = 0$).
Soit $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait
$$v_{n+2} \leq av_{n+1} + bv_n.$$
Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ est $\geq 1/r_+$ (Méthode : considérer la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ comme ci dessus telle que de plus $u_N = v_N$ et $u_{N+1} = v_{N+1}$, et montrer par récurrence sur n que si $n \geq N$ on a $0 \leq v_n \leq u_n$).

4. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On considère $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de réels tels que pour tout entier $n \geq 0$ on ait
$$tq_{n+1} = (n+2)q_{n+2} + (\lambda + n)q_n$$
avec $q_0 = 1$ et $q_1 = \lambda t$.
Soit $\epsilon > 0$ et $v_n = |q_n|$. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait
$$v_{n+2} \leq \epsilon v_{n+1} + (1 + \epsilon)v_n.$$
Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ est $\geq \frac{1}{1+\epsilon}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ est ≥ 1.
On considère la fonction $f_t :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$
Montrer que
$$tf_t(x) = \lambda x f_t(x) + (x^2 + 1)f'_t(x).$$
Quelle est la valeur de $f_t(x)$?

Exercices d'algèbre de Deug Mia 03, cours du lundi 2 décembre 1996 (Gérard Letac)

1. (Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs) Soit E un espace euclidien de dimension n, $B(E)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E et $S(E)$ l'espace des endomorphismes symétriques de E. Montrer que $\dim B(E) = \dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Si $a \in S(E)$, on pose
   $$B_a(\vec{x}, \vec{y}) = < \vec{x}, a(\vec{y}) > .$$
   Montrer que $B_a \in B(E)$. Montrer que $B_a(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E implique que $a = 0$. En déduire que $a \mapsto B_a$ est une application linéaire injective de $S(E)$ dans $B(E)$. Pourquoi est elle aussi surjective ?

   On note $\overline{S}_+(E)$ l'ensemble des a de $S(E)$ tels que B_a soit de plus positive. De même, on note $S_+(E)$ l'ensemble des a de $S(E)$ tels que B_a soit de plus définie-positive.

   Soit a dans $\overline{S}_+(E)$, et soit λ une valeur propre de a. Montrer que $\lambda \geq 0$ (Méthode : si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé, calculer $B_a(\vec{x}, \vec{x})$). Soit a dans $S_+(E)$, et soit λ une valeur propre de a. Montrer que $\lambda > 0$.

   Inversement, soit $a \in S(E)$. On suppose que toutes les valeurs propres de a sont ≥ 0. Montrer que $a \in \overline{S}_+(E)$ (Méthode : théorème spectral). On suppose que toutes les valeurs propres de a sont > 0; montrer que $a \in S_+(E)$. Si $a \in \overline{S}_+(E)$, montrer que $a \in S_+(E)$ si et seulement si $\det a \neq 0$.

   Soit $f \in L(E)$. Montrer que $f^*f \in \overline{S}_+(E)$. Si de plus $\det f \neq 0$, montrer que $f^*f \in S_+(E)$.
2. Soit D et D' deux droites vectorielles d'un plan euclidien orienté E. Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ des vecteurs de norme 1 qui engendrent D et D', et on suppose que $(\vec{u}, \vec{u'})$ est une base directe. On note $< \vec{u}, \vec{u'} >= \cos\alpha$, avec $0 < \alpha < \pi$. Soit s_D et $s_{D'}$ les symétries orthogonales par rapport à D et D'. Calculer l'angle des rotations $s_D \circ s_{D'}$ et $s_{D'} \circ s_D$ par rapport à α.
3. Soit r une rotation de l'espace euclidien E de dimension n. Montrer à l'aide du théorème de représentation des éléments du groupe orthogonal et de l'exercice précédent que r est le produit de n ou $n-1$ symétries de E par rapport à des hyperplans vectoriels (= sous espaces de dimension $n-1$).
4. On considère la matrice
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$
   Calculer son polynôme caractéristique, calculer A^2 et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de A.

Projet d'examen de Deug MIA 03, Janv.97 *(Durée : 4 heures. Aucun document. Barème :)*

Exercice :

Soit t réel. Trouver deux matrices réelles $(2,2)$ U et D telles que U soit orthogonale, D soit diagonale et

$$UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^t - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Problème :

Si x est réel fixé, le but du problème est de calculer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+n)^{n-1}}{n!} z^n$.

(A) Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée réelle d'ordre n qui soit triangulaire inférieure (c'est à dire que $t_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j \leq n$), et inversible.

1. Montrer que $T^{-1} = (t'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire inférieure (Méthode : dire pourquoi les t_{ii} sont non nuls, puis démontrer par récurrence sur i que $t'_{ik} = 0$ pour $k > i$).
2. On suppose de plus que T est orthogonale. Montrer que T est diagonale. Décrire toutes les matrices qui sont à la fois diagonales et orthogonales.

(B) Sur l'espace réel $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré $\leq d$ on considère la forme bilinéaire symétrique

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{d} P^{(i)}(-i)Q^{(i)}(-i).$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire (Méthode : si P a $a_p x^p$ pour terme de plus haut degré, calculer $P^{(p)}(-p)$).
2. Soit $(E_0, \cdots, E_d)$ la base de $\mathcal{P}_d$ définie par $E_i(x) = x^i$, et soit $(P_0, \cdots, P_d)$ la base orthonormale de $\mathcal{P}_d$ engendrée par le procédé de Schmidt à partir de $(E_0, \cdots, E_d)$ pour le produit scalaire ci dessus. Soit T_d la matrice carrée d'ordre $d+1$ définie par

   $$T_d = (P_i^{(j)}(-j))_{0\leq i,j\leq d}.$$

   Montrer que T_d est triangulaire inférieure et orthogonale. En utilisant le **A** et le fait que $\langle E_i, P_i\rangle$ est > 0, montrer que T_d est la matrice identité d'ordre $d+1$, c'est à dire que

   $$P_i^{(j)}(-j) = 0 \ \text{ si } i \neq j, \ = 1 \ \text{ si } i = j.$$

3. Si S est dans $\mathcal{P}_d$, calculer $\langle S, P_i\rangle - S_i^{(i)}(-i)$ à l'aide de la définition du produit scalaire et du 2). En déduire

   $$S(x) - \sum_{i=0}^{d} S^{(i)}(-i)P_i(x).$$

4. On considère le polynôme Q_j défini par $Q_j(x) = P'_{j+1}(x-1) - P_j(x)$. Calculer $Q_j^{(i)}(-i)$ à l'aide du 2) et $Q_j(x)$ à l'aide du 3).

5. On considère le polynôme $R_j(x) = P_j(x) - \frac{x(x+j)^{j-1}}{j!}$. Montrer que $R_j(0) = 0$ et, à l'aide du 4), que $R'_{j+1}(x-1) = R_j(x)$. En déduire par récurrence sur j que R_j est le polynôme nul. Montrer que pour tout S de $\mathcal{P}_d$ on a

$$S(x) = \sum_{i=0}^{d} S^{(i)}(-i)\frac{x(x+i)^{i-1}}{i!}.$$

(C) Soit x un réel non nul.

1. Calculer $\lim_{n\infty} n\log(1+\frac{1}{x+n})$, puis, à l'aide du critère de D'Alembert, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(x+n)^{n-1}}{n!}z^n$. On observera en particulier que R ne dépend pas de x.
2. Soit y un réel assez petit pour que $|y|e^{|y|} < R$. Pour d entier ≥ 0 on considère le polynôme

$$S_d(x) = 1 + yx + \frac{y^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{y^dx^d}{d!},$$

et on convient $S_d(x) = 0$ si d est un entier < 0. Montrer que $|S_d(x)| \leq e^{|yx|}$, que $S_d^{(i)}(x) = y^iS_{d-i}(x)$ et que $|S_d^{(i)}(-i)| \leq (|y|e^{|y|})^i$ quand i est un entier ≥ 0.
Déduire de cela et du **B**5) que

$$\lim_{d\to\infty} S_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{d\to\infty} S_d^{(i)}(-i)\frac{x(x+i)^{i-1}}{i!}.$$

Quelle est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(x+n)^{n-1}}{n!}z^n$ lorsque $z = ye^{-y}$?
En admettant la formule de Stirling $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}} = 1$, étudier la convergence de la série précédente si $y = 1$.

Université Paul Sabatier. Examen de Deug MIA 03, Janv.97

(Durée : 4 heures. Aucun document. Faites les calculs lentement et au brouillon. Le correcteur peut déduire des points pour le manque de soin ou les absurdités.

Barème : Ex.1 : 2,5 pts. Ex.2 : 1=2 pts ; 2=2 pts ; 3=2,5 pts. Pb : 1=1,5 pts ; 2=1,5 pts ; 3=2 pts ; 4=0,5 pt ; 5=3 pts ; 6=1,5 pts ; 7=1 pt.)

Exercice 1 :

Soit t réel. Trouver deux matrices réelles $(2,2)$ U et D telles que U soit orthogonale, D soit diagonale et

$$UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^t - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 :

1. $\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique e et a est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice représentative dans e est

$$[a]_e^e = A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Soit E_1 et E_2 les sous espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2, et F_1 et F_2 les sous espaces caractéristiques. Trouver une base de E_1, de E_2 et de F_1. En complétant la base de E_2, trouver une base de F_2.

2. Déduire de la question précédente une nouvelle base f de $\mathbb{R}^4$ telle que si (d, n) est la décomposition diagonal-nilpotent de a avec $dn = nd$, alors les matrices $[d]_f^f$ et $[n]_f^f$ représentatives dans la base f sont respectivement diagonale et triangulaire supérieure. Préciser $[a]_f^f$, $[d]_f^f$ et $[n]_f^f$.

3. Soit k un entier > 0. Calculer A^k (Méthode : exprimer d'abord d^k, n^k, $d^{k-1}n$ et enfin a^k dans la base f).

Tournez, s'il vous plait.

Problème :

1. Soit $a_0 = 1$ et, pour n entier > 0,
$$a_n = \frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
A l'aide de la formule de Stirling
$$n! \sim_{n\to\infty} n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi},$$
calculer $\lim_{n\infty}\sqrt{n}a_n$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n(2n+1)^2}$.
2. Soit I l'ensemble des x réels tels que la série
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$
converge. Trouver I. Montrer que cette série converge normalement sur I et que sa somme $F(x)$ est une fonction continue sur I.
3. Montrer à l'aide du cours que pour tout x de I on a $F(x) = \arcsin x$. En déduire que pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a
$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}\frac{(\sin\theta)^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$
En admettant la formule de Wallis : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta$, calculer
$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$
4. Soit $B = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Montrer que $B - A = B/4$ et trouver B.
5. On définit les fonctions f et u_n (n entier > 0) sur $[0,1]$ par $f(0) = f(1) = u_n(0) = u_n(1) = 0$ et , pour $0 < t < 1$, $f(t) = \log t \log(1-t)$ et $u_n(t) = -\frac{1}{n}t^n \log t$. Ces fonctions sont elles continues sur $[0,1]$? Pour quelle valeur de $t \in [0,1]$ la fonction u_n atteint elle son maximum ? Quel est ce maximum ? Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et, à l'aide du cours, calculer sa somme.
6. Déduire de la question précédente que
$$\int_0^1 \log t \log(1-t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}.$$
7. Calculer l'intégrale précédente à l'aide de la décomposition en éléments simples
$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$
et de la question 4.

Partiel de Deug MIA 03, Nov.97 *(Durée : 2 heures. Aucun document. Affichage des résultats le 21 novembre à 16 heures)*

(Dans ce qui suit, log désigne le logarithme népérien.)

Exercice 1 : Soit les fractions rationnelles

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = f(-x).$$

On considère les intégrales suivantes

$$F = \int_0^\infty f(x)dx, \; G = \int_0^\infty g(x)dx, \; H = \int_0^\infty [(2+2x)f(x) + (2-2x)g(x)]dx,$$

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^4+4}dx.$$

Montrer qu'elles convergent et les calculer. Méthode pour I : utiliser la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{x^4+4} = (\frac{1}{4} + \frac{x}{8})f(x) + (\frac{1}{4} - \frac{x}{8})g(x).$$

Exercice 2 : Trouver le développement en série entière au voisinage de 0 des trois fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{2-x}, \quad \frac{1}{(1-x)^2(2-x)},$$

et préciser leur rayon de convergence.

Soit, pour n entier ≥ 0, les trois nombres $a_n = n+1$, $b_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ et $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$. Calculer c_n.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $[-1, \infty[$ par $f(-1) = 0$ et , pour $x > -1$, $f(x) = (1+x)\log(1+x)$. Développer f en série entière au voisinage de $x = 0$, donner son rayon de convergence et montrer que cette série entière converge uniformément sur $[-1, 1]$. Si $x = \pm 1$, pourquoi la somme de la série est elle égale à $f(1)$ ou $f(-1)$?

Exercice 4 : On considère la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur $[0, \infty[$ définies par

$$g_n(x) = \log(n+x) - x\log(n+1) + (x-1)\log n,$$

ainsi que $h_n = g_n'$. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty h_n'(x)$ converge normalement dans $[0 + \infty[$ et que

$$\sum_{n=1}^\infty h_n(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^\infty g_n(x)$$

convergent vers des fonctions H et G définies sur $[0, \infty[$. Pourquoi H' existe-t-il ? Pourquoi G' existe-t-il et est-il égal à H?

Barême : Ex. 1 : 4 points, Ex. 2 : 5 points, Ex. 3 : 4 points, Ex. 4 : 7 points.

Corrigé du partiel de Mia 03 du 13 novembre 1997.

Exercice 1 : f et g sont continues sur $[0, +\infty[$ comme fractions rationnelles sans pôle réel. Elles sont équivalentes à $1/x^2$ au voisinage de l'infini. D'après le critère des intégrales de Riemann, puisque ici $\alpha = 2 > 1$, F et G convergent. On a

$$F = [\arctan(x+1)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{et} \quad G = [\arctan(x-1)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Ensuite, une primitive de la fonction $x \mapsto (2+2x)f(x) + (2-2x)g(x)$ est

$$P(x) = \log((x+1)^2+1) - \log((x-1)^2+1) = \log\frac{(x+1)^2+1}{(x-1)^2+1},$$

et donc H converge si et seulement si la limite quand X tend vers l'infini de $P(X) - P(0)$ existe et est finie. C'est le cas, et cette limite est $0-0$; la valeur de l'intégrale H est 0.

Enfin $I = \frac{F}{8} + \frac{G}{8} + \frac{H}{16}$ est convergente comme somme de 3 intégrales convergentes et sa valeur est $\pi/8$.

Exercice 2 : D'après la formule du binôme de Newton on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}[1 + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n} + \cdots] = \sum_0^\infty \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

D'après le cours, ou bien en appliquant la règle de D'Alembert, leurs rayons de convergence respectifs sont 1 et 2.

(Remarques : pour la première formule, on trouve dans les copies deux autres démonstrations toutes deux basées sur

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

La première dérive l'expression ci-dessus et utilise le théorème de dérivation d'une série entière ; la seconde écrit

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)}$$

et utilise le théorème sur les produits de Cauchy sur les séries entières en l'appliquant aux suites $a_n = b_n = 1$, qui donnent

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1.$$

Une erreur est de répondre à la question par le développement en série

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^\infty (2x-x^2)^k,$$

qui est correct si $-1 < 2x - x^2 < 1$, mais n'est pas une série entière et ne répond pas à la question posée.)

Ensuite, on décompose la fraction rationnelle suivante en éléments simples

$$\frac{1}{(1-x)^2(2-x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{2-x} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x}.$$

Le calcul de A, B, C peut être fait soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit, un peu plus élégamment, par la méthode du cache pour le calcul de A et C, et en faisant ensuite $x = 0$ pour déterminer le dernier coefficient B. Comme on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ,$$

avec pour rayon de convergence 1, on en déduit que

$$\frac{1}{(1-x)^2(2-x)} = \sum_0^\infty [(n+1) - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}]x^n = \sum_0^\infty (n + \frac{1}{2^{n+1}})x^n.$$

Son rayon de convergence se calcule par la règle de D'Alembert : si $u_n = (n + \frac{1}{2^{n+1}})|x|^n$, la limite de u_{n+1}/u_n est $|x|$ et le rayon de convergence est 1.

(Remarque : une autre solution consiste à écrire

$$\frac{1}{(1-x)^2(2-x)} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{2-x} = x\sum_0^\infty (n+1)x^n + \sum_0^\infty \frac{1}{2^{n+1}}x^n$$

$$= \sum_0^\infty nx^n + \sum_0^\infty \frac{1}{2^{n+1}}x^n = \sum_0^\infty (n + \frac{1}{2^{n+1}})x^n)$$

Finalement, un théorème du cours dit que si on fait le produit de Cauchy (c_n) de deux suites (a_n) et (b_n), alors le rayon de convergence R_c de $\sum_0^\infty c_n x^n$ est supérieur ou égal à R_a et R_b et que pour $|x| < \min(R_a, R_b)$ on a

$$\sum_0^\infty c_n x^n = \sum_0^\infty a_n x^n \sum_0^\infty b_n x^n.$$

Appliquons ce résultat aux deux suites a et b données dans l'exercice. D'après les 3 développements en séries entières déjà calculés on en conclut que

$$\sum_0^\infty c_n x^n = \sum_0^\infty (n + \frac{1}{2^{n+1}})x^n.$$

D'après l'unicité du développement en série entière on en déduit que pour tout entier n on a $c_n = n + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exercice 3 : D'après le cours, on a

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots + (-1)^{n-1}x^n/n + \cdots = x + \sum_{k=2}^\infty (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$x\log(1+x) = x^2 - x^3/2 + x^4/3 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n+1}/n + \cdots = \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{k-1}$$

et donc, en sommant ces deux lignes :

$$f(x) = x + \sum_{k=2}^\infty (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k(k-1)}.$$

Appliquons la règle de D'Alembert à $u_k = \left|(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k(k-1)}\right|$. On obtient $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = |x|$, et le rayon de convergence est donc 1.

(Remarque : une erreur commune dans les copies est de répondre à la question par le développement en série

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(1+x)x^k}{k},$$

qui est correct mais n'est pas une série entière et ne répond pas à la question posée.)

Ensuite, considérons la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ et pour $k \geq 2$ par $v_k(x) = (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k(k-1)}$. Alors pour tout x de $[-1,1]$ on a $|v_k(x)| \leq w_k = \frac{1}{k(k-1)}$. La série de terme général w_k est convergente, puisqu'elle est équivalente à la série de Riemann de terme général $1/k^2$, laquelle est convergente puisqu'ici $\alpha = 2 > 1$. Donc la série de terme général $v_k(x)$ est normalement convergente sur $[-1,1]$ et, d'après le cours, est uniformément convergente. Or les $v_k(x)$ sont des fonctions continues sur $[-1,1]$ donc leur somme $S(x)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$. On savait déjà que cette somme était égale à $f(x)$ pour $-1 < x < 1$, car le rayon de convergence de la série est 1. De plus f est une fonction continue sur $[-1,1]$: c'est clair pour $x = 1$. Pour $x = -1$, cela résulte des propriétés de croissance comparée de la puissance et du logarithme ("la puissance l'emporte sur le logarithme).

Par conséquent, $S - f$ est une fonction continue sur $[-1,1]$ dont on sait déjà qu'elle est nulle sur $]-1,1[$. Sa limite en ± 1 est 0 et donc $S(\pm 1) = f(\pm 1)$.

Exercice 4 : On a pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$

$$h_n(x) = \frac{1}{n+x} - \log(1+\frac{1}{n}) \text{ et } h_n'(x) = -\frac{1}{(n+x)^2}.$$

Il est clair que pour tout $x \geq 0$ on a $|h_n'(x)| \leq 1/n^2$, qui est le terme général d'une série de Riemann, qui est convergente puisqu'ici $\alpha = 2 > 1$. Donc la série de terme général $h_n'(x)$ converge normalement sur $[0+\infty[$, donc d'après le cours uniformément sur $[0+\infty[$.

Pour voir que les séries de terme général $h_n(x)$ et $g_n(x)$ convergent pour $x \geq 0$ fixé, calculons les développements limités correspondants d'ordre 2 en $1/n$. On obtient :

$$h_n(x) = \frac{1}{n(1+\frac{x}{n})} - \log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(1-\frac{x}{n}) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(n)$$

où $\epsilon(n)$ tend vers 0 si n tend vers l'infini. Donc $|h_n(x)|$ est équivalente à $|x - \frac{1}{2}|\frac{1}{n^2}$ si $x \neq 1/2$ et à $\frac{1}{2n^2}\epsilon(n)$ si $x = 1/2$. Dans les 2 cas, par le critère d'équivalence et le critère de Riemann, la série de terme général $h_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

De même :

$$g_n(x) = \log(1+\frac{x}{n}) - x\log(1+\frac{1}{n}) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} - x(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + \frac{1}{n^2}\epsilon_1(n)$$

où $\epsilon_1(n)$ tend vers 0 si n tend vers l'infini. Donc $|g_n(x)|$ est équivalente à $|\frac{x-x^2}{2}|\frac{1}{n^2}$ si x est différent de 0 ou 1, et à $\frac{1}{n^2}\epsilon_1(n)$ sinon. Dans les 2 cas, par le critère d'équivalence et le critère de Riemann, la série de terme général $g_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

Notons alors par $H_n(x)$ la n ième somme partielle de la série de terme général $h_n(x)$. On a vu que la suite H_n' converge uniformément sur $[0+\infty[$, et que la suite $H_n(x)$ converge en tout point $x \geq 0$ (donc ... en au moins un point) vers une fonction H. On est donc dans les conditions d'application du théotème du cours concernant la dérivation d'une suite de fonctions et on en conclut que

1) H est dérivable sur $[0+\infty[$,

2) que H' est la limite de H'_n,

3) que pour $b>0$ fixé, H_n converge uniformément sur l'intervalle borné $[0,b]$.

Notons enfin par $G_n(x)$ la n ième somme partielle de la série de terme général $g_n(x)$. On vient de voir que, pour $b>0$ fixé, la suite $G'_n = H_n$ converge uniformément sur $[0,b]$, et que la suite $G_n(x)$ converge en tout point $x \geq 0$ vers une fonction G. On est donc encore dans les conditions d'application du théorème du cours concernant la dérivation d'une suite de fonctions et on en conclut que

1) G est dérivable sur $[0,b]$,

2) que sur $[0,b]$, G' est la limite de $G'_n = H_n$ et est donc égal à H.

Comme ce dernier résultat est vrai pour tout b, G' existe et est égal à H sur tout $[0+\infty[$.

(Remarques : contrairement à ce qu'affirment de nombreuses copies, la série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0+\infty[$. En effet, h_n est décroissante, son maximum est atteint en 0 , son infinimum est sa limite à l'infini $-\log(1+\frac{1}{n})$, mais le supremum de sa valeur absolue est $\log(1+\frac{1}{n})$, qui est le terme général d'une série divergente, car équivalente à $1/n$. En revanche, le théorème cité du cours implique que $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0,b]$.

Enfin, quelques copies observent correctement qu'il suffit, toujours à cause du dit théorème, de montrer la convergence en un point des séries $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, et prennent le point $x=0$. Pour les h, cela ne change pas grand chose, mais l'économie est sustantielle pour les g,, puisque $g_n(0)=0$.)

Mia 03, Université Paul Sabatier, Devoir 3, à remettre au dernier TD de la semaine du 1 au 5 décembre 1997.

Exercice 1

1. Calculer la série de Fourier de la fonction h de période 2π définie par $x \mapsto |\sin x|$. La somme de cette série est elle partout égale à $h(x)$?
2. Utiliser le 1) pour calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \quad ; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1-16k^2}.$$

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit

$$M_0 = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|, \qquad M_1 = \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour $y > 0$:

$$\left| \int_a^b f(x)\cos(xy)dx \right| \leq \frac{1}{y}(2M_0 + (b-a)M_1).$$

Déduire de ceci et du 1) que

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)|\sin(tx)|dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 2

Soit z un nombre positif fixé. Calculer la série de Fourier *exponentielle* de la fonction f de période 2π définie pour $0 \leq x < 2\pi$ par $f(x) = \exp(zx)$. En déduire sa série de Fourier trigonométrique. Préciser la somme de celle ci si $x = 0$. A l'aide du théorème de Parseval, montrer que

$$\pi\frac{\exp(2\pi z)+1}{\exp(2\pi z)-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2}.$$

Université Paul Sabatier. Examen blanc de Deug MIA 03, Dec.97
(Durée : 3 heures. Aucun document.)

Exercice 4

On considère la fonction h définie dans $[0, \pi]$ par $h(x) = x(\pi - x)$. On considère aussi les deux fonctions f et g de période 2π définies ainsi :

f est paire et est égale à h dans l'intervalle $[0, \pi]$.

g est impaire et est égale à h dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Tracer les graphes des fonctions f et g sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$. Calculer leurs coefficients de Fourier trigonométriques ainsi que ceux de $f + g$, dire pour chacune des 3 fonctions si la série de Fourier converge, si sa somme est égale à la fonction en tout point x, en justifiant votre réponse.

Université Paul Sabatier. Examen de Deug MIA 03, 6 Janv.98

(Durée : 4 heures. Aucun document. Faites les calculs lentement et au brouillon. Le correcteur peut déduire des points pour le manque de soin ou les absurdités. Les trois exercices sont indépendants.) On désigne par $\log x$ le logarithme népérien de x.

Exercice 1 (*8 points*)

Soit $0 < t < 1$, t fixé.

1. Pour n entier ≥ 0, calculer l'intégrale $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(tx)dx$. (On mettra I_n sous la forme la plus simple possible, en particulier pour $n = 0$.) (*1,5 points*)
2. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ de période 2π et telle que pour $-\pi \leq x \leq \pi$ on ait $f(x) = \cos(tx)$. Tracer son graphe sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$ dans le cas particulier où $t = 1/3$. Dans le cas général pour t, donner la série de Fourier trigonométrique de f, énoncer un théorème général de convergence des séries de Fourier et en déduire que la série de Fourier de f converge au point x vers $f(x)$. (*2 points*)
3. Montrer à l'aide du 2) que

$$\pi \mathrm{cotg}(\pi t) = \frac{1}{t} - \left(\frac{2t}{1-t^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \right).$$

   Montrer aussi que la convergence de cette série est normale par rapport à t quand t varie dans $]0, 1[$. (*2 points*)
4. On prend maintenant $t \in [0, 1[$. Montrer que la série suivante

$$\log(1 - t^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)$$

   converge normalement dans $[0, 1[$. Pourquoi sa somme $F(t)$ est elle une fonction continue sur $[0, 1[$? Montrer à l'aide du 3) qu'il existe une constante C par rapport à t telle que $F(t)$ pour $0 < t < 1$ soit

$$C + \log \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

   Déterminer enfin C en faisant tendre t vers 0. (*2,5 points*)

Corrigé de l'examen de Mia 03 du 6 janvier 1998.

Exercice 1 : 1) Avec la parité on a

$$I_n = \int_0^{\pi} 2\cos nx \cos tx dx = \int_0^{\pi} (\cos(n+t)x + \cos(n-t)x)dx = \frac{\sin(n+t)\pi}{n+t} + \frac{\sin(n-t)\pi}{n-t} =$$

$$\frac{\sin t\pi \cos n\pi}{n+t} - \frac{\sin t\pi \cos n\pi}{n-t} = \frac{2(-1)^{n-1} t \sin t\pi}{n^2 - t^2}.$$

En particulier, $I_0 = \frac{2\sin t\pi}{t}$.

2) Le tracé du graphe sur l'arche $[-\pi, \pi]$ est immédiat. Et on répète ce tracé par périodicité (malheur à ceux qui ont cru que le graphe de f sur $[-\pi, 3\pi]$ était celui de la fonction $x \mapsto \cos(x/3)$. On a $f(-\pi) = f(\pi) = \cos \pi/3 = 1/2$. On remarque que la fonction f est continue, qu'elle est dérivable par morceaux et que aux points de la forme $(2k+1)\pi$ où la dérivée n'existe pas, la limite à droite et à gauche de la dérivée existe et est finie. La fonction f est donc une fontion continue et de classe C_1 par morceaux. Les coefficients de Fourier trigonométriques sont respectivement $a_n = I_n/\pi$ pour $n \geq 0$ (par définition de I_n) et $b_n = 0$ pour $n > 0$ (car la fonction f est paire). La série de Fourier de f est donc

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\sin t\pi}{t\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t \sin t\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - t^2} \cos nx.$$

Rappelons alors un théorème de convergence des séries de Fourier :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période 2π et de classe C_1 par morceaux. Alors sa série de Fourier trigonométrique converge et a $f(x)$ pour somme en tout point x.

Comme on l'a vu, la fonction f satisfait aux hypothèses de ce théorème : sa série de Fourier converge donc en tout point vers $f(x)$.

3) Dans l'égalité entre $f(x)$ et la somme de sa série de Fourier, faisons $x = \pi$. Comme $\cos n\pi = (-1)^n$, en mettant $\frac{2t \sin t\pi}{\pi}$ en facteur et en divisant l'égalité obtenue par $(\sin t\pi)/\pi$ on a l'égalité demandée. Ensuite, on remarque que pour $0 < t < 1$ et $n > 1$ on a

$$|\frac{2t}{n^2 - t^2}| = \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \frac{2}{n^2 - 1},$$

que la série de terme général $\frac{1}{n^2-1}$ est convergente d'après le critère de Riemann, puisque son terme général est équivalent à $1/n^a$ avec $a = 2 > 1$. Par conséquent, la série de terme général $\frac{1}{n^2-t^2}$ est normalement convergente dans $]0, 1[$.

4) De même, si $0 \leq t < 1$ on a

$$|\log(1 - t^2/n^2)| \leq |\log(1 - 1/n^2)| \sim 1/n^2.$$

Donc par le critère de Riemann à nouveau, la série de terme général $|\log(1 - 1/n^2)|$ converge et donc la série de terme général $\log(1 - t^2/n^2)$ converge normalement dans $[0, 1[$. Elle converge donc uniformément. Comme c'est une série de fonctions continues sur $[0, 1[$, sa somme $F(t)$ est continue sur $[0, 1[$.

Ensuite, on remarque que la série des dérivées est de terme général $\frac{-2t}{n^2-t^2}$ dont nous avons vu au 3) qu'elle était normalement convergente dans $]0, 1[$, donc uniformément convergente. On est donc dans les conditions d'application du théorème du cours sur la dérivation de la somme d'une série de fonctions, et on peut affimer que

$$F'(t) = -\left(\frac{2t}{1-t^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}\right) = \pi \text{cotg}(\pi t) - \frac{1}{t},$$

la dernière égalité découlant du 3). Enfin, on remarque que sur $]0,1[$,

$$(\log \frac{\sin(\pi t)}{\pi t})' = \pi \mathrm{cotg}(\pi t) - \frac{1}{t} = F'(t),$$

et il existe donc une constante C telle que sur $]0,1[$ on ait $F(t) = C + \log \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$. Pour déterminer C, utilisons le fait que F est continue en 0 et que par définition de F, on a $F(0) = 0$. La limite du second membre étant C, on a donc $C = 0$.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Devoir 1, à remettre à la dernière séance de travaux dirigés de la semaine du 13 au 18 mars 2000.

Soit n un entier > 1 fixé et soit E l'espace vectoriel réel des matrices (n,n) réelles.

1) Soit $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ et $e_{i_0,j_0} = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dans E définie par $x_{i_0j_0} = 1$ et $x_{ij} = 0$ si $(i,j) \neq (i_0,j_0)$. Montrer à l'aide des e_{i_0,j_0} que E est de dimension finie et donner sa dimension.

2) Si $x = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est dans E, on note $\mathrm{trace}\, x = \sum_{i=1}^n x_{ii}$ et x^T sa transposée, c'est à dire la matrice $x^T = (y_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $y_{ij} = x_{ji}$ pour $1 \leq i,j \leq n$. Montrer que $\mathrm{trace}\,(xx' - x'x) = 0$ pour tous x et x' de E. Montrer que $\mathrm{trace}\,(xx^T) = 0$ entraîne $x = 0$, et que $\mathrm{trace}\,(xy) \leq 0$ pour tout y de E entraîne $x = 0$. Montrer que la dérivée en 0 de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \det(I_n + tx)$ est égale à $\mathrm{trace}\, x$ ($I_n \in E$ est la matrice unité).

3) On munit désormais E d'une norme p. Démontrer que la fonction p est continue sur E. Pourquoi $S = \{x \in E; p(x) = 1\}$ est il un compact de E? Si $x \in E$ est fixé, pourquoi la fonction sur S définie par $y \mapsto \mathrm{trace}\,(xy)$ atteint elle son maximum ? (Méthode : observer que $y \mapsto xy$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel E). On désigne désormais par $p^*(x)$ la valeur de ce maximum. Montrer que p^* est une norme sur E.

4) Pourquoi la fonction sur S définie par $x \mapsto \det x$ atteint elle son maximum ? (Méthode : observer que $x \mapsto \det x$ est une fonction polynomiale sur E). On note désormais par x_0 un point de S où ce maximum est atteint. Pourquoi a t-on $\det x_0 > 0$? (Pensez que S comprend un multiple positif de I_n). Pourquoi a t-on $p^*(x_0^{-1}) \geq n$?

5) Le but de cette question est de montrer que $p^*(x_0^{-1}) \leq n$. On fixe h dans E et pour $t \geq 0$ on pose

$$f(t) = (1 + p(th))^n - \det(I_n + tx_0^{-1}h).$$

Montrer que $f(1) \geq 0$. Méthode : observer que si $x_0 + h \neq 0$ alors

$$\det\left(\frac{x_0 + h}{p(x_0 + h)}\right) \leq \det x_0,$$

et utiliser $\det(\lambda a) = \lambda^n \det a$ pour λ réel, $p(x_0) = 1$ et la sous additivité de p. Déduire de $f(1) \geq 0$ que $f(t) \geq 0$ pour tout t, et en utilisant $f(0) = 0$, et la définition de la dérivée, que $f'(0) \geq 0$. En déduire que $\mathrm{trace}\,(x_0^{-1}h) \leq np(h)$, puis que $p^*(x_0^{-1}) \leq n$.

6) Exemple. Montrer que $p(x) = (\mathrm{trace}\,(xx^T))^{1/2}$ définit une norme et que dans ce cas $p = p^*$. Méthode : pour un entier d convenable, utiliser le résultat du cours qui dit que

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^d$, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|x_1y_1 + \cdots + x_dy_d| \leq \|x\|\|y\|$.

Soit G l'ensemble des x de E tels que $xx^T = I_n$ et $\det x > 0$. Montrer que G est une partie compacte de E (Méthode : montrer que $x \mapsto xx^T$ est une application polynomiale de E dans E et que $\{I_n\}$ est un fermé de E). Montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices (appelé groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$).

On veut montrer que x_0 maximise $\det x$ sur S si et seulement si $x_0 \in G/\sqrt{n}$. Pour cela, on admet le résultat d'algèbre linéaire suivant :

Décomposition polaire d'une matrice carrée réelle : Si $x \in E$ et $\det x > 0$, alors il existe un triplet (u, v, d) avec u et v dans G, $d = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j > 0$ $\forall j = 1, \dots, n$, et $x = udv$.

Avec la notation précédente, montrer que si $\det x > 0$, alors $p(x)^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$. Démontrer par récurrence sur n le résultat suivant :

Inégalité des moyennes géométrique et arithmétique. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres ≥ 0, alors

$$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)^n$$

et l'égalité entraîne que tous les a_j sont égaux. (Méthode : montrer que la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (\frac{1+t}{n+1})^{n+1} - \frac{t}{n^n}$ est ≥ 0 , en examinant son tableau de variation ; appliquer cela à $t = a_{n+1}/(a_1 + \cdots + a_n)$).

Déterminer la valeur du maximum de det sur S en appliquant l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique aux $a_j = \lambda_j^2$, et conclure.

Solution du devoir 1, MIA 6, 2 ième semestre 1999-2000

1) Si $x = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$x = \sum_{i_0=1}^{n} \sum_{j_0=1}^{n} x_{i_0 j_0} e_{i_0,j_0}$$

ce qui montre que la famille finie de vecteurs de E formée par les e_{i_0,j_0} est génératrice et donc que E est de dimension finie. Si

$$\sum_{i_0=1}^{n} \sum_{j_0=1}^{n} x_{i_0 j_0} e_{i_0,j_0} = 0,$$

il est clair que $x_{i_0 j_0} = 0$ pour tous i_0, j_0 et donc la famille des e_{i_0,j_0} est indépendante. Etant indépendante et génératrice, elle forme donc une base de E. Elle a n^2 éléments, E est donc de dimension n^2.

2) Comme $(xx')_{ii} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} x'_{ji}$ par définition du produit de matrices, on en déduit que $\mathrm{trace}\, xx' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} x'_{ji}$. En faisant le changement de variables dans cette somme $i_1 = j$ et $j_1 = i$, il est clair que $\mathrm{trace}\, xx' = \mathrm{trace}\, x'x$. Si $x' = x^T$ alors $\mathrm{trace}\, xx^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$. C'est 0 seulement si $x_{ij}^2 = 0$ pour tous i et j et donc pour $x = 0$. Si $\mathrm{trace}\, xy \leq 0$ pour tout y, c'est vrai en particulier si $y = x^T$. Donc $\mathrm{trace}\, xx^T \leq 0$. Or on a vu que $\mathrm{trace}\, xx^T \geq 0$. Donc $\mathrm{trace}\, xx^T = 0$, et donc comme on l'a vu $x = 0$.

D'après le cours d'algèbre linéaire, le polynôme caractéristique de x satisfait

$$\det(x - \lambda I_n) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \mathrm{trace}\, x + \cdots + \det x.$$

Donc $\det(I_n + tx) = 1 + t\, \mathrm{trace}\, x + \cdots + t^n \det x$ et la dérivée en 0 de $t \mapsto \det(I_n + tx)$ est bien $\mathrm{trace}\, x$.

3) $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$. Donc $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$, et en échangeant les rôles de x et y, $p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$. Donc $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$, ce qui montre la continuité de p. L'ensemble S est borné par définition. L'ensemble $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ est fermé, car un singleton est toujours fermé dans un espace normé. Comme S est l'image inverse de ce fermé par l'application continue p, S est fermé dans E , donc compact. La fonction $y \mapsto xy$ de E dans E est continue, car elle est linéaire sur un espace de dimension finie. Donc $y \mapsto \mathrm{trace}\,(xy)$ est continue, comme composée de deux fonctions continues, ou même plus simplement en tant que forme linéaire sur un espace de dimension finie. Sa restriction au compact S est donc continue. Le théorème de Weierstrass garantit l'existence d'un y_x de S tel que $\mathrm{trace}\,(xy) \leq \mathrm{trace}\,(xy_x)$ pour tout y de S. Montrons que $p^*(x) = \mathrm{trace}\,(xy_x)$ définit une norme sur E. Pour tout y de S on a

$$\mathrm{trace}\,((x + x')y) = \mathrm{trace}\,(xy) + \mathrm{trace}\,(x'y) \leq p^*(x) + p^*(x'),$$

et donc $p^*(x + x') \leq p^*(x) + p^*(x')$. De même $\mathrm{trace}\,(\lambda xy) = \lambda \mathrm{trace}\,(xy)$ et donc si $\lambda \geq 0$ on a $p^*(\lambda x) = \lambda p^*(x)$. Si $\lambda < 0$, c'est plus subtil, et on utilise le fait que S est invariant par $y \mapsto -y$:

$$\max_{y \in S} \lambda \mathrm{trace}\,(xy) = \max_{y \in S} (-\lambda) \mathrm{trace}\,(x(-y)) =$$

$$(-\lambda) \max_{y \in S} \mathrm{trace}\,(x(-y)) = (-\lambda) \max_{-y \in S} \mathrm{trace}\,(x(-y) = (-\lambda) p^*(x).$$

Enfin $p^*(x) = 0$ implique $\mathrm{trace}\,(xy) \leq 0$ pour tout y de S, et donc pour tout y de E (en remplacant y par $y/p(y)$ on se ramène à un élément de E). Donc d'après le 2), $x = 0$. Les 3 axiomes d'une norme sont donc vérifiés pour p^*.

4) La fonction $x \mapsto \det x$ est polynomiale sur E, puisque avec les notations classiques de la signature ϵ sur le groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations de n entiers on a :

$$\det x = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma_i}.$$

Elle est donc continue, ainsi que sa restriction au compact S. Le théorème de Weierstrass garantit l'existence d'un x_0 de S tel que $\det x \leq \det x_0$ pour tout x de S. Le déterminant prend évidemment une valeur positive sur S en au moins un point, à savoir $I_n/p(I_n)$, qui est de déterminant $p(I_n)^{-n} > 0$. Donc $\det x_0 > 0$. Enfin par définition, pour tout y de S on a $p^*(x_0^{-1}) \geq \operatorname{trace} x_0^{-1} y$. Prenons en particulier $y = x_0$, qui est bien dans S. On en tire $p^*(x_0^{-1}) \geq \operatorname{trace} I_n = n$.

5) Pour tout h de E on a donc

$$\begin{aligned}
\det x_0 \det(I_n + x_0^{-1} h) &\stackrel{(1)}{=} \det(x_0 + h) \stackrel{(2)}{\leq} \det x_0 (p(x_0 + h))^n \\
&\stackrel{(3)}{\leq} \det x_0 (p(x_0) + p(h))^n \stackrel{(4)}{=} \det x_0 (1 + p(h))^n.
\end{aligned}$$

Ici, (1) vient de la factorisation par x_0, (2) résulte de l'inégalité du texte, de $\det(\lambda a) = \lambda^n \det a$ et est triviale si $x_0 + h = 0$. (3) vient de la sous additivité de la norme (encore appelée inégalité du triangle) et du fait que $\det x_0 > 0$. Et (4) vient du fait que x_0 est dans S. En simplifiant par $\det x_0$ on a $f(1) \geq 0$. $f(t) \geq 0$ s'obtient en remplacant h par th dans $f(1) \geq 0$. Comme $f(0) = 0$ et que f est un polynôme en t et est donc dérivable, on obtient

$$np(h) - \operatorname{trace}(x_0^{-1} h) \stackrel{(1)}{=} f'(0) \stackrel{(2)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(t) - f(0) \stackrel{(3)}{\geq} 0.$$

Ici, (1) vient du calcul de la dérivée de f avec l'aide de la question 2), (2) est la définition de la dérivée et (3) est la conséquence de l'étude du signe précédente. Donc si $y \in S$ on a $\operatorname{trace} x_0^{-1} y \leq n$. C'est dire que $p^*(x_0^{-1}) \leq n$.

6) p est une norme, d'après le fait que $E = \mathbb{R}^{n^2}$ est normé par

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2)^{1/2}$$

qui n'est autre que $(\operatorname{trace} xx^T)^{1/2}$ d'après la question 2. Ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que

$$\operatorname{trace}(xy) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ji} \leq \|x\| \|y^T\| = p(x)p(y^T) = p(x)p(y).$$

Donc $p^*(x) \leq p(x)$. Mais en prenant y dans S proportionnelle à x^T, c'est à dire $y = x^T/p(x)$, on voit que $p^*(x) \geq p(x)$ et donc que $p = p^*$.

$x \mapsto xx^T$ est une application quadratique de E dans E, donc polynomiale, et donc continue. $\{I_n\}$ est un singleton de l'espace normé E et est donc fermé. Donc $F_1 = \{x \in E; xx^T = I_n\}$ est fermé, comme image inverse d'un fermé par une fonction continue. De plus, si $x \in G$ alors $\det x \det x^T = 1$, ou $\det x = 1$ puisque $\det x = \det x^T$ et que $\det x > 0$ dans G. Comme det est continue, l'ensemble $F_2 = \{x \in E; \det x = 1\}$ est fermé comme image inverse du singleton $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc $G = F_1 \cap F_2$ est fermé, comme intersection de deux fermés. Ensuite, G est une partie bornée de E puisque les éléments de G sont tous de norme $\sqrt{n}$. G est donc compact. Finalement, G est un groupe puisque

- Si x et x' sont dans G alors $xx'(xx')^T = xx'x'^T x^T = xx^T = I_n$ et $\det(xx') = \det x \det x' > 0$: la loi est *interne*.
- L'*associativité* est héritée de l'associativité de la multiplication des matrices.
- I_n est dans G et est *élément neutre*.
- si $x \in G$ alors x^{-1} existe dans E et
$$x^{-1}(x^{-1})^T = x^{-1}(x^T)^{-1} = (x^T x)^{-1} = I_n$$
car $xx^T = I_n$ implique $x^T x = I_n$. Donc $x^{-1} \in G$ et ceci montre que tout élément de G a un *inverse* dans G.

Si $\det x > 0$ et si $x = udv$ comme ci dessus, alors $\det x = \lambda_1 \dots \lambda_n$ puisque on a vu que les éléments de G sont de déterminant 1. Ensuite

$$\begin{aligned} p(x)^2 &\overset{(1)}{=} \operatorname{trace}(udv(udv)^T) \overset{(2)}{=} \operatorname{trace}(udvv^T du^T) \overset{(3)}{=} \operatorname{trace} ud^2u^T \\ &\overset{(4)}{=} \operatorname{trace} u^T ud^2 \overset{(5)}{=} \operatorname{trace} d^2 \overset{(6)}{=} \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2. \end{aligned}$$

Ici, (1) vient de la définition de p, (2) de la propriété de la transposée vue à la question 2) avec $\operatorname{trace} xx' = \operatorname{trace} x'x$, (3) du fait que $v \in G$, (4) de la question 2) à nouveau, (5) du fait que $u \in G$ et (6) de la définition de la trace.

L'étude de la fonction g_n montre que $g_n'(t) = (\frac{1+t}{n+1})^n - \frac{1}{n^n}$ est < 0 si $0 \leq t < 1/n$ et est > 0 si $t > 1/n$. Le minimum de g_n est 0, il est strict et atteint en $t = 1/n$. Ceci fait, montrons par récurrence sur n l'énoncé suivant :

Pour tous $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ on a $a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)^n$ et l'égalité entraîne que tous les a_j sont égaux.

C'est trivialement vrai pour $n = 1$. Supposons que cela soit vrai pour n. Alors

$$a_1 \cdots a_n a_{n+1} \overset{(1)}{\leq} (\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n))^n a_{n+1} \overset{(2)}{\leq} (\frac{1}{n+1}(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}))^{n+1}.$$

Ici, (1) est l'hypothèse de récurrence, et (2) est la conséquence de $g_n(t) \geq 0$ appliqué à $t = a_{n+1}/(a_1 + \cdots + a_n)$, étant entendu que (2) est trivial si $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Enfin, supposons que $a_1 \cdots a_n a_{n+1} = (\frac{1}{n+1}(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}))^{n+1}$. C'est dire en particulier que (1) est une égalité. D'après l'hypothèse de récurrence on $a_1 = \ldots = a_n$ si $a_{n+1} \neq 0$. C'est dire aussi que (2) est une égalité ; puisque $g_n(t) = 0$ entraîne $t = 1/n$ on a $a_{n+1} = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{n}$. Donc : si $a_{n+1} = 0$ tous les a_j sont nuls ; si $a_{n+1} \neq 0$, tous les a_j sont égaux et la récurrence est étendue.

On en conclut que la valeur du maximum de det sur S est exactement $n^{-n/2}$. En effet si la décomposition polaire de x de S avec $\det x > 0$ est udv, alors

$$(\det x)^2 = \lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 \leq \left(\frac{1}{n}(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2)\right)^n = n^{-n}.$$

Donc ce max est $\leq n^{-n/2}$. En prenant $x = I_n/\sqrt{n}$, on voit que le max est $n^{-n/2}$. Ensuite, si $x_0 \in G/\sqrt{n}$ alors $\det x_0 = n^{-n/2}$ et et donc $\det x_0$ est maximum. Inversement, si $x_0 \in S$ réalise le maximum, alors ses λ_j^2 réalisent l'égalité dans l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique, et sont donc tous égaux : cela entraîne que si $x_0 = udv$ est décomposition polaire de x_0, alors $d = I_n/\sqrt{n}$. Comme on a vu que G est un groupe, cela entraîne que $x_0 \in G/\sqrt{n}$.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Devoir 2, à remettre à la dernière séance de travaux dirigés de la semaine du 27 au 31 mars 2000.
Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer que si un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est connexe, alors deux points x et y de U peuvent être reliés par un arc polygonal à cotés parallèles aux axes.

1) GRAPHE CONNEXE. Un *graphe* (S, A) est la donnée d'un ensemble S ("sommets") et d'une famille A ("arêtes") de parties de S à deux éléments (distincts). Si x et y sont dans S, un *chemin d'ordre* $n \geq 0$ *de* x *à* y est la donnée d'une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ de S telle que $s_0 = x$, $s_n = y$ et $\{s_{j-1}, s_j\}$ soit dans A pour tous $j = 1, 2, \ldots, n$ (remarquez que (x) est chemin d'ordre 0 de x à x). Si x et y sont dans S, on note $x \sim y$ si il existe $n \geq 0$ et un chemin d'ordre n de x à y. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur S. Le graphe est dit *connexe* si il n'y a qu'une seule classe d'équivalence sur S.

2) On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit A l'ensemble des couples de points x et y distincts de U tels que si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$, alors

- il existe *un et un seul* j dans $\{1, 2, \ldots, d\}$ tel que $x_j \neq y_j$;
- le segment $[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans U.

Comme dans le 1) on note $\sim$ la relation d'équivalence associée au graphe (U, A).

a) Dans le cas particulier où U est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(c, r)$ de centre c et de rayon $r > 0$, montrer que $c \sim x$ pour tout x de U et que le graphe (U, A) est connexe.

b) U étant un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$, soit U_x la classe d'équivalence du graphe (U, A) qui contient x. Soit $c \in U_x$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\overset{\circ}{B}(c, r) \subset U$. Montrer par le a) que $\overset{\circ}{B}(c, r) \subset U_x$ et que U_x est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenu dans U.

c) U étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, montrer par le b) que le graphe (U, A) est connexe.

Exercice 2. Soit A une partie bornée non vide de l'espace $E = \mathbb{R}^d$, où la norme euclidienne canonique est notée $\|x\|$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il y a une plus petite boule fermée qui contient A et qu'elle est unique. L'espace $V = E \times \mathbb{R}$ des (x, y) avec $x \in E$ et $y \in \mathbb{R}$ est normé par $p(x, y) = \|x\| + |y|$. Soit F l'ensemble des (c, r) de V tels que A soit contenu dans la boule fermée $\overline{B}(c, r)$ de centre c dans E et de rayon $r \geq 0$.

1. Montrer que F est un fermé non vide de V (Méthode : si (c_n, r_n) est une suite de F qui converge vers (c, r) et si $a \in A$, montrer que $\|a - c\| \leq r$).
2. Soit f la forme linéaire sur V définie par $f(x, y) = y$. Soit r_0 la borne inférieure de f sur F (c'est-à-dire le plus grand des minorants de $f(F)$). Soit $R > r_0$ fixé. Montrer que l'ensemble

$$K = \{(c, r) \in V; r \leq R\} \cap F$$

est fermé, non vide, et borné.

3. Montrer qu'il existe $c_0 \in E$ tel que $(c_0, r_0) \in F$.
4. Montrer que c_0 est unique (Méthode : si c_0' a la même propriété, montrer que le nombre $p = r_0^2 - \frac{1}{4}\|c_0 - c_0'\|^2$ est ≥ 0, et considérer la boule fermée de centre $c_1 = \frac{1}{2}(c_0 + c_0')$ et de rayon $r_1 = \sqrt{p}$).

Exercice 3 : FONCTIONS CROISSANTES DE $\mathbb{R}^d$ DANS $\mathbb{R}^d$.
On munit $E = \mathbb{R}^d$ du produit scalaire $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$. Soit C une partie de E et $g : C \rightarrow E$. On dit que g est *croissante* si pour tous x et y de C on a

$$\langle g(y) - g(x), y - x\rangle \geq 0.$$

1) On suppose g croissante, on prend $a > 0$ et on considère $g_a(x) = ax + g(x)$. Montrer que g_a est injective. Si C est fermé, et si de plus g est continue, montrer que $g_a(C)$ est fermé (Méthode : si $z_n = g_a(x_n)$ converge vers z, montrer que (x_n) a la propriété de Cauchy et en déduire que $z \in g_a(C)$).

2) On suppose C convexe ouvert et on considère la fonction différentiable $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On note par $f'(x)$ le gradient de f en x de C, c'est-à-dire l'élément de E tel qu'il existe une fonction $\epsilon_x : C \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(y) = f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle + \|y - x\|\epsilon_x(y), \quad \lim_{y\rightarrow x} \epsilon_x(y) = 0.$$

Si x et y sont dans C on note $\gamma_{x,y}(t) = (1-t)x+ty$ pour $0 \leq t \leq 1$, ainsi que $h_{x,y}(t) = f(\gamma_{x,y}(t))$. On dit que f est *convexe* si pour tous x et y de C alors $t \mapsto h'_{x,y}(t)$ est croissante sur $[0, 1]$. Montrer que f est convexe si et seulement si $x \mapsto f'(x)$ est croissante (Méthode : appliquer le théorème de composition des fonctions différentiables à $f \circ \gamma_{x,y}$ et comparer $h'_{x,y}(0)$ et $h'_{x,y}(1)$). Si $a > 0$ et $b \in E$ montrer la convexité de la fonction f définie sur E par

$$f(x) = \frac{a}{2}\|x\|^2 + \langle b, x\rangle.$$

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Partiel blanc.

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Donner une définition des compacts de E. Enoncer en détail une caractérisation des compacts de E (sans démonstration).

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne canonique

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

Les éléments x de E sont écrits comme des matrices colonnes, et x^T note la matrice ligne transposée. Soit $S = \{x \in E; \|x\|^2 = 1\}$. Soit V l'espace des matrices (d, d) réelles symétriques muni d'une norme quelconque. Le but de l'exercice est de montrer que

$$U = \{a \in V; x^T ax > 0 \quad \forall x \in S\}$$

est un ouvert de V.

1. Quelle sont les dimensions de V et de $E \times V$? On munit $E \times V$ d'une norme quelconque. Montrer que la fonction réelle sur $E \times V$ définie par $(x, a) \mapsto x^T ax$ est polynomiale.
2. Soit a dans $F = V \setminus U$. Pourquoi existe t-il x dans S tel que $x^T ax \leq 0$?
3. Soit (a_n) une suite de F qui converge vers $a \in V$. Soit $x_n \in S$ tel que $x_n^T a_n x_n \leq 0$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (n_k) tendant vers $+\infty$ et un x de S tel que $x^T ax \leq 0$. Montrer que F est un fermé de V.

Exercice 2 : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit $r > 0$ fixé. On note par $\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. Soit

$$F_1 = \cup_{x \in F} \overline{B}(x, r).$$

Le but de l'exercice est de montrer que F_1 est fermé.

Soit (y_n) une suite de F_1 qui converge vers $y \in E$. Montrer les faits suivants :

1. Pour tout n il existe $x_n \in F$ et $h_n \in \overline{B}(x, r)$ tels que $x_n = y_n + h_n$.
2. Il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ et $h \in \overline{B}(x, r)$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} h_{n_k} = h.$$

3. Le point $y + h$ est dans F et F_1 est fermé.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$. Trouver les points stationnaires de f.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Contrôle intermédiaire du 10 avril 2000. Durée : 2 heures.

Question de cours : Enoncer en détail le théorème de Weierstrass concernant les fonctions continues sur les compacts (sans démonstration).

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^d$. Les éléments x de E sont écrits comme des matrices colonnes, et x^T note la matrice ligne transposée. Soit V l'espace des matrices (d, d) réelles symétriques muni d'une norme quelconque. Montrer que

$$F = \{a \in V; x^T ax \geq 0 \quad \forall x \in E\}$$

est un fermé de V.

(Méthode : Montrer que pour tout $x \in E$ la fonction $a \mapsto x^T ax$ est une forme linéaire sur V et que l'ensemble $F_x = \{a \in V; x^T ax \geq 0\}$ est fermé).

Exercice 2 : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit K un compact de E. Le but de l'exercice est de montrer que la borne inférieure α de l'ensemble de nombres réels

$$A = \{\|x - y\|; \; (x, y) \in K \times F\}$$

est atteinte.

1. Montrer qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n \geq 1}$ de $K \times F$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait
$$\alpha \leq \|x_n - y_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$$
et qu'il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ et $x_0 \in K$ tels que
$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0.$$
2. Soit $R > \alpha$ et $K_1 = \overline{B}(x_0, R) \cap F$. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que si $k \geq k_0$ alors $y_{n_k} \in K_1$.
3. Montrer qu'il existe $y_0 \in K_1$ tel que pour tout $y \in K_1$ on a $\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y\|$.
4. Montrer que $\alpha = \|x_0 - y_0\|$. Pourquoi $\alpha > 0$ si F et K sont disjoints ?

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Devoir 3, à remettre à la dernière séance de travaux dirigés de la semaine du 22 au 26 mai 2000.
Problème 1. Soit n un entier >0. Si $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ on convient dans la suite

$$p_0 = 1 - p_1 - \ldots - p_n.$$

On définit $T = \{p \in \mathbb{R}^n;\ p_j > 0\ \forall j = 0, 1, \ldots, n\}$.

1. Dessiner T dans le cas où $n = 2$.
2. Pourquoi les fonctions $p \mapsto p_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ sont elles continues sur $\mathbb{R}^n$? Pourquoi T est il ouvert ? Pourquoi T est il borné ? Pourquoi la fermeture $\overline{T}$ de T est elle égale à $\{p \in \mathbb{R}^n;\ p_j \geq 0\ \forall j = 0, 1, \ldots, n\}$?
3. On se fixe des nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$. Pourquoi $D(p) = a_0p_0 + \cdots a_np_n$ est il >0 sur $\overline{T}$? Pour $p \in \overline{T}$, on note $N(p) = \sum_{j=0}^{n} p_j \log p_j$ (en adoptant la convention $0 \log 0 = 0$ pour donner un sens à cette expression si p appartient à la frontière $\overline{T} \setminus T$ de T).
   On note alors $F(p) = N(p)/D(p)$. Montrer que si le réel t tend vers 0 par valeurs positives, alors $t \log t$ tend vers 0. En déduire que N et F sont des fonctions continues sur $\overline{T}$. Montrer qu'il existe un point dans $\overline{T}$ sur lequel F atteint son minimum. Le but du problème est de trouver le minimum de F sur le compact $\overline{T}$ et de montrer qu'il est atteint en un seul point.
4. Si $p \in T$, calculer $\frac{\partial p_0}{\partial p_1}$, $\frac{\partial D}{\partial p_1}(p)$, $\frac{\partial N}{\partial p_1}(p)$ et $\frac{\partial F}{\partial p_1}(p)$.
5. Soit S l'ensemble des points p de T tels que la différentielle
   $$F'(p) = (\frac{\partial F}{\partial p_1}(p), \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_n}(p))$$
   s'annule. On veut montrer que S est formé d'un seul point. Pour cela, montrer qu'il existe un et un seul nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que
   $$e^{a_0r} + e^{a_1r} + \cdots + e^{a_nr} = 1$$
   (Méthode : montrer que la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto e^{a_0t} + e^{a_1t} + \cdots + e^{a_nt}$ est strictement croissante et est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, \infty[$.) Montrer ensuite que si $p \in S$ alors le nombre $\lambda = a_jF(p) - \log p_j$ ne dépend pas de j, puis que $\lambda = 0$, puis que $p_j = e^{a_jr}$ et que $F(p) = r$. En déduire que S ne comprend qu'un seul point, qu'on notera dans la suite par p^*.
6. Soit A un sous ensemble non vide de $\{0, 1, \ldots, n\}$. Soit
   $$T_A = \{p \in \overline{T};\ p_j > 0\ si\ j \in A,\ p_j = 0\ si\ j \notin A\}.$$
   Quels sont les ensembles T_A si $A = \{0, 1, \ldots, n\}$? Si $A = \{1\}$? Si $A = \{0\}$? Pourquoi les T_A sont ils deux à deux disjoints ? Pourquoi $\overline{T}$ est il l'union de tous les T_A?
7. Si A est un sous ensemble non vide de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on note n_A le nombre d'éléments de A moins 1. En appliquant la question 5) à $\mathbb{R}^{n_A}$ et à la restriction F_A de F à T_A, montrer qu'il existe un seul nombre r_A tel que $\sum_{j \in A} e^{a_jr_A} = 1$, et que si S_A est l'ensemble des points de T_A où la différentielle de F_A s'annule, alors S_A est réduit à un seul point p^*_A, avec $F(p^*_A) = F_A(p^*_A) = r_A$.
8. Montrer que $r_B > r_A$ si $B \subset A$.

9. Soit p un point de $\overline{T}$ où le minimum absolu de F est atteint. Montrer qu'il existe un et un seul A tel que $p \in T_A$. Montrer que $p \in S_A$, que $p = p_A^*$, que le minimum absolu est r_A. Conclure avec la question 8) que le minimum absolu est r et qu'il est atteint au seul point p^*.

Problème 2 : *Les fonctions harmoniques sur la sphère sont constantes.* Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^∞ complexes définies sur $]0,\infty[$ et soit $T : E \to E$ défini par $T(f)(\theta) = \sin\theta f'(\theta)$.

1. Soit λ réel. Trouver les f de E tels que $T(f) = \lambda f$ (distinguer $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$).
2. Soit λ réel non nul. Si f est dans E, montrer que $T^2(f) = \lambda^2 f$ si et seulement si il existe A et B tels que $f(\theta) = A(\tan\frac{\theta}{2})^\lambda + B(\tan\frac{\theta}{2})^{-\lambda}$ (utiliser le fait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimension 2). Si de plus f est bornée, en déduire que f est la fonction nulle.
3. Trouver les f de E tels que $T^2(f) = 0$. Si de plus f est bornée, en déduire que f est une fonction constante.
4. Soit F l'espace des fonctions C^∞ complexes définies sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, notées $(\varphi,\theta) \mapsto g(\varphi,\theta)$, telles que
$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}g + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)g = 0,$$
et telles que pour θ fixé la fonction $\varphi \mapsto g(\varphi,\theta)$ soit de période 2π. Pour n entier relatif on pose $a_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi,\theta)e^{-in\varphi}d\varphi$. Montrer que $a_n \in E$ et que $T^2(a_n) = n^2 a_n$. En déduire que si g de F est bornée alors a_0 est constante et que $a_n = 0$ si $n \neq 0$ et donc, d'après le cours sur les séries de Fourier, que g est constante.
5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\Delta f = 0$ (où Δ est le Laplacien) et telle que si (x,y,z) est fixé dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, alors $r \mapsto f(rx,ry,rz)$ est constante sur $]0,+\infty[$. Pour (φ,θ) dans $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, on pose
$$g(\varphi,\theta) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$
Montrer que g est dans F et que g est bornée. En déduire que f est constante.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Contrôle intermédiaire du 29 mai 2000. Durée : 2 heures.

Question de cours : Donner (sans démonstration) une caractérisation des parties fermées bornées d'un espace normé de dimension finie en termes de suites.

Exercice 1 : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit K un compact de E. Le but de l'exercice est de montrer que la borne inférieure α de l'ensemble de nombres réels $A = \{\|x - y\|;\ (x, y) \in K \times F\}$ est atteinte.

1. Montrer qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ de $K \times F$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $\alpha \leq \|x_n - y_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$ et qu'il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ ainsi qu'un x_0 dans K tels que $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0$.
2. Soit $R > \alpha$ et $K_1 = \overline{B}(x_0, R) \cap F$. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que si $k \geq k_0$ alors $y_{n_k} \in K_1$ (Méthode : utiliser $\|x_0 - y_{n_k}\| \leq \|x_0 - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\|$).
3. Pourquoi K_1 est il compact ? Utiliser cela et le 2) pour montrer qu'il existe $y_0 \in K_1$ tel que $\alpha = \|x_0 - y_0\|$.

Exercice 2 : On note $D =]0, \infty[^2$. Soit $\varphi : D \to D$ définie par

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (x + y, y/x).$$

1. Montrer que φ est une bijection de D sur D, et calculer sa fonction réciproque $\psi : (u, v) \mapsto \psi(u, v)$.
2. Calculer les matrices jacobiennes $\varphi'(x, y)$ et $\psi'(u, v)$.
3. Si $f : D \to \mathbb{R}$, est de classe C^1, soit $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f \circ \psi(u, v)$. Pourquoi a t-on $f(x, y) = g \circ \varphi(x, y)$? Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial u} \circ \varphi(x, y)$ et de $\frac{\partial g}{\partial v} \circ \varphi(x, y)$ et à l'aide de la question 2.
4. Soit F l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tous (x, y) de D on ait
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(x + y)f(x, y).$$
Montrer que si f est dans F et si $g = f \circ \psi$, alors pour tous (u, v) de D on a $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3g(u, v)$. En considérant l'équation différentielle classique $z'(t) = 3z(t)$, trouver toutes les fonctions g de classe C_1 sur D satisfaisant $\frac{\partial g}{\partial u} = 3g$. En déduire tous les éléments de F.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Examen du 15 juin 2000. Durée : 3 heures.

Question de cours : Enoncer (sans démonstration) la formule de Green-Riemann concernant les champs de vecteurs d'un plan orienté.

Problème :

1. *(Volume de la calotte sphérique)* Soit $R > 0$ et $0 < a < 1$. On considère le disque
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2(1 - a^2)\}.$$
et la fonction sur D $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Calculer par coordonnées polaires $I(R, a) = \int\int_D (f(x, y) - aR)dxdy$. Contrôler le résultat en faisant $a = 0$ et $a = 1$.
2. *(Aire de la calotte sphérique)* Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x} = -x/f$ et calculer par coordonnées polaires
$$J(R, a) = \int\int_D (1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2)^{1/2} dxdy.$$
Contrôler le résultat en faisant $a = 0$ et $a = 1$.
3. Pour $0 < a < 1$ on pose $g(a) = (1 - a^2)^{-3/2}(2 + 3a - a^3)$, et, pour $s > 1$ on pose $h(s) = g(\frac{s-1}{s+1})$. Calculer h, h', h'' et montrer que $h''(s) > 0$ pour tout $s > 1$.
4. On considère la fonction $k :]1, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$k(s_1, s_2) = \frac{h(s_1) + h(s_2)}{(s_1 + s_2 + 3)^{3/2}}$$
où $h(s) = \frac{1}{2}(s^{3/2} + 3s^{1/2})$. Montrer que k a un et un seul point stationnaire qu'on calculera (Méthode : montrer à l'aide du 3) que $h'(s_1) = h'(s_2)$ entraîne $s_1 = s_2$.)
5. La double-bulle (de savon) de paramètres $r > 0$, $0 < a_1 < 1$ et $0 < a_2 < 1$ a la forme de deux sphères tronquées de rayons respectifs $R_1 = r(1 - a_1^2)^{-1/2}$ et $R_2 = r(1 - a_2^2)^{-1/2}$ accolées le long d'une paroi plane qui est un disque de rayon r. La quantité de savon est représentée par la somme $Q(r, a_1, a_2)$ des aires des sphères tronquées et de l'aire de la paroi plane. Le volume $V(r, a_1, a_2)$ de la double bulle est la somme des volumes des deux sphères tronquées. Si $Q = q$ est connu, le but du problème est de trouver r, a_1, a_2 pour que V soit minimum. Justifier les formules
$$\begin{aligned} V(r, a_1, a_2) &= \frac{4}{3}\pi R_1^3 - I(R_1, a_1) + \frac{4}{3}\pi R_2^3 - I(R_2, a_2) \\ &= \frac{1}{3}\pi r^3 (g(a_1) + g(a_2)), \\ Q(r, a_1, a_2) &= 4\pi R_1^2 - J(R_1, a_1) + 4\pi R_2^2 - J(R_2, a_2) + \pi r^2 \\ &= 2\pi r^2 (\frac{1}{1 - a_1} + \frac{1}{1 - a_2} + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$
6. Montrer que si $Q = q$ et que si on écrit $a_1 = \frac{s_1 - 1}{s_1 + 1}$ et $a_2 = \frac{s_2 - 1}{s_2 + 1}$ avec $s_1 > 1$ et $s_2 > 1$, alors $V = Ck(s_1, s_2)$, où C est une constante dépendant de q qu'on calculera. Si on admet que le point stationnaire trouvé au 4) fournissait un minimum absolu de k, trouver les valeurs de a_1, a_2 et r qui minimisent le volume de la double-bulle quand q est donné.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Examen du 15 juin 2000. Supplément Ortiz Durée : 3 heures.

Exercice 3 Considérons une courbe C paramétrée par une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, notée $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, telle que $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \neq (0,0)$ pour tout $t \in [a,b]$. On dira par la suite qu'un vecteur $u = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est tangent à la courbe C au point $\gamma(t)$ de C si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\gamma'(t)$.

1) Soit D un ouvert connexe de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ dont la frontière C est une courbe fermée simple de classe C^1 orientée positivement. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que pour tout (x_1, x_2) de C, le vecteur gradient $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2})$ est tangent à C au point (x_1, x_2). Montrer que l'intégrale curviligne $\int_C f\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1 - f\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_2$ est nulle.

2) On suppose de plus que sur $\mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$. A l'aide d'un théorème du cours et du 1), montrer que

$$\int\int_D [(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2] dx_1 dx_2 = 0.$$

En déduire que f est constante sur D.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Examen du 4 septembre 2000.

Durée : 3 heures. Affichage des résultats le mercredi 12 septembre à 16 heures.

Question de cours : Enoncer (sans démonstration) la formule de Green-Riemann concernant les champs de vecteurs d'un plan orienté.

Exercice A : Soit la fonction réelle f définie dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y/D$, où $D = 1 + x^2 + y^2$. Calculer les cinq dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Montrer que f a deux points stationnaires et dire pour chacun d'eux si c'est un maximum, un minimum ou un point selle.

Exercice B : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit K un compact de E. Le but de l'exercice est de montrer que la borne inférieure α de l'ensemble de nombres réels $A = \{\|x-y\|;\ (x,y) \in K \times F\}$ est atteinte.

1. Montrer qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n \geq 1}$ de $K \times F$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $\alpha \leq \|x_n - y_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$ et qu'il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ ainsi qu'un x_0 dans K tels que $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0$.
2. Soit $r > \alpha$ et soit K_1 l'intersection de F et de la boule fermée de centre x_0 et de rayon r. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que si $k \geq k_0$ alors $y_{n_k} \in K_1$ (Méthode : utiliser $\|x_0 - y_{n_k}\| \leq \|x_0 - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\|$).
3. Pourquoi K_1 est il compact ? Utiliser cela et le 2) pour montrer qu'il existe $y_0 \in K_1$ tel que $\alpha = \|x_0 - y_0\|$.

Exercice C : Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si elle est infiniment différentiable et si pour tout $c = (c_1, c_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $r > 0$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c_1 + r\cos t, c_2 + r \sin t) dt = f(c_1, c_2).$$

Dans la suite, $\overline{B}(c,r)$ désigne la boule fermée de centre c et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique, et Δf désigne le laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

1. Si f est harmonique, montrer par dérivation sous le signe somme par rapport à r que
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t) \cos t + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1 + r\cos t, c_2 + r \sin t) \sin t \right) dt = 0.$$
2. Si f est harmonique, on considère le champ de vecteurs (P,Q) sur $\mathbb{R}^2$ défini par
$$P(x_1, x_2) = -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad Q(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$
et le cercle Γ orienté dans le sens trigonométrique, de centre c et de rayon r. Montrer à l'aide du 1) que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma P dx_1 + Q dx_2$ est nulle.
3. Avec les hypothèses, les notations et le résultat du 2), et à l'aide de la formule de Green Riemann, montrer que
$$\int\int_{\overline{B}(c,r)} \Delta f dx_1 dx_2 = 0.$$

4. On suppose que f est harmonique. Déduire du 3) que Δf est identiquement nul. (Méthode : s'il existait c dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\Delta f(c) \neq 0$, montrer qu'il existerait $r > 0$ tel que $\Delta f(x)$ est non nul et du signe de $\Delta f(c)$ pour tout x de $\overline{B}(c, r)$ et montrer que cela contredit 3).

Barême : Qc : 2 points, A : 2,5+2,5, B1 : 2, B2 : 2, B3 : 2, C1 : 1, C2 : 2, C3 : 2, C4 : 2.

Deug MIA 6, Université Paul Sabatier, 2 ème semestre 1999-2000.
Examen du 4 septembre 2000. Corrigé.

Question de cours. Soit $(x_1, x_2) \mapsto (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ orienté. Soit Γ une courbe simple orientée dans le sens trigonométrique et qui est la frontière d'un ouvert borné D. La formule de Green Riemann assure l'égalité suivante entre une intégrale double et une intégrale curviligne :

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 = \int_\Gamma P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2.$$

Exercice A. Les 5 dérivées partielles demandées sont les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy}{D}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1+x^2-y^2}{D},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2y}{D^3}(1 - 3x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{D^3}(1 - 3y^2 + x^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y}{D^3}(1 - 3y^2 + x^2).$$

Le système d'équations donnant les points stationnaires est équivalent au système

$$2xy = 1 + x^2 - y^2 = 0$$

et ses solutions sont $A = (0, 1)$ et $B = (0, -1)$. Au point A la matrice hessienne des dérivées secondes est

$$\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La forme quadratique $q(h, k) = -(h^2 + k^2)/2$ est toujours négative et le point stationnaire A fournit un maximum relatif. Au point B la matrice hessienne des dérivées secondes est

$$\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

La forme quadratique $q(h, k) = (h^2+k^2)/2$ est toujours positive et le point stationnaire B fournit un minimum relatif.

Exercice B. 1. α étant le plus grand des minorants de A, cela entraîne que pour tout $\epsilon > 0$ il existe a_ϵ dans A tel que $\alpha \leq a_\epsilon \leq \alpha + \epsilon$. Tout élément de A étant de la forme $\|x - y\|$, avec $(x, y) \in K \times F$, il existe donc pour tout $\epsilon > 0$ un couple $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in K \times F$ tel que

$$\alpha \leq \|x_\epsilon - y_\epsilon\| \leq \alpha + \epsilon.$$

Appliquons ce principe à $\epsilon = 1/n$, et notons (x_n, y_n) plutôt que $(x_{1/n}, y_{1/n})$: on a ainsi l'existence demandée de (x_n, y_n).

Appliquons ensuite le fait que K est compact. D'après le cours, on sait que si une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans un compact, alors on peut en extraire une sous suite qui converge vers un point du compact. Donc il existe $x_0 \in K$ et une suite croissante d'entiers (n_k) telle que x_{n_k} converge vers x_0.

2. Soit $\epsilon > 0$. Puisque n_k tend vers l'infini, il existe un entier $k_1(\epsilon)$ tel que si $k \geq k_1(\epsilon)$, alors $1/n_k \leq \epsilon$, et donc, par définition de (x_n, y_n), également $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \leq \alpha + 1/n_k \leq \alpha + \epsilon$. De même,

puisque x_{n_k} converge vers x_0, il existe un entier $k_2(\epsilon)$ tel que si $k \geq k_2(\epsilon)$, alors $\|x_0 - x_{n_k}\| \leq \epsilon$. Prenons maintenant en particulier $\epsilon = \frac{1}{2}(r-\alpha)$. Prenons $k_0 \geq k_1(\epsilon)$ et $k_0 \geq k_2(\epsilon)$. Alors si $k \geq k_0$ on a

$$\|x_0 - y_{n_k}\| \overset{(1)}{\leq} \|x_0 - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{2}(r-\alpha) + (\alpha + \frac{1}{2}(r-\alpha)) = r :$$

l'inégalité (1) est l'inégalité du triangle, l'inégalité (2) vient du fait que $k \geq k_1(\epsilon)$ et du fait que $k \geq k_2(\epsilon)$. Au total, le point y_{n_k} est donc dans la boule de centre x_0 et de rayon r. Il est aussi dans F par définition, et donc dans K_1.

3. K_1 est borné, car contenu dans la boule $\overline{B}(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r. De plus c'est l'intersection du fermé F et de $\overline{B}(x_0, r)$ qui est fermé d'après un résultat du cours. Donc K_1 est fermé, et donc compact d'après la définition des compacts. De la suite infinie

$$(y_{n_k})_{k \geq k_0}$$

du compact K_1 on peut extraire une sous suite qui converge vers un point y_0 de K_1, d'après le théorème du cours rappelé plus haut. Comme on avait $\alpha \leq \|x_n - y_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$, cela entraîne que $\alpha = \|x_0 - y_0\|$ et achève la démonstration.

Exercice C. 1. Observons que $(r,t) \mapsto f(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t)$ est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. On est donc dans les conditions d'application du théorème du cours sur la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre pour la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t)dt.$$

Comme f est harmonique par hypothèse, la dérivée de la fonction précédente est nulle et on peut écrire la formule demandée, en appliquant non seulement le théorème cité, mais aussi le théorème de dérivation d'une fonction composée.

2. Paramétrons le cercle Γ par

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t).$$

Alors $dx_1 = -r\sin t dt$ et $dx_2 = r\cos t dt$. Par définition de l'intégrale curviligne on obtient

$$\int_\Gamma P dx_1 + Q dx_2 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t) r\cos t + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t) r\sin t\right) dt$$

qui est nulle d'après le 1.

3. Observons que $\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} = \Delta f$. En appliquant la formule de Green Riemann telle que rappelée dans la question de cours, on a le résultat demandé avec l'aide de la question 2.

4. Supposons que il existe $c \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Delta f(c) \neq 0$. Supposons pour simplifier $\Delta f(c) > 0$. Alors l'ensemble $U = \{(x_1, x_2); \Delta f(x_1, x_2) > 0\}$ n'est pas vide. De plus, comme f est de classe C^2, alors $(x_1, x_2) \mapsto \Delta f(x_1, x_2)$ est continue, et donc U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, comme image inverse d'une fonction continue réelle de l'ouvert $]0, \infty[$ de $\mathbb{R}$. Comme $c \in U$ et que U est un ouvert, il existe un nombre $r > 0$ tel que $\overline{B}(c, r) \subset U$. Comme $\overline{B}(c, r)$ est compact, la fonction continue Δf atteint son minimum m sur ce compact, et ce minimum m est donc strictement positif, puisque atteint en un point de U. Donc on a la contradiction

$$0 = \int\int_{\overline{B}(c,r)} \Delta f dx_1 dx_2 \geq \int\int_{\overline{B}(c,r)} m dx_1 dx_2 = \pi r^2 m > 0.$$

Le cas où $\Delta f(c) < 0$ se traite de facon semblable.

Deug 2 ième année. Exercices facultatifs, semaine du 2 octobre 2000.
(Gérard Letac).

1. *Calculs explicites de sommes partielles.* Dans les séries suivantes $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, donner une expression simple de la somme partielle $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ (en montrant par récurrence sur n que cette expression simple est la bonne). Calculer aussi les limites des suites $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(s_n)_{n\geq 1}$, dire si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge ou converge, et donner sa somme dans ce dernier cas.
$$u_k = \log(\frac{k+1}{k}), \quad u_k = \log(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}),$$
$$u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, u_k = \frac{1}{k^2(k+1)}, \quad u_k = \frac{k}{(k+1)^2}$$
(pour les trois dernières, décomposer la fraction rationnelle $k \mapsto u_k$ en éléments simples).
2. *Divergence grossière.* Parmi les séries suivantes, lesquelles divergent grossièrement ?
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{2}{k})^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\theta).$$
3. *Retrouver le terme général.* On se donne la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles de la série. Quel est son terme général dans les cas suivants :
$$s_n = \frac{3n+7}{n+1}; \quad s_n = 2-2^{-n}; \ s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n.$$
4. *Sommation par paquets.* On considère la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ telle que $u_{2n-1} = \frac{1+n^2}{2^n}$ et $u_{2n} = \frac{1-n^2}{2^n}$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge et calculer sa somme (Méthode : considérer les sommes partielles d'indices pair et impair).
5. *Somme de deux séries.* Avec les couples suivants $(u_k, v_k)_{k\geq 1}$ de termes généraux de séries, on forme la série $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, avec $w_k = u_k + v_k$. Dire si elle converge.
$$u_k = \frac{1}{k}, \ v_k = \frac{2^k}{3^k}; \quad u_k = \log(1-\frac{1}{(k+1)^2}), \ v_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$
6. *Comparaison de séries à termes positifs.* On considère la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ telle que $u_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$ et $u_{2n} = \frac{1}{5^{2n}}$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge (Méthode : considérer une suite $(v_k)_{k\geq 1}$ simple telle que $u_k \leq v_k$ pour tout $k \geq 1$ et telle que $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge).
Montrer par une méthode analogue que la série $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}+\frac{1}{\sqrt{k}})$ diverge.
7. *Comparaison d'une série et d'une intégrale.* Soit $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Est ce que $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ est finie ? Est ce que la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)^3}$ converge ?
8. *Divergence de la série harmonique par les sommes de Riemann.* On note $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Montrer que $\lim_{n\infty} s_{2n} - s_n = \log 2$. Méthode : trouver une fonction f telle que
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$
et appliquer le théorème sur les sommes de Riemann. En déduire une nouvelle démonstration de la divergence de la série harmonique.

Deug 2 ième année. Devoir d'ANALYSE, à remettre au dernier TD de la semaine du 30 octobre 2000.

Exercice A. Soit α et β deux nombres réels ou complexes tels que $\alpha\beta = -1$ et $|\alpha| > 1 > |\beta|$. Pour n dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers positifs ou négatifs on pose $F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ et $L_n = \alpha^n + \beta^n$ (si $\alpha + \beta = 1$ ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

1) Montrer par le critère de D'Alembert que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge et calculer la limite de $Q_n = L_n/F_n$ si $n \to +\infty$. .

2) On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous n et k de $\mathbf{Z}$ on a

$$\frac{1}{F_{4n-2k-1} + F_{2k+1}} + \frac{1}{F_{4n+2k+1} + F_{2k+1}} = \frac{1}{2L_{2k+1}} \left(Q_{2n+2k+1} - Q_{2n-2k-1}\right).$$

En faisant $k = 0$ dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre $2n$ de la série initiale, c'est à dire $s_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{F_{2j+1}+1}$ en montrant par récurrence sur n que $s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_1)$. En déduire la somme de la série en termes de α et β. Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si $\alpha = \exp t$ et $\beta = -\exp(-t)$ si t est réel.

3) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge et calculer sa somme.

Exercice B. (Permutation des termes de la série harmonique alternée : Pringsheim (1883)) Pour tout entier $n > 0$, soit $u(n) = (-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers > 0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que

(1) pour tout entier $p > 0$ on a $\tau(2p-1) < \tau(2p+1)$ et $\tau(2p) < \tau(2p+2)$.

(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha = \lim_{n\infty} p(n)/n$ existe et est dans $]0, 1[$.

Dans le cas particulier où σ est définie par

$$\sigma(3p) = 2p,\ \sigma(3p+1) = 4p+1,\ \sigma(3p+2) = 4p+3$$

pour tout entier $p > 0$, calculer explicitement τ, et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α.

On note $f(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n\infty} f(n) = \gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ, on considère la série de terme général $v_n = u(\sigma(n))$ et on note $s_n = v_1 + \cdots + v_n$.

Montrer par récurrence que $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ et que

$$s_n = \frac{1}{2} f(p(n)) + \frac{1}{2} f(n - p(n)) - f(2n - 2p(n)) + \frac{1}{2} \log \frac{p(n)}{n - p(n)} - \log 2.$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α.

Exercice C. Soit $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ défini par $u_0 = 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ pour $n \geq 0$. Montrer que la limite de la suite $S_n = \log(n^{b-a}u_n)$ existe et est finie. En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle s_n, en montrant d'abord que pour tout n on a

$$\sum_{j=0}^{n} [(j+1) + b - 1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^{n} [j+a]u_j.$$

Deug 2 ième année. Devoir d'ALGEBRE, à remettre au dernier TD de la semaine du 30 octobre 2000.

Exercice A. (Endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$) On considère l'endomorphisme a de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative $A = [a]_e^e$ dans la base canonique e est $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de a. Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ de vecteurs propres ? Choisir ensuite f telle que $[\mathrm{id}_E]_f^e$ et $[\mathrm{id}_E]_e^f$ soient à coefficients entiers. Dessiner $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs $\vec{x}$ et leurs images $a(\vec{x})$ à l'aide de f.

Trouver deux matrices P et D carrées d'ordre 2 telles que D soit diagonale, P inversible et $A = PDP^{-1}$. Calculer $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ et A^{50}. Calculer $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$.

Exercice C. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0, \pi[$, et les déterminer. Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. Montrer que les valeurs propres des matrices $2I_n + A$ et $2I_n - A$ sont strictement positives.

Deug 2 ième année. Corrigé du devoir numéro 1 d'ANALYSE (novembre 2000).

Exercice A.

1) Soit $q = \beta/\alpha$, qui est de module <1. On a donc $\lim_{n\infty} q^n = 0$ et $\lim_{n\infty} 1/\alpha^n = 0$. Posons $v_n = \frac{1}{F_{2n+1}+1}$. Alors en mettant en facteur les puissances de α au numérateur et au dénominateur on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1} + \alpha - \beta}{\alpha^{2n+3} - \beta^{2n+3} + \alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{1 - q^{2n+1} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2n+1}}}{1 - q^{2n+3} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{2n+3}}} \to_{n\infty} \frac{1}{\alpha}.$$

Donc si $u_n = |v_n|$, on a $\lim u_{n+1}/u_n = L = 1/|\alpha| < 1$. Donc d'après le critère de D'Alembert la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge absolument, donc converge. De même

$$\frac{L_n}{F_n} = (\alpha - \beta)\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^n - \beta^n} = (\alpha - \beta)\frac{1 + q^n}{1 - q^n} \to_{n\infty} \alpha - \beta.$$

2) Puisque $F_1 = 1$, l'identité de Backstrom pour $k = 0$ donne

$$\frac{1}{F_{4n-1}+1} + \frac{1}{F_{4n+1}+1} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_{2n-1}) \quad (*).$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 1$ en faisant précisément $n = 1$ dans (*). Si elle est vraie pour $n - 1$, alors

$$s_{2n} \stackrel{(1)}{=} s_{2n-2} + \frac{1}{F_{4n-1}+1} + \frac{1}{F_{4n+1}+1} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2L_1}(Q_{2n-1} - Q_1) + \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_{2n-1}),$$

où (1) vient de la définition d'une somme partielle, (2) de l'hypothèse de récurrence et de (*) . La récurrence est donc étendue. D'après le 1), $S = \lim_{n\infty} s_n$ existe et on a donc la somme de la série donnée par

$$S = \lim_{n\infty} s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(\lim_{n\infty} Q_{2n+1} - Q_1) = \frac{-\beta}{\alpha + \beta}.$$

Si α est un réel positif, on l'écrit $\alpha = e^t$, ce qui entraîne $\beta = -e^{-t}$, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh t}{\cosh(2n+1)t + \cosh t} = \frac{1}{e^{2t}+1}.$$

Profitons de ce corrigé pour indiquer comment on montre l'égalité de Robert Backstrom. Il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\cosh(2a+b) + \cosh b} + \frac{1}{\cosh(2a-b) + \cosh b} = \frac{1}{2\sinh b}(\tanh(a+b) - \tanh(a-b)),$$

chose qu'on laisse au lecteur. Puis on prend $\alpha = \exp z$, $\beta = -\exp(-z)$, qui donne $F_{2k+1} = \cosh((2k+1)z)$ et $L_{2k+1}2 = \sinh((2k+1)z)$, et on prend $a = 2nz$ et $b = (2k+1)z$.

3) Pour traiter cette question difficile, notons pour simplifier $v_n = \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$. On voit de la même manière qu'au 1) que $\lim |v_{n+1}|/|v_n| = L = 1/|\alpha| < 1$: il y a donc absolue convergence par D'Alembert. Puisque $v_{2n+1} = \frac{1}{F_{4n+3}+F_3}$ et que $v_{2n-2} = \frac{1}{F_{4n-3}+F_3}$, l'identité de Backstrom appliquée à $k = 1$ donne

$$v_{2n-2} + v_{2n+1} = \frac{1}{2L_3}(Q_{2n+3} - Q_{2n-3}). \quad (*)$$

Ceci permet alors d'écrire la somme partielle d'ordre $2n+1$ de la facon suivante

$$\begin{aligned}
&v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+v_6+v_7+v_8+v_9+\cdots+\overbrace{v_{2n-2}+v_{2n-1}+v_{2n}+v_{2n+1}} \\
= \quad & v_1+v_3+v_{2n} \\
&+\frac{1}{2L_3}(Q_7-Q_1)+\frac{1}{2L_3}(Q_9-Q_3)+\frac{1}{2L_3}(Q_{11}-Q_5)+\frac{1}{2L_3}(Q_{13}-Q_7) \\
&+\frac{1}{2L_3}(Q_{15}-Q_9)+\cdots+\frac{1}{2L_3}(Q_{2n+3}-Q_{2n-3}) \\
= \quad & v_1+v_3+v_{2n}+\frac{1}{2L_3}(-Q_1-Q_3-Q_7+Q_{2n-1}+Q_{2n+1}+Q_{2n+3}) \\
\to_{n\infty} \quad & \frac{1}{2F_3}+\frac{1}{F_5+F_3}+\frac{1}{2L_3}\left(-\frac{L_1}{F_1}-\frac{L_3}{F_3}-\frac{L_5}{F_5}+3(\alpha-\beta)\right),
\end{aligned}$$

le résultat du passage à la limite étant donné par le 1) et le fait que $\lim_{n\infty} v_n = 0$, puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Exercice B. Dans le cas particulier, trivialement $\tau(2p) = 3p$, $\tau(4p+1) = 3p+1$, $\tau(4p+3) = 3p+2$. Il est clair que τ restreinte aux nombres pairs est une suite croissante. Pour les nombres impairs, on a $\tau(4p-1) = 3(p-1)+2 = 3p-1 < \tau(4p+1) = 3p+1 < \tau(4p+3) = 3p+2$ et donc τ restreinte aux impairs est aussi croissante. Ensuite, par définition $\sigma(k)$ est impair si et seulement si $k \equiv 0 \bmod 3$. Donc $p(n)$ est le nombre de $k \leq n$ divisibles par 3 : $p(3N) = p(3N+1) = p(3N+2) = N$, et donc α existe et est $\lim_{n\infty} p(n)/n = 1/3$.

Notons $A_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ Montrons par récurrence que $s_n = A_n$. C'est évident pour $n=0$. Supposons cela vrai pour $n-1$ et montrons le pour n en montrant que $A_n - A_{n-1} = v_n$ On distingue deux cas.

Ou bien $\sigma(n) = 2N$ est pair. Comme $p \mapsto \tau(2p)$ est croissante, la définition de $p(n)$ entraîne que $p(n) = N$, et donc que $\sigma(n) = 2p(n)$. Alors $p(n)-p(n-1) = 1$ et $A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2p(n)} = \frac{1}{\sigma(n)} = v_n$.

Ou bien $\sigma(n) = 2N-1$ est impair. Comme $p \mapsto \tau(2p-1)$ est croissante, la définition de $p(n)$ entraîne que $n - p(n) = N$, et donc que $\sigma(n) = 2(n-p(n)) - 1$. Alors $p(n) - p(n-1) = 0$ et $A_n - A_{n-1} = -\frac{1}{2n-2p(n)-1} = -\frac{1}{\sigma(n)} = v_n$. La récurrence est étendue.

Pour avoir la seconde formule, on écrit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = f(n) + \log n$, puis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right).$$

En remplacant dans A_n cela conduit au résultat voulu

$$s_n = \frac{1}{2}f(p(n)) + \frac{1}{2}f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2}\log\frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2. \ (*)$$

Comme $0 < \alpha < 1$ on a $\lim_{n\infty} p(n) = \infty$ et $\lim_{n\infty}(n - p(n)) = \infty$. De plus,

$$\lim_{n\infty} \frac{p(n)}{n-p(n)} = \lim_{n\infty} \frac{p(n)/n}{1-p(n)/n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Par conséquent on passe à la limite dans $(*)$ et on obtient

$$\lim_{n\infty} s_n = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma - \gamma + \frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{1-\alpha} - \log 2.$$

La série harmonique alternée ainsi permutée est donc convergente et de somme $\frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{4(1-\alpha)}$.

Commentaires : Il est facile de voir que la connaissance de σ est donnée par la connaissance de la suite $n \mapsto p(n)$. On peut montrer que les suites $n \mapsto p(n)$ ainsi construites sont celles qui satisfont aux conditions suivantes : $p(n) - p(n-1) = 0$ ou 1 pour tout $n > 0$ et $p(0) = 0$, et existence dans $]0,1[$ de $\alpha = \lim p(n)/n$. L'exemple $p(n) =$ partie entière de $n\alpha$ montre que tout α est atteint.

Exercice C. Par définition on a $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{a}{b}$, $u_2 = \frac{a(1+a)}{b(1+b)}, \ldots$ Comme la notation nous y invite, nous montrons que la suite S_n a une limite finie en la considérant comme la suite des sommes partielles d'une série. Posons

$$v_n = S_{n+1} - S_n = \log(n+1)^{b-a}u_{n+1} - \log n^{b-a}u_n = (b-a)\log(1+\frac{1}{n}) + \log(1+\frac{a}{n}) - \log(1+\frac{b}{n}).$$

Utilisons le développement limité de $\log(1+h)$ au voisinage de h d'ordre 2 : $\log(1+h) = h - h^2/2 + h^2\epsilon(h)$, où $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$. On en tire en appliquant ceci à $h = 1/n$ ou $h = a/n$ ou $h = b/n$:

$$v_n = \frac{b^2 - a^2 - b + a}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon_1(n),$$

où $\epsilon_1(n)$ est une suite tendant vers 0 qu'il est inutile d'expliciter. Donc la série $\sum |v_n|$ est équivalente à une série de Riemann avec $\alpha = 2$, donc une série convergente. La série $\sum v_n$ est donc absolument convergente et donc S_n a une limite finie S. On en déduit que $u_n \sim \frac{e^S}{n^{b-a}}$ et, d'après le critère de Riemann, $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

L'égalité $\sum_{j=0}^n [(j+1) + b - 1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^n [j+a]u_j$ est immédiate en utilisant la définition de u_{j+1} : $[(j+1)+b-1]u_{j+1} = [j+b]u_{j+1} = [j+a]u_j$. Elle entraîne

$$\sum_{j=0}^n (j+1)u_{j+1} + (b-1)\sum_{j=0}^n (j+1)u_{j+1} = \sum_{j=0}^n ju_j + a\sum_{j=0}^n u_j,$$

et donc après simplification par $\sum_{j=1}^n u_j$ on obtient

$$(n+1)u_{n+1} + (b-1)(s_n + u_{n+1} - u_0) = 0u_0 + as_n,$$

et donc $s_n = \frac{b-1}{b-a-1} - \frac{(n+b)u_{n+1}}{b-a-1}$. On termine en observant que puisque $b-a > 1$ et que $u_n \sim \frac{e^S}{n^{b-a}}$ alors $(n+b)u_{n+1}$ tend vers 0. Donc la série converge et a la somme remarquable

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(1+a)\cdots(n-1+a)}{b(1+b)\cdots(n-1+b)} = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Deug 2 ième année. Corrigé du devoir 1 d'ALGEBRE (novembre 2000).

Exercice A. $\mathrm{trace}\, a = \mathrm{trace}\, A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \mathrm{trace}\, X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Donc le spectre est $\{2, -3\}$, il est de taille 2 comme l'espace est de dimension 2. D'après le cours, a est diagonalisable et les espaces propres de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des (x, y) tels que $7x - 10y = 2x$ ou $x = 2y$. On peut prendre $\vec{f_1} = (2, 1)$ pour base de cet espace propre. L'espace propre associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des (x, y) tels que $7x - 10y = -3x$ ou $x = y$. On peut prendre $\vec{f_2} = (1, 1)$ pour base de cet espace propre. Alors si $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ on a

$$P = [\mathrm{id}_E]_f^e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = [\mathrm{id}_E]_e^f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = [a]_f^f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$D^5 0 = [a^{50}]_f^f = \begin{bmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & (-3)^{50} \end{bmatrix}, \; A^5 0 = [a^{50}]_e^e = PD^{50}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2.2^{50} - (-3)^{50} & -2.2^{50} + 2.(-3)^{50} \\ 2^{50} - (-3)^{50} & -2^{50} + 2.(-3)^{50} \end{bmatrix}$$

Donc $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} [a^{2n}]_f^f = L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et $\lim_{n\infty} \frac{1}{3^{2n}} [a^{2n}]_e^e = PLP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice B. Si $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in F$, il est clair que $X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{ij} F_{ij}$. C'est donc une famille génératrice. Elle est indépendante, car si $\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{ij} F_{ij}$ est la matrice nulle, cela implique que $x_{ij} = 0$ pour tous i et j. C'est donc une base de F. Elle est de taille n^2, donc F est de dimension n^2. Ensuite, si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ et si $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors le coefficient (i, j) de la matrice $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$ est $(\alpha d_j + \beta d_i) x_{ij}$. Donc $\Phi(F_{ij}) = (\alpha d_j + \beta d_i) F_{ij}$, ce qui est dire que F_{ij} est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\alpha d_j + \beta d_i$. L'espace F admet donc une base de vecteurs propres de Φ. D'après le cours, cela entraîne que Φ est diagonalisable. Si on le représente dans la base de vecteurs propres, le déterminant de Φ est donc le produit des éléments diagonaux, c'est à dire $\det \Phi = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i)$. Plus généralement $\det(\Phi - \lambda \mathrm{id}_F) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\alpha d_j + \beta d_i - \lambda)$.

Exercice C. Notons $D_n = \det B$. Alors $D_1 = 2 \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$ et $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$. Si n>2, développons D_n par rapport à la dernière ligne, en recommencant encore une fois avec un des déterminants d'ordre $n - 1$ obtenus. On obtient $D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}$. Faisons l'hypothèse de récurrence que $D_k = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}$ pour $k < n$. On a vu que c'est vrai pour $k = 1$ et 2. Alors par des identités trigonométriques classiques $D_n = \frac{2 \cos \theta \sin n\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$, et la récurrence est étendue. Puisque $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x = k\pi$ alors $D_n = 0$ si et seulement si il existe $k = 1, 2, \ldots, n$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ les autres valeurs de k étant exclues car $0 < \theta < \pi$. Par définition de P_A on a $P_A(-2 \cos \theta) = D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ qui s'annule pour les n nombres distincts $-2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ qui sont nécessairement toutes les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $2I_n + A$ sont donc $2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n+2} > 0$. Le spectre de $2I_n - A$ est le même.

Deug 2 ième année. Projet de partiel d'ALGÈBRE Novembre 2000.

Question de cours. Soit a un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Donner la définition d'un vecteur propre de a.

Exercice A. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère les deux matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1+2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ (Méthode : développer par rapport à la première ligne). Montrer que $\det B$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0, \pi[$, et les déterminer (on rappelle que $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$). Si P_A est le polynôme caractéristique de A, calculer $P_A(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A. La matrice A est elle diagonalisable ? Montrer que les valeurs propres de $2I_n - A$ sont strictement positives. Pourquoi la matrice $(2I_n - A)^{-1}$ existe -t-elle ? Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice B.

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique e et a est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice représentative dans e est

$$[a]_e^e = A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Quelles sont les multiplicités m_1 et m_2 des valeurs propres 1 et 2 de a dans son polynôme caractéristique ?
2. Soit E_1 et E_2 les sous espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2, et $F_1 = \ker(a - \mathrm{id})^{m_1}$ et $F_2 = \ker(a - 2\mathrm{id})^{m_2}$ les sous espaces caractéristiques. Trouver une base de E_1, de E_2 et de F_1.
3. En complétant la base de E_2, trouver une base de F_2.
4. Déduire de la question précédente une nouvelle base f de $\mathbb{R}^4$ telle que si (d, n) est la décomposition diagonal-nilpotent de a (dite de Dunford) avec $dn = nd$, alors les matrices $[d]_f^f$ et $[n]_f^f$ représentatives dans la base f sont respectivement diagonale et triangulaire supérieure. Préciser $[a]_f^f$, $[d]_f^f$ et $[n]_f^f$.
5. Soit k un entier > 0. Calculer A^k (Méthode : exprimer d'abord d^k, n^k, $d^{k-1}n$ et enfin a^k dans la base f).

Deug 2 ième année. Projet de partiel d'ANALYSE, novembre 2000.

Question de cours. Soit deux séries de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. Définir le terme général du produit de Cauchy de ces deux séries et énoncer sans démonstration le théorème sur la convergence de ce produit de Cauchy.

Exercice A. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$.
3. Calculer à l'aide du 1) la somme de la série du 2).

Exercice B. On note par $\log x$ le logarithme népérien de x.

1. Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}(1+x)}.$$
Montrer qu'il existe deux nombres positifs A et B, qu'on ne demande pas de calculer, tels que pour tout x de $[1,\infty[$ on ait $\log x \leq Ax^{1/4}$ et, pour tout t de $]0,1]$ on ait $|\log t| \leq Bt^{-1/4}$ (Méthode : calculer $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{1/4}}$, ainsi que $\lim_{t\to 0} \frac{\log t}{t^{-1/4}}$). En déduire la convergence des trois intégrales impropres suivantes :
$$I_1 = \int_1^{\infty} f(x)dx, \quad I_2 = \int_0^1 f(t)dt, \quad I = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$
Montrer par un changement de variable que $I_1 = -I_2$ et en déduire I.
2. Montrer que l'intégrale impropre
$$J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$
converge et la calculer par le changement de variable simple $u = \sqrt{x}$.
3. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}$. Montrer que l'intégrale impropre
$$K = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}dx$$
converge et la calculer par l'intégration par parties obtenue en posant $u(x) = \sqrt{x}\log x$ et à l'aide des valeurs de I et J obtenues aux questions 1 et 2.

Deug 2 ième année. Projet de partiel d'ANALYSE novembre 2000. (Proposition Martin)

Soit α un réel >0 et, pour $x \geq 0$, $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$. On va étudier la série $s = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Montrez que pour tout $x \geq 0$, la série $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est convergente.
2. (a) Étudiez les variations de la fonction u_n sur $[0, +\infty[$.
   (b) Pour quelles valeurs de α la série $s = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle normalement convergente sur $[0, +\infty[$?
   (c) Montrez que pour tout $a > 0$, la série $s = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Continuité de la fonction s.
   (a) Montrez que s est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrez que si $\alpha > \frac{1}{2}$, s est continue sur $[0, +\infty[$.
   (c) On veut montrer que pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, s n'est pas continue en 0. Pour cela, vérifiez que pour $x \geq 0$, la suite $n \mapsto u_n(x)$ est décroissante et en déduire que pour tout entier $p \geq 1$ on a $s(x) \geq p u_p(x)$. Considérez alors $s(\frac{1}{\sqrt{p}})$.
4. Dérivabilité de la fonction s : montrez que si $\alpha > 1$, la fonction s est dérivable sur $[0, +\infty[$. (variante : montrez que la fonction s est dérivable sur $]0, +\infty[$).

Deug 2 ième année. Projet de partiel d'ANALYSE, novembre 2000. (Proposition Dedieu)

1. Quelles sont les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale impropre $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge ?
2. Dans la suite de cet exercice on prend $x > 0$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n-x-1}$ converge normalement pour $t \in [\epsilon, 1]$ et calculer sa somme.
3. Justifier l'égalité

$$\int_\epsilon^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1-\epsilon^{n+x}}{n+x}$$

4. Montrer que la fonction

$$\epsilon \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1-\epsilon^{n+x}}{n+x}$$

est continue sur $[0, 1]$ et en déduire l'égalité

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$$

5. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est continue sur $]0, \infty[$.

Deug 2 ième année. Projet de partiel d'ALGÈBRE novembre 2000. (Proposition Ortiz-Montaut)

Exercice . *Les questions sont indépendantes. Les matrices sont a coefficients dans $\mathbb{R}$. E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.*

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

2) La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

3) La matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

4) La matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est elle trigonalisable ?

5) On suppose $\dim E = 3$. Soit $f \in L(E)$ admettant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 2$. Montrer que f est trigonalisable.

6) Soit f un endomorphisme de E nilpotent et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que la restriction $g = f_{|F}$ de f au sous-espace vectoriel F est un endomorphisme nilpotent de F.

7) Soit $f \in L(E)$ tel que $f^3 + f = 0$. Que peut-on dire de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$?

Problème . On se place dans $E = /bfC^{\ 4}$ muni de sa base canonique $b = (e_1, ..., e_4)$.

Partie I . Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(/bfC)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est J.

1) a) Déterminer l'image de b par j, j^2, j^3, et j^4. b) En déduire J^2, J^3 et J^4. c) Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.

2) a) Montrer que si $P \in [X]$ avec $\deg(P) \leq 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
b) En déduire le polynôme minimal de J. c) Montrer que J est diagonalisable.

3) a) Déterminer les valeurs propres de J. b) Expliciter les sous-espaces vectoriels propres de J associés aux valeurs propres 1 et i.

Partie II. Soient des nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_4(/bfC)$.

4) Montrer qu'il existe un polynôme f à coefficients complexes, que l'on déterminera, tel que $f(J) = A$.

5)a) Etudier le caractère diagonalisable de A (on pourra exprimer $P^{-1}AP$ où $P \in \mathrm{GL}_4(/bfC)$ à l'aide de f, J et P). b) Expliciter les valeurs propres de A.

Examen partiel de Deug 2ième année, MIAS U.E.F. 3, Lundi 20 novembre 2000

Durée : 3 heures. Aucun document. Affichage des résultats le vendredi 1er décembre à 16 heures. Les étudiants remettront une copie pour l'épreuve d'algèbre et une copie pour l'épreuve d'analyse.

Épreuve d'ALGÈBRE du 30 nov. 2000

Question de cours. Soit a un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Donner la définition d'un vecteur propre de a.

Exercice A. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique. Dire pourquoi A^{-1} existe. En appliquant à A le théorème de Cayley Hamilton, donner le polynôme caractéristique de A^{-1}, exprimer A^{-1} à l'aide de A^2.

Exercice B . On se place dans $E = /bfC^{\,4}$ muni de sa base canonique $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans b est la matrice suivante $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer l'image des vecteurs de b par j, j^2, j^3, et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si $P \in /bfC[X]$ avec $\deg(P) \leq 3$ vérifie $P(J) = 0$ alors $P = 0$.
5. En déduire le polynôme minimal de J.
6. Montrer que J est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de J.

Exercice C. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère les deux matrices d'ordre $n \geq 11$:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1+2\cos\theta \end{bmatrix}$$

(en convenant que pour $n = 1$ on a $A_1 = [1]$ et $B_1 = [1 + 2\cos\theta]$). Montrer que pour $n \geq 2$ on a $\det B_{n+1} = 2\cos\theta \det B_n + \det B_{n-1}$ (Méthode : développer par rapport à la première ligne : la récurrence n'est pas nécessaire). Montrer par récurrence que $\det B_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$. Montrer que $\det B_n$ s'annule pour n valeurs distinctes de θ de $]0, \pi[$, et les déterminer (on rappelle que $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$). Si P_{A_n} est le polynôme caractéristique de A_n, calculer $P_{A_n}(-2\cos\theta)$ et déduire de ce qui précède les valeurs propres de A_n. La matrice A_n est elle diagonalisable ? Montrer que les valeurs propres de $2I_n - A_n$ sont strictement positives. Pourquoi la matrice $(2I_n - A_n)^{-1}$ existe -t-elle ? Quelles sont ses valeurs propres ?

Épreuve d'ANALYSE du 30 nov 2000.

Question de cours. Soit deux séries de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$. Définir le terme général du produit de Cauchy de ces deux séries et énoncer sans démonstration le théorème sur la convergence de ce produit de Cauchy.

Exercice A. Trouver les valeurs du nombre réel a telle que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{a+1}dx}$$

converge, et la calculer (Méthode : Distinguer $a < 0,\ a = 0,\ a > 0$ et utiliser une intégration par parties).

Exercice B. En justifiant votre réponse, classer les 8 séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.)

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right) ; \ \sum_{n=1}^\infty \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) ; \ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 ; \ \sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n};$$

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1 - (1 - \frac{1}{n})^n\right) ; \ \sum_{n=1}^\infty (1 - \cos\frac{\pi}{n}); \ \sum_{n=1}^\infty \sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n}); \ \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}\frac{n-k}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice C.

1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Barême algèbre : QC : 1 point. A= 4 points, B= 7 points, C=8 points.
Barême analyse : QC : 1 point. A= 3 points, B= 8 points, C1= 2, C2=1, C3=1, C4=3 points.

Exercices supplémentaires d'analyse : Decembre 2000

1. Soit $A = \int_0^\pi \log\sin(x/2)\,dx$, $B = \int_0^\pi \log\cos(x/2)\,dx$, $C = \int_0^\pi \log\sin x\,dx$.
   Pourquoi ces intégrales existent elles ? Par des changements de variable affine, montrer que $A = B = C$. Calculer ensuite $C - A - B$ et en déduire A.

2. Fonctions eulériennes Si a et b sont > 0 , on note
   $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ et $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$.

   (a) Montrer que
   $$B(a,b) = B(b,a) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{2a-1}(\cos t)^{2b-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(1+s)^{a+b}}\,ds$$
   Calculer $B(1/2,1/2)$.

   (b) En faisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (x, y/x) = (x,s)$ dans $\Gamma(a)\Gamma(b)$ écrit comme une intégrale double, montrer que
   $$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a,b)\Gamma(a+b).$$
   En déduire $\Gamma(1/2)$.

3. Par une intégration par parties, montrer que si f est de classe $C^1(\mathbb{R})$, et si a et b sont réels, alors
   $$\lim_{n\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$
   Montrer ensuite que $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$
   définit une fonction de $C^1(\mathbb{R})$. Soit ensuite, pour n entier ≥ 0,
   $$s_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx.$$
   Montrer que
   $$\begin{aligned} s_n &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx - \int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)dx. \\ &= \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt - \int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)dx. \end{aligned}$$
   Calculer enfin $u_0 = s_0$ et, pour $n > 0$,
   $$u_n = s_n - s_{n-1} = 2\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)dx.$$
   En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$.

4. Intégrales de Frullani

(a) Version additive : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_c^\infty f(x)\,dx$ existe pour tout c et telle que $L = \lim_{x-\infty} f(x)$ existe. Montrer que pour tout (a, b) de R^2

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+a) - f(x+b))\,dx$$

existe et vaut $L(b-a)$.

(b) Version multiplicative : Soit $g :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_c^\infty g(y)/y\,dy$ existe pour tout $c > 0$ et telle que g soit continue en 0. Montrer que pour tout (α, β) de $(]0, +\infty[)^2$:

$$\int_0^\infty (g(\alpha y) - g(\beta y))/y\,dy$$

existe et vaut $g(0) \log \beta/\alpha$ .Méthode : ou bien imiter a), ou bien utiliser a) en l'appliquant à $f(x) = g(e^x)$.

(c) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-sy}(1 - e^{-y})/y\,dy$$

$$\int_0^\infty (\arctan 2y - \arctan y)/y\,dy$$

5. Intégrale de Binet (Source : Whittaker and Watson, p.249). Soit

$$f(t) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1})\frac{1}{t}.$$

Montrer que $I = \int_0^\infty f(t)e^{-t/2}\,dt$ existe , et la calculer. Méthode : posant

$$f_1(t) = [f(t) - f(t/2)/2]e^{-t/2} + f(t)e^{-t}$$

et

$$g(t) = [e^{-t/2} - e^{-t}]/t,$$

montrer que $I = \int_0^\infty f_1(t)\,dt$ et que il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f_1(t) = Ag'(t) + Bg(t);$$

il est commode de poser pour cela $u = 1/t$ et $v = e^{-t/2}$.

6. Intégrales elliptiques de Carlson, type I

Soit a, b et c trois nombres positifs ou nuls. On considère les trois polynômes en x : $A = x + a$, $B = x + b$ et $C = x + c$, ainsi que les trois fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $R = (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{B} + \sqrt{C})(\sqrt{C} + \sqrt{A})$, $J = x + \sqrt{AB} + \sqrt{BC} + \sqrt{CA}$ et

$$I(s) = \int_s^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}.$$

(a) Montrer que $I(s)$ converge pour tout $s > 0$. Quelle est la limite de $I(s)$ quand $s \to +\infty$? Montrer que $I'(x) = -\frac{1}{\sqrt{ABC}}$. Calculer I si $b = c = 0$.

(b) (1) Montrer que $J(x) = (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{C}) - a$.
(2) En déduire que $J'(x) = \frac{R}{2\sqrt{ABC}}$.
(3) Avec deux expressions similaires à (1), montrer que $R^2 = (J + a)(J + b)(J + c)$.

(c) Montrer avec a), b2) et b3) que $2I'(J(x))J'(x) = I'(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire, avec le a), que $2I(J(x)) = I(x)$. En écrivant

$$I(s) = \int_s^{J(s)} + \int_{J(s)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{ABC}},$$

montrer que

$$I(s) = 2\int_s^{J(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}.$$

(d) Soit $(J_n)_{n=0}^{+\infty}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $J_0(x) = x$ et, pour $n \geq 0$, $J_{n+1}(x) = J_n(J(x))$. Montrer par récurrence sur n que

$$I(s) = 2^{n+1} \int_{J_n(s)}^{J_{n+1}(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}},$$

et calculer

$$\lim_{s\to+\infty} \sqrt{s} \int_s^{J(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}$$

(Méthode : faire le changement de variable $x = st$).

7. Intégrales elliptiques de Carlson, type II

Soit a, b, c et d des nombres positifs ou nuls. On pose

$$\alpha = ab + cd,\ \beta = ac + bd,\ \gamma = ad + bc.$$

On considère les polynômes en x : $A = x + a^2$, $B = x + b^2$, $C = x + c^2$ et $D = x + d^2$ ainsi que les deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$R = (\sqrt{AB} + \sqrt{CD})(\sqrt{AC} + \sqrt{BD})(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}),$$

$$J(x) = 2x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x + 2(\sqrt{ABCD} - abcd).$$

On pose

$$\alpha = ab + cd,\ \beta = ac + bd,\ \gamma = ad + bc.$$

Montrer successivement que $J(x) = (\sqrt{AB} + \sqrt{CD})^2 - \alpha^2$, que $J'(x) = \frac{R}{\sqrt{ABCD}}$, que $(J + \alpha^2)(J + \beta^2)(J + \gamma^2) = R^2$, et enfin que

$$\int_s^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{ABCD}} = \int_{J(s)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x + \alpha^2)(x + \beta^2)(x + \gamma^2)}}.$$

8. (Calcul de la somme de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) Soit n un entier fixé > 0 et la fonction sur $[0, \infty[$ définie par $P_n(x) = \mathrm{Im}(\sqrt{x} + i)^{2n+1}$. Montrer que P_n est un polynôme de degré n en x, calculer les coefficients de x^n et de x^{n-1} et en déduire que la somme des racines est $n(2n - 1)/3$ (Méthode : développer $(\sqrt{x} + i)^{2n+1}$ par la formule du binôme). Montrer que les racines

de P_n sont les n nombres $\left(\cot \frac{k\pi}{2n+1}\right)^2$, avec $k = 1, \ldots, n$ (Méthode : formule de Moivre). Montrer que si $0 < \theta < \pi/2$ alors $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ et en déduire

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

Déduire de tout ce qui précède que

$$\frac{1}{3}n(2n-1) \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq n + \frac{1}{3}n(2n-1).$$

En déduire la somme de la série de Riemann $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Calculer aussi la somme de la série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$ en fonction de $\zeta(2)$.

Exercices supplémentaires d'algèbre : Décembre 2000

Géométrie des endomorphismes symétriques

Soit E un espace euclidien de dimension n, dont l'espace des endomorphismes est noté $L(E)$. L'adjoint de l'endomorphisme a est noté a^*. $L_s(E)$ note l'espace des endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $(a, b) \mapsto \text{Trace}(a^*b)$ munit $L(E)$ d'une structure d'espace euclidien. Application : si $a \in L(E)$ satisfait $a^2 = aa^*$, montrer que $b = a - a^*$ est nul en considérant la norme de b pour cette structure euclidienne.
2. Soit Φ l'endomorphisme de $L(E)$ $a \mapsto a^*$. Quelles sont les valeurs et espaces propres de Φ ?
3. Soit la forme bilinéaire symétrique sur $L(E)$ définie par $\text{Trace}(ab)$. Trouver la signature de la forme quadratique associée (Méthode : considérer l'endomorphisme symétrique associé et utiliser le 2.)
4. Si a appartient à $L(E)$, on désigne par g_a l'endomorphisme de $L_s(E)$ défini par $x \mapsto axa^*$. Montrer que $g_{ab} = g_a g_b$, calculer l'adjoint de g_a et montrer que g_a est orthogonal si a l'est.
5. Si a est symétrique, calculer le déterminant de g_a (Méthode : se placer dans une base orthonormale de diagonalisation de a et considérer l'endomorphisme g_D de l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre n défini par $g_D(X) = DXD$, où D est la matrice diagonale qui représente a) .
6. Montrer que l'application $a \mapsto \det(g_a)$ est continue. En déduire que si a est une rotation de E, alors g_a est aussi une rotation de $L_s(E)$ (On rappelle que le groupe des rotations d'un espace euclidien est connexe).
7. Si a est un endomorphisme orthogonal de déterminant -1, montrer qu'on peut l'écrire comme le produit d'un endomorphisme symétrique très simple et d'une rotation. A l'aide du 4, du 5 et du 6 , montrer que le déterminant de g_a est $(-1)^{n+1}$.
8. On rappelle que tout endomorphisme d'un espace euclidien est le produit d'un endomorphisme symétrique positif (c'est à dire d'un endomorphisme symétrique p tel que pour tout x de E on a $< x, p(x) >\geq 0$) et d'un endomorphisme orthogonal(décomposition polaire). Déduire de cela et des questions précédentes que le déterminant de g_a est égal à $(\det a)^{n+1}$.
9. (Inégalité de Hadamard) Si les réels $x_1, \ldots, x_n$ satisfont $x_1 + \cdots + x_n = 0$, montrer que
$$1 \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$$
et préciser les cas d'égalité. Méthode : étudier la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$t \mapsto \frac{1}{n}(e^{tx_1} + \cdots + e^{tx_n}.$$
Si les réels $y_1, \ldots, y_n$ sont positifs, montrer que
$$(y_1 \ldots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)$$
et préciser les cas d'égalité (inégalité des moyennes géométique et arithmétique). Si A est une matrice symétrique et définie- positive d'ordre n, montrer que
$$(\det A)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\text{Trace}A$$

et préciser les cas d'égalité. Si $B = (b_{ij})$ est une matrice symétrique et définie- positive d'ordre n, montrer que $b_{ii} > 0$ et que

$$\det B \leq b_{11} \dots b_{nn},$$

et préciser les cas d'égalité (Méthode : considérer la matrice diagonale D dont la diagonale est $(1/\sqrt{b_{11}}, \dots, 1/\sqrt{b_{nn}})$ et $A = DBD$).
Application de l'inégalité de Hadamard : ("le volume d'un parallèlépipède est maximal quand ses vecteurs de base sont orthogonaux") Soit $C = (c_{ij})$ une matrice (n, n) réelle. Montrer que

$$|\det C| \leq ({c_{11}}^2 + \dots + {c_{1n}}^2)^{1/2} \cdots ({c_{n1}}^2 + \dots + {c_{nn}}^2)^{1/2}$$

(Méthode : considérer $B = C^tC$). Préciser les cas d'égalité.

10. On considère la partition de $L_s(E)$ notée (P_+, P_0, P_-), où P_+ est l'ensemble des endomorphismes symétriques et définis-positifs, et où $P = P_+ \cup P_0$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques et positifs. Montrer que P et P_+ sont des cônes convexes. Montrer qu'ils sont respectivement fermé et ouvert (Méthode : utiliser la caractérisation des fermés par les suites. Pour montrer que $P_- \cup P_0$ est fermé, utiliser la compacité de la sphère unité de E).
11. Dans l'exercice précédent, caractériser les éléments de P et P_+ en termes de valeurs propres. Si $E = \mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique, dessiner dans $\mathbb{R}^3$ les éléments (a, b, c) tels la matrice
$$M = \begin{bmatrix} a + c & b \\ b & a - c \end{bmatrix}$$
soit, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, celle d'un élément de P_0, de P_+ ou de P_- respectivement.
12. (Théorème d'Olga Taussky). On garde les notations de l'exercice 10. Soient a, b et c trois éléments de P_+ tels que abc soit un endomorphisme symétrique. Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $d(t) = (ta + (1 - t)c)bc$. Montrer que $d(t)$ est symétrique. Montrer que $d(0)$ est dans P_+. Montrer que $d(t)$ n'est jamais dans P_0. Montrer que $t \mapsto d(t)$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $L_s(E)$. En utilisant le résultat de l'exercice 10, à savoir que P_+ et P_- sont des ouverts disjoints, et un raisonnement de connexité, démontrer que abc est défini-positif.
13. (Inégalités de J. Unterberger) On garde les notations de l'exercice 10. Soit $a \in P_+$, et soit $\lambda_1(a)$ la plus petite de ses valeurs propres. Montrer que c'est aussi la distance $d(a)$ au bord du cône, c'est à dire que
$$\lambda_1(a) = d(a) = \inf\{||a - x||;\ x \in P_0\}$$
(Méthode 1 : Soit $x \in P_0$. Pour voir que $||x - a||^2 \geq \lambda_1(a)^2$, considérer une base orthonormale e de diagonalisation de x, écrire
$$(a_{ij}) = [a]_e^e = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) + [v]_e^e,$$
et remarquer que v est orthogonal à x. Méthode 2 : montrer que si $||b|| < \lambda_1(a)$, alors $a + b \in P_+$.)
Application :
$$\mathrm{trace}\, a^{-1} \leq n/d(a) \leq n\ \mathrm{trace}\, a^{-1}.$$

14. (Théorème de Stein) On garde les notations de l'exercice 10. Soit c un endomorphisme de l'espace euclidien E. Montrer qu'il existe y dans P_+ tel que $z = y - cyc^*$ soit aussi dans P_+ si et seulement si $c^n \to_{n\infty} 0$. Méthode pour $\Leftarrow$: établir que si a est un endomorphisme de l'espace réel F de dimension finie, alors $a^n \to_{n\infty} 0$ implique que $id_E - a$ est inversible et que $\Sigma_{n=0}^{\infty} a^n$ converge. Appliquer cela à $F = L_s(E)$ et à $a(y) = cyc^*$. Méthode pour $\Rightarrow$: établir que si $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de P qui est décroissante (c'est à dire que pour tout n, $y_n - y_{n+1}$ est dans P), alors $\lim_{n\infty} y_n$ existe. Appliquer cela à $y_n = c^n y c^{*n}$. De $y_n - y_{n+1} \to_{n\infty} 0$, déduire que $c^n \to_{n\infty} 0$ en se plaçant par exemple dans une base orthonormale de diagonalisation de $z = y - cyc^*$.
15. (Inégalités d'Hermann Weyl) Soit $V_1, V_2, \ldots, V_k$ des sous espaces vectoriels de l'espace de dimension finie V sur un corps quelconque, tels que

$$\dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_k > (k-1)\dim V.$$

Montrer que $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \neq \{0\}$. Méthode : considérer le noyau de l'application de $V_1 \times \cdots \times V_k \to V^{k-1}$ définie par $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto (v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{k-1} - v_k)$.
Si a appartient à l'espace E des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien V de dimension r, on note

$$\lambda_1(a) \geq \lambda_2(a) \geq \cdots \geq \lambda_r(a)$$

ses valeurs propres. Si $\lambda_r(a) \geq 0$, on dit que a est positif.
Soit alors $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dans E tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ soit positif. Montrer que

$$\lambda_{i_1}(a_1) + \lambda_{i_2}(a_2) + \cdots + \lambda_{i_k}(a_k) \geq 0$$

si $i_1 + \cdots + i_k < r + k$. Méthode : appliquer le début à V_j, sous espace vectoriel engendré par des vecteurs propres de a_j associés aux valeurs propres

$$\lambda_{i_j}(a_j), \lambda_{i_j+1}(a_j), \ldots, \lambda_r(a_j);$$

utiliser aussi le lemme suivant : si $a \in E$ et si x dans V est de norme 1, alors $< x, a(x) >$ est inférieur ou égal à $\lambda_1(a)$: ce lemme est à utiliser quand V est remplacé par V_j et quand a est remplacé par la restriction de a_j à V_j.
Applications : Si a et b sont dans E, et si $j + k - 1 \leq r$, montrer que

$$\lambda_j(a) + \lambda_k(b) \geq \lambda_{j+k-1}(a+b).$$

Méthode : appliquer le résultat précédent à $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = -(a+b)$.
Si a et b sont dans E et si de plus b est positif, montrer que

$$\lambda_i(a) \leq \lambda_i(a+b).$$

Méthode : considérer $a_1 = a + b$ et $a_2 = -a$.
16. (Inégalité de Minkowski) Soit a et b des endomorphismes symétriques définis positifs de l'espace euclidien V de dimension r. Montrer que

$$(\det a)^{1/r} + (\det b)^{1/r} \leq (\det(a+b))^{1/r},$$

et préciser les cas d'égalité (Méthode : le démontrer d'abord si $a = \mathrm{id}_V$, puis se ramener à ce cas en considérant $b' = a^{-1/2} b a^{-1/2}$).

17. Soit a et b des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien V de dimension r. On suppose que
a est défini positif et que $c = b - a$ est positif. Montrer que b est défini positif. Montrer que $a^{-1} - b^{-1}$ est positif (Méthode : le démontrer d'abord si $a = \mathrm{id}_V$, puis se ramener à ce cas en considérant $c' = a^{-1/2}ca^{-1/2}$).
18. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'endomorphismes symétriques positifs de l'espace euclidien V. On suppose que pour tout n, $a_n - a_{n+1}$ est positif. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ a une limite.

Bases de Schmidt dans un espace euclidien Si $f = (\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n})$ est une base ordonnée de l'espace euclidien E, la base de Schmidt associée à f est l'unique base ordonnée orthonormale $e = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$ de E telle que pour tout $k = 1, \cdots, n$, $< \vec{e_k}, \vec{f_k} >$ soit positif et $(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_k})$ soit une base du sous espace F_k de E engendré par $(\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k})$. Si E est préhibertien réel de dimension infinie et si $(\vec{f_k})_{k=0}^{\infty}$ est une suite de vecteurs indépendants de E, la définition de $(\vec{e_k})_{k=0}^{\infty}$ est analogue.

1. Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^n$, formé des $(x_1, \cdots, x_n)$ tels que
$$x_1 + \cdots + x_n = 0.$$
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit f la base ordonnée de E définie par
$$\vec{f_1} = (1, -1, 0, \cdots, 0),\ \vec{f_2} = (1, 0, -1, \cdots, 0), \cdots,\ \vec{f_{n-1}} = (1, 0, 0, \cdots, -1).$$
Calculer la base de Schmidt de E associée.
2. Une suite de vecteurs de l'espace euclidien E $(\vec{v_k})_{k=0}^{n}$ est dite régulière si $\vec{v_0} = 0$ et si, pour $0 \leq i < j \leq n$ on a $||\vec{v_i} - \vec{v_j}|| = 1$. Montrer qu'alors $(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$ est une suite indépendante (Méthode : calculer $< \vec{v_i}, \vec{v_j} >$).
3. Montrer qu'il existe des suites régulières. (Par exemple, dans un espace euclidien F de dimension $n+1$ muni d'une base orthonormale $f = (\vec{f_0}, \cdots, \vec{f_n})$, considérer $\vec{v_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{f_k} - \vec{f_0})$).
4. (Base de Schmidt du tétraèdre régulier). Soit $(\vec{v_k})_{k=0}^{n}$ une suite régulière de l'espace euclidien E et soit $e = (\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n})$ la base de Schmidt associée à $(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n})$. Montrer qu'il existe des nombres réels $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_{n-1})$ tels que pour tout $k = 1, \cdots, n$ on ait
$$\vec{v_k} = a_k\vec{e_k} + \sum_{i<k} b_i\vec{e_i}.$$
(Méthode : procéder par récurrence sur k. Si c'est vrai pour k, soit
$$\vec{v_{k+1}} = c_1\vec{e_1} + \cdots + c_k\vec{e_k} + a_{k+1}\vec{e_{k+1}}$$
Pour montrer que $b_1 = c_1, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1}$, montrer que $\vec{v_{k+1}} - \vec{v_k}$ est orthogonal à F_{k-1}, le sous espace engendré par $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_{k-1}}$).
5. Calculer les $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_{n-1})$ de l'exercice prédédent. (Méthode : utiliser $||\vec{v_k}||^2$, $< \vec{v_k}, \vec{v_{k+1}} >$ et $||\vec{v_{k+1}}||^2$ pour montrer que
$$a_{k+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_k^2}).$$

6. Soit $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de réels, pas nécessairement distincts, et soit E l'espace réel des polynômes d'une variable à coefficients réels. Montrer que

$$< P, Q > = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$$

définit un produit scalaire sur E.

7. (Polynômes de Gontcharov) On conserve les notations de l'exercice précédent. Soit $(P_k)_{k=0}^{\infty}$ la base de Schmidt de E engendrée par la base canonique de E définie par $1, X, \cdots, X^n, \cdots$. On considère la matrice U_n d'ordre $n+1$ égale à

$$(P_i^{(j)}(a_j))_{0 \leq i,j \leq n}.$$

Montrer que U_n est à la fois orthogonale et triangulaire. Montrer que la définition de la base de Schmidt implique que la diagonale de U_n est formée de nombres positifs. En déduire que $U_n = I_{n+1}$. Montrer que pour tout P de E on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(a_k) P_n(X).$$

8. On conserve les notations de l'exercice précédent. Montrer que $P_0 = 1$ et que, pour $n > 0$

$$P_n(x) = \int_{a_0}^{x} dt_{n-1} \int_{a_1}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_{a_{n-1}}^{t_1} dt_0.$$

Précisez dans le cas où $a_n = n a_1$ pour tout n, en montrant qu'alors $P'_{n+1}(x) = P_n(x - a_1)$ et que

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x (x - n a_1)^{n-1}.$$

9. (Lemme de Stieltjes) Soit a un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E tel que $id_E - a$ soit défini-positif et tel que, pour tout entier positif p, on ait $\mathrm{Trace}(a^p) \geq 0$. Montrer que les valeurs propres de a sont dans $]-1, 1[$. En déduire que si A est une matrice symétrique (n, n) à coefficients positifs ou nuls et telle que $I_n - A$ soit définie positive, alors $(I_n - A)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls.
Application (Wilson, Proc.A.M.S. 1971) : Soit $(\vec{f_i})_{i=1}^{n}$ une base ordonnée de l'espace euclidien telle que si $i \neq j$ on ait $< \vec{f_i}, \vec{f_j} > \leq 0$.
Soit $(\vec{e}_i)_{i=1}^{n}$ la base de Schmidt engendrée, et soit

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{j} c_{ij} \vec{f_i}$$

Montrer que $c_{ij} \geq 0$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$. Méthode : appliquer le lemme de Stieltjes à

$$I_n - A = \left(< \frac{\vec{f_i}}{||\vec{f_i}||}, \frac{\vec{f_j}}{||\vec{f_j}||} >\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

10. (Matrices de Gram et matrices définies positives). Si les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de l'espace euclidien sont indépendants, montrer que la matrice de Gram $(< u_i, u_j >)_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie positive. Réciproquement, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que c'est la matrice de Gram d'une suite de vecteurs $u_1, \dots, u_n$ indépendants d'un espace euclidien. Méthode : observer que si A est la matrice de Gram de $u_1, \dots, u_n$, alors $A =^t TT$, où T est la matrice triangulaire des coordonnées des $u_1, \dots, u_n$ dans la base de Schmidt qu'ils engendrent.

Deug MIAS U.E.F. 3, 2000-2001, devoir d'analyse 2,
à remettre à la première séance de TD d'analyse de la semaine du 11 janvier 2001.

Exercice A. Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout nombre réel x posons $f_n(x) = e^{-n}\sin(n^2x)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On pose $f = \sum f_n$.

2. Pour tout entier n et tout entier $p > 0$ calculer la dérivée p-ième de f_n. En déduire que la fonction f est de classe C^∞.

3. Montrer que pour tout entier p on a $|f^{(2p+1)}(0)| = \sum_{n=0}^\infty n^{4p+2}e^{-n}$ et $f^{(2p)}(0) = 0$.

4. Soient N et P des entiers positifs et soit x un réel positif. Démontrer l'inégalité

$$\sum_{p=0}^{2P+1} \frac{|f^{(p)}(0)|}{p!}x^p \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-n} \sum_{p=0}^{P} \frac{n^{4p+2}x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

5. Montrer que si $x > 0$ la série de terme général $e^{-n}\mathrm{sh}(n^2x)$ est divergente. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est 0.

Exercice B. Soit p un entier positif. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante : $x(1-x)y'' + (p-3x)y' - y = 0$. On souhaite trouver une solution de cette équation qui soit développable en série entière en 0 : $y(x) = \sum_{k=0}^\infty a_kx^k$.

1. Montrer que si une telle série existe, de rayon de convergence $R > 0$, alors ses coefficients satisfont la relation de récurrence $(k+p)a_{k+1} = (k+1)a_k,$ pour tout $k \geq 0$.

2. En déduire l'expression des coefficients a_k en fonction de k, p et de a_0 et calculer le rayon de convergence de la série ainsi obtenue.

Exercice C. Soit $0 < p < 1$. Montrer que les intégrales $I = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, $J = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ et la série $S = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+p}$ convergent. Montrer que $I = S$ (Méthode : expliciter le reste de la série entière $\sum_{n=0}^\infty (-1)^nx^n$). En déduire que

$$J = 1/p + 2p\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}/(n^2-p^2)$$

(Méthode : faire le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans $\int_1^\infty x^{p-1}/(1+x)\,dx$).

On considère la fonction f de période 2π telle que $f(x) = \cos px$ si $|x| \leq \pi$. Dans le cas particulier où $p = 1/3$, dessiner le graphe de cette fonction entre -2π et 4π. Revenant au cas général $0 < p < 1$, calculer les coefficients de Fourier de f. Quel théorème du cours garantit que f est la somme de sa série de Fourier ? Utiliser ce qui précède pour montrer que $J = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$.

Exercice D. Trouver le développement en série entière au voisinage de 0 des trois fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad \frac{1}{2-x}\,, \quad \frac{1}{(1-x)^2(2-x)}\,,$$

et préciser leur rayon de convergence.

Soit, pour n entier ≥ 0, les trois nombres $a_n = n+1$, $b_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ et $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$. Calculer c_n.

Des annales du deug 2 eme annee sur http ://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Letac/index.html

Deug MIAS U.E.F. 3, 2000-2001, devoir d'algèbre 2,
à remettre à la première séance de TD d'algèbre de la semaine du 11 janvier 2001.

Exercice A. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ réelles $(2,2)$. On note par x^* la transposée de x et par $c(x)$ la matrice des cofacteurs de x. On note par P_+ le sous espace vectoriel de E formé des x tels que $d = a$ et $c = -b$, et par P_- le sous espace vectoriel de E formé des x tels que $d = -a$ et $c = b$. On note par O_+ le sous groupe du groupe orthogonal $O(2)$ des x tels que $\det x = 1$. On note par O_- le sous ensemble du groupe orthogonal $O(2)$ des x tels que $\det x = -1$. Montrer que $\langle x, x' \rangle = \text{trace}\,(x^* x')$ est un produit scalaire sur E, qu'on considère désormais comme un espace euclidien de dimension 4. Montrer que P_+ et P_- sont orthogonaux et que $E = P_+ \oplus P_-$. Soit S la sphère de E centrée en 0 et de rayon $\sqrt{2}$. Montrer à l'aide du cours que $O_+ = S \cap P_+$ et que $O_- = S \cap P_-$. Montrer que $B(x,y) = \det(x+y) - \det x - \det y$ est une forme bilinéaire symétrique sur E et que $\langle c(x), y \rangle = B(x,y)$. En déduire que $x \mapsto c(x)$ est un endomorphisme symétrique de E. Calculer $c(x)$ quand $x \in P_+$ et quand $x \in P_-$. En déduire les valeurs propres et le polynôme caractéristique de c.

Exercice B. Soit t réel. A l'aide du théorème spectral, trouver deux matrices réelles $(2,2)$ U et D telles que U soit orthogonale, D soit diagonale et $UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^t - e^{-t} \end{bmatrix}$.

Exercice C. Dans $\mathbb{R}^2$, soient n points $P_i = (x_i, y_i)$, où les x_i ne sont pas tous égaux. et soit D la droite d'équation $y = ax + b$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. On veut trouver D tel que $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimum (droite des *moindres carrés*). Pour cela on considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et les trois vecteurs colonnes $\mathbf{1}$ X et Y de E définis par $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$, $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y^T = (y_1, \ldots, y_n)$, et le sous espace vectoriel F de E engendré par $\mathbf{1}$ et X. Quelle est la dimension de F? Calculer en fonction de X et Y les nombres a et b tels que $Z = aX + b\mathbf{1}$ soit la projection orthogonale de Y sur F. Dans le cas particulier où $n = 4$ et où $P_1 = (1,3)$, $P_2 = (2,4)$, $P_3 = (4,3)$, $P_4 = (5,6)$, donner l'équation de la droite des moindres carrés.

Exercice D. (distance entre deux droites affines) Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, si F est un sous espace vectoriel de E, et si $t \in E$, l'ensemble $t + F = \{t + x;\ x \in F\}$ est appelé sous espace affine de E de direction F. Vérifier que $t + F = t' + F'$ si et seulement si $F = F'$ et $t - t' \in F$ (Méthode pour $\Leftarrow$: montrer $F' = t - t' + F$, en déduire $t - t' \in F'$ puis $F' = F$). Soient ensuite F et F' deux sous espaces vectoriels d'un espace euclidien E pas nécessairement orthogonaux, tels que $F \cap F' = \{0\}$. On considère deux sous espaces affines $A = t + F$ et $A' = t' + F'$ et on veut montrer l'existence d'un couple unique $(a_0, a'_0) \in A \times A'$ qui minimise $\|a - a'\|^2$ quand $(a, a') \in A \times A'$. On pose $U = F + F'$ et $V = U^\perp$. Soit $t - t' = u_0 + v_0$ avec $(u_0, v_0) \in U \times V$. Soit x_0 la projection de u_0 sur F parallèle à F', et soit x'_0 la projection de u_0 sur F' parallèle à F. Exprimer (a_0, a'_0) à l'aide de t, t' et de x_0 et x'_0.

On considère enfin les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté définis par $u = (2, -2, -3)$ et $u' = (1, 0, -3)$. Calculer les composantes de $v = u \wedge u'$ ainsi que sa norme. Soit $t = (1,0,0)$ et $t' = (0, -1, 0)$. Appliquer ce qui précède à l'exemple numérique des droites $A = t + \mathbb{R}u$ et $A' = t' + \mathbb{R}u'$. Pour cela, calculer $u_0 = t - t' - \langle t - t', v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}$, puis $x_0 = au$ et $x'_0 = bu'$ avec $u_0 = au + bu'$ et en déduire $a_0 = t - x_0$ et $a'_0 = t' + x'_0$.

Deug 2ième année, 2000-1. Corrigé du devoir d'algèbre 2.

Exercice A. Si $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $x' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, alors

$$\langle x, x' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$

et il est clair que E est isomorphe à $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Si $x \in P_+$ et $x' \in P_-$ alors $\langle x, x' \rangle = aa' + bb' + (-b)b' + a(-a') = 0$ et donc P_+ et P_- sont orthogonaux. Ils sont donc en somme directe d'après un th. du cours. De plus, une base de P_+ est le couple $f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $f_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: P_+ est donc de dimension 2. De même, une base de P_- est le couple $f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $f_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: P_- est aussi de dimension 2. Donc $P_+ \oplus P_-$ est de dimension 4. Comme E est de dimension 4, un th. de 1 ière année implique $P_+ \oplus P_- = E$.

Le cours montre que $x \in O_+$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta f_1 + \sin\theta f_2$. Un tel x est donc dans P_+ et est tel que $\|x\|^2 = 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$. Donc $O_+ \subset S \cap P_+$. Inversement si $x = af_1 + bf_2 \in S \cap P_+$ alors $2a^2 + 2b^2 = 2$ et il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ ce qui conduit à $x \in O_+$. D'où $S \cap P_+ \subset O_+$ et d'où l'égalité entre ces deux ensembles. De même, le cours montre que $x \in O_-$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta f_3 + \sin\theta f_4$, et on montre de manière similaire que $S \cap P_- = O_-$.

Si $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $y = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, alors $c(x) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ et donc $\langle c(x), y \rangle = da' - cb' - bc' + ad'$. Comme

$$\det(x+y) - \det x - \det y = (a+a')(d+d') - (b+b')(c+c') - ad + bc - a'd' + b'c' = da' - cb' - bc' + ad',$$

on a $\langle c(x), y \rangle = B(x, y)$. Comme B est une forme bilinéaire symétrique, cela entraine d'après le cours que c est un endomorphisme symétrique. Si $x \in P_+$ on a $c(x) = x$. Donc 1 est valeur propre de c et P_+ est contenu dans l'espace propre E_1. Si $x \in P_-$ on a $c(x) = -x$. Donc -1 est valeur propre de c et P_+ est contenu dans l'espace propre E_{-1}. Comme $P_+ \oplus P_- = E$, cela entraine que $P_+ = E_1$ et que $P_- = E_{-1}$. Les seules valeurs propres de c sont donc ± 1, chacune de multiplicité 2. Le polynôme caractéristique de c est donc $(X-1)^2(X+1)^2$.

Exercice C. Les vecteurs $\mathbf{1}$ et X sont indépendants, car les x_i ne sont pas tous égaux. Donc la dimension de F est 2. D'après le cours, Z dans F est le projeté orthogonal de Y sur F si et seulement si $Y - Z$ est orthogonal à F, ce qui est équivalent à ce que $Y - Z$ soit $\perp$ à chacun des vecteurs d'une base de F. Appliquons ce principe à la base $\mathbf{1}, X$. On obtient les deux équations

$$(y_1 - ax_1 - b) + \cdots + (y_n - ax_n - b) = 0; \quad (y_1 - ax_1 - b)x_1 + \cdots + (y_n - ax_n - b)x_n = 0,$$

qui sont un système linéaire en a, b :

$$\begin{array}{rcl} (x_1 + \ldots + x_n)a + nb & = & y_1 + \cdots + y_n \\ (x_1^2 + \ldots + x_n^2)a + (x_1 + \cdots + x_n)b & = & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{array}$$

Le déterminant du système est $D = n\sum x_i^2 - (\sum x_i)(\sum y_i)$ et sa solution est $a = \frac{1}{D}(n\sum x_iy_i - (\sum x_i)(\sum y_i))$ et $b = \frac{1}{D}(\sum x_i^2 \sum y_i - (\sum x_iy_i)(\sum y_i))$. L'application numérique donne $y = (x + 5)/2$.

Exercice D. $\Rightarrow$: Si $t - t' \in F$, alors $t - t' + F \subset F$ et donc $t + F \subset t' + F$. Par symétrie du raisonnement on a aussi $t' + F \subset t + F$.

$\Leftarrow$: Par hypothèse, pour tout $x' \in F'$ il existe $x \in F$ tel que $t' + x' = t + x$ et donc $x' = t - t' + x \in t' - t + F$. D'où $F' \subset t - t' + F$. L'inverse $t - t' + F \subset F'$ est analogue. En prenant $0 \in F$ on voit que $t - t' \in F$. Donc $t - t' + F = F$ et $F = F'$.

Par définition, $t - t' = x_0 + x'_0 + v_0$. Si $a = t + x$ et $a' = t' + x'$ sont des points quelconques de F et F' alors le carré de leur distance satisfait, puisque v_0 est $\perp$ à l'élément $x_0 + x'_0 + x - x'$ de $U = F + F'$:

$$\|a - a'\|^2 = \|t - t' + x - x'\|^2 = \|x_0 + x'_0 + x - x' + v_0\|^2 = \|x_0 + x'_0 + x - x'\|^2 + \|v_0\|^2 \geq \|v_0\|^2$$

(on a utilisé Pythagore). Or $x_0 + x'_0 + x - x' = 0$ si et seulement si $x_0 + x = x'_0 - x' = 0$, car F et F' sont en somme directe. Il est alors clair que $\|a - a'\|^2$ atteint son minimum $\|v_0\|^2$ si et seulement si $(a, a') = (a_0, a'_0) = (t - x_0, t' + x'_0)$, et la distance minimale entre les 2 variétés affines A et A' est $\|v_0\|$.

On a $v = (6, 3, 2)$, $\|v\|^2 = 49$ et $\|v\| = 7$. La projection de $t - t' = (1, 1, 0)$ sur $V = \mathbb{R}v$ étant

$$v_0 = \langle t - t', \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{9}{49}(6, 3, 2),$$

on en déduit $u_0 = t - t' - v_0 = \frac{1}{49}(-5, 22, -18)$.

On détermine ensuite par exemple $b \in \mathbb{R}$ pour que $u_0 - bu'$ soit proportionnel à u; c'est rapide si on utilise le produit vectoriel : $(u_0 - bu') \wedge u = 0$. Comme

$$[(-5, 22, -18) - 49b(1, 0, -3)] \wedge (2, -2, -3) = (-5 - 49b, 22, -18 + 3.49b) = (0, 0, 0),$$

cela entraine $b = 17/49$ et $u_0 - bu' = (-22, 22, -33)/49 = au = x_0$, avec $a = -11/49$. Donc $a_0 = (1, 0, 0) - (-22, 22, -33)/49 = (71, -22, 33)/49$ et $a'_0 = (0, -1, 0) + (17, 0, -51)/49 = (17, -49, -51)/49$. La distance minimale entre les deux droites est $\|v_0\| = |\langle t - t', \frac{v}{\|v\|}\rangle| = 9/7$.

Les corrigés des exercices B d'algèbre et D d'analyse sont sur le web : Ex 1, examen janvier 1997 et Ex 2, partiel du 13 nov. 1997 :

http ://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Letac/index.html

Deug 2ième année, 2000-1. Corrigé du devoir d'analyse 2.

Exercice A. 1.) $|f_n(x)| \leq e^{-n}$, la série géométrique de raison $e^{-1} < 1$ converge, la série $\sum f_n$ converge donc normalement.

2) On voit facilement que si a est entier, alors $f_n^{(2a)}(x) = e^{-n}n^{4a}(-1)^a \sin(n^2x)$ et $f_n^{(2a+1)}(x) = e^{-n}n^{4a+2}(-1)^a \cos(n^2x)$. Donc $|f_n^{(p)}(x)| \leq e^{-n}n^{2p}$. La série de terme général $u_n = e^{-n}n^{2p}$ satisfait $u_{n+1}/u_n = e^{-1}(1+\frac{1}{n})^{2p} \to e^{-1} < 1$ et est donc convergente d'après D'Alembert. Donc $\sum_n f_n^{(p)}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente d'après un résultat du cours. On en déduit par récurrence sur p que $f = \sum f_n$ a une dérivée continue d'ordre p. Pour $p = 0$ cela vient du fait que les f_n sont continues et que la série converge uniformément. Si c'est vrai pour p on applique un théorème du cours à la série de fonctions $\sum_n f_n^{(p)})$: elle converge uniformément ainsi que la série des dérivées : sa somme est donc dérivable et la dérivée de la somme est la somme de la série des dérivées. La récurrence est donc étendue et f est indéfiniment dérivable.

3) Evident d'après le 2).

4) Le 2) entraine $|f^{(2p+1)}(0)|/(2p+1)! \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-n}n^{4p+2}/(2p+1)!$. Le reste va tout seul avec $f^{2p}(0) = 0$ obtenu au 2.

5) Supposons qu'il existe un $x > 0$ tel que la limite $S(x)$ du premier membre de 4) quand $P \to \infty$ existe et est finie. Si $P \to \infty$ le second membre de 4) tend vers $\sum_{n=0}^{N} e^{-n} \sinh n^2x$ et donc $S(x) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-n} \sinh(n^2x)$. De plus, cette inégalité est valable pour tout N. Cependant, si on pose $u_n = e^{-n}\sinh(n^2x)$, alors $u_{n+1}/u_n \sim \exp((n+1)^2x - n^2x - 1) = \exp(2xn - x^2 - 1)$, de limite $+\infty$. Donc d'après D'Alembert la série diverge, ce qui contredit le fait que ses sommes partielles étaient bornées par $S(x)$. Il y a donc contradiction. La série entière de terme général $f^{(p)}(0)x^p/p!$ ne converge jamais absolument si $x > 0$: son rayon de convergence est donc nul.

Exercice B. $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ entraine d'après le théorème du cours sur la dérivation de la somme d'une série entière à l'intérieur de l'intervalle de convergence :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = A_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = A_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = B_0 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k a_{k+1}x^{k-1} = B_1. \end{aligned}$$

$$0 = (x - x^2)y'' + (p - 3x)y' - y = xB_1 - x^2B_0 + pA_1 - 3xA_0 - y =$$

$$-a_0 + pa_1 + (2a_2 + 2pa_2 - 4a_1)x + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)((k+p)a_{k+1} - (k+1)a_k)x^k.$$

Un théorème du cours dit que si la somme d'une série entière est nulle dans un intervalle ouvert contenant l'origine, alors ses coefficients sont nuls. On en déduit que pour tout $k \geq 0$ on a

$a_{k+1} = \frac{k+1}{k+p} a_k$. (c'est clair pour $k \geq 2$ et on le vérifie pour $k = 0$ et $k = 1$). Donc on voit facilement par récurrence que si $k \geq 1$ on a

$$a_k = \frac{k!}{\prod_{j=1}^{k-1}(j+p)} a_0.$$

La règle de D'Alembert appliquée à $u_n = |a_n x^n|$ donne un rayon de convergence égal à 1.

Exercice C. 1) Puisque $\frac{x^{p-1}}{1+x} \sim_0 x^{p-1}$ alors I converge, d'après le critère de Riemann en 0 appliqué à $\alpha = 1-p < 1$. De même, puisque $\frac{x^{p-1}}{1+x} \sim_\infty x^{p-2}$ alors $\int_1^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$ converge, d'après le critère de Riemann à l'infini appliqué à $\alpha = 2-p > 1$. Donc J converge. La série S converge d'après le critère classique sur les séries alternées, car $n \mapsto 1/(n+p)$ décroit vers 0.

2) Ensuite, en explicitant le reste de la série géométrique de raison $(-x)$ on écrit :

$$\frac{x^{p-1}}{1+x} = x^{p-1}(1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}),$$

on intègre cette expression entre 0 et 1, on introduit $R_n = \int_0^1 \frac{x^{p+n}dx}{1+x}$ et la somme partielle S_n de la série S. On obtient ainsi $I = S_n + R_n$. Finalement, puisque pour $x > 0$ on a $1/(1+x) \leq 1$ on a la majoration $|R_n| \leq \int_0^1 x^{p+n}dx = 1/(p+1+n) \to_n 0$. Donc $S_n \to I$ et $S = I$.

3) Notons plutôt $I(p) = I$. Alors le changement de variable $x \mapsto 1/x$ montre que $\int_1^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = I(1-p)$, et donc que $J = I(p) + I(1-p)$. Le 2) appliqué à $I(1-p)$ donne, en décalant $n \mapsto n+1$:

$$I(1-p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-p} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-p};$$

$$J = I(p) + I(1-p) = \left(\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-p} = \frac{1}{p} + 2p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - p^2}.$$

4) La fonction f est paire et continue. Sa dérivée est égale à $-p \sin px$ dans $]\pi, \pi[$ et de période 2π. Elle est donc continue par morceaux. Donc f satisfait aux conditions du théorème de Dirichlet et sa série de Fourier au point x converge vers $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$, qui est égal à $f(x)$ puisque de plus f est continue. Donc, en calculant les coefficients de Fourier de f on obtient, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\cos(px) = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} \frac{2p}{n^2 - p^2}\right) \cos(nx).$$

Faisons alors $x = 0$ dans cette égalité, nous obtenons d'après l'expression de J du 3) que $1 = \frac{\sin(p\pi)}{\pi} J$, ce qui est équivalent au résultat voulu.

Remarques : faire $x = \pi$ est bien intéressant aussi et fournit $\pi \cot(p\pi) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{p^2 - n^2}$. Quant à l'égalité de Plancherel appliquée à f, elle donne la remarquable identité

$$\frac{\pi^2}{(\sin(p\pi))^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}.$$

Université Paul Sabatier, Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ALGÈBRE du 24 janvier 2001.

Durée 1.30, aucun document. Affichage des résultats le 2/2, 16 heures.
Effectuez les calculs lentement et au brouillon.

Question de cours. Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien et montrer que ses valeurs propres, si elles existent, sont dans $\{-1, 1\}$.

Exercice A. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère le plan vectoriel

$$F = \{(x, y, z);\ 6x + 3y - 2z = 0\}.$$

Donner une base orthonormale de $F^\perp$. Calculer le projeté orthogonal du vecteur $\vec{v} = (7, 7, 7)$ sur $F^\perp$, puis en déduire le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur F.

Exercice B. Trouver les nombres réels a, b, c, pour que la matrice suivante

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{bmatrix}$$

soit dans $SO(3)$, c'est à dire telle que U soit orthogonale de déterminant positif.

Exercice C. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère l'endomorphisme symétrique a dont la matrice représentative dans la base canonique $e = (e_1, e_2)$ est

$$A = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix},$$

de trace 125 et de déterminant 2500. Trouver une base orthonormale $f = (f_1, f_2)$ telle que la matrice représentative de a dans cette base soit diagonale (on précisera donc les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base e). En déduire une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D telles que $A = UDU^{-1}$. À l'aide des résultats précédents, montrer que A est une matrice définie positive et calculer $B = \sqrt{A}$, c'est à dire la matrice symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Exercice D. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme n dont la matrice représentative dans la base canonique $e = (e_1, e_2)$ est

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que n est nilpotent, et trouver une base orthonormale $f = (f_1, f_2)$ telle que la matrice représentative de n dans cette base soit triangulaire supérieure (on précisera donc les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base e).

Barême : Qdc : 1+2 points; A : 3 points; B : 4 points. C : 6 points. D : 4 points.

Université Paul Sabatier, Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ANALYSE du 24 janvier 2001.

Durée 1.30, aucun document. Affichage des résultats le 2/2, 16 heures.
Effectuez les calculs lentement et au brouillon.

Question de cours. Soit E un espace normé, U et F des parties de E. Que signifie la phrase "U est ouvert" ? Que signifie la phrase "F est fermé" ? Énoncer sans démonstration une caractérisation des fermés en termes de suites.

Exercice A.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_1^\infty \frac{h^n}{n}$? Si $-R < h < R$, donner la somme de la série à l'aide du cours, ainsi que la somme de $\sum_1^\infty \frac{h^{n-1}}{n}$ (pour cette dernière, penser à distinguer $h \neq 0$ et $h = 0$).
2. Pour x réel, soit $u_n(x) = \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 1.$$

   Montrer que $\sum_1^\infty u_n(x)$ converge normalement dans $[0,1]$. On note par $f(x)$ sa somme. Pourquoi f est elle continue dans $[0,1]$? Dans la suite, on admet que $f(1) = \pi^2/6$. En déduire $f(0)$.
3. Soit $0 < \epsilon < 1/2$. Montrer que $\sum_1^\infty u_n'(x)$ converge uniformément dans $[\epsilon, 1-\epsilon]$. Pourquoi $f'(x)$ existe t-elle dans $[\epsilon, 1-\epsilon]$? Pourquoi $f'(x)$ existe t-elle dans $]0,1[$? À l'aide du 1), calculer $f'(x)$ dans $]0,1[$.
4. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0,1[$ par $x \mapsto -(\log x)(\log(1-x))$. En déduire f dans $[0,1]$. Calculer les sommes des séries

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 2^n},\ \sum_1^\infty \frac{1+2^n}{n^2 3^n}.$$

Exercice B.

1. Soit f la fonction paire, de période $T = 2\pi$ et donnée pour $0 \leq x \leq \pi$ par $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}$. Dessinez la fonction f entre -2π et 4π puis calculez sa série de Fourier. Justifiez la convergence simple de cette série vers f. Cette convergence est-elle uniforme ?
2. Á l'aide d'une intégration que vous justifierez, montrez l'égalité :

$$\forall x \in [0,1] \quad , \qquad \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{\pi}) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin((2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

   et en déduire, par un choix convenable de x, la valeur de $A = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Barème sur 40 : Qdc : 2+1+3 points ; A1 : 1+1+1 points ; A2 : 2+2+1+1 points ; A3 : 2+1+1 points ; A4 : 1+3+1+1 points ; B1 : 1+4+ 2+2 ; B2 : 4 +2.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ALGÈBRE du 24 janvier 2001.

Question de cours. Si E est un espace euclidien et si $a \in L(E)$, alors a est dit orthogonal si a^*a est égal à l'identité. Si λ est valeur propre d'un tel a, c'est dire qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $a(x) = \lambda x$. Or

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, a^*a(x)\rangle = \langle a(x), a(x)\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\|x\|^2.$$

Donc $(\lambda^2 - 1)\|x\|^2 = 0$. Comme $\|x\|^2 \neq 0$, on a $\lambda^2 = 1$.

Exercice A. Considérons le vecteur $\vec{N} = (6, 3, -2)$. Puisque son produit scalaire avec (x, y, z) est $6x + 3y - 2z$ il est clair que $\vec{N}$ est orthogonal à F. Puisque F est de dimension 2, alors $F^\perp$ est de dimension 1 et donc $\vec{N}$ est une base de $F^\perp$ et $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ est une base orthonormale de $F^\perp$. Puisque $\|\vec{N}\|^2 = 36 + 9 + 4 = 49 = 7^2$, on a $\vec{n} = (\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-2}{7})$. Puisque $\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle = 7$, le projeté orthogonal de $\vec{v} = (7, 7, 7)$ sur $F^\perp$ est $\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle\vec{n} = 7\vec{n} = (6, 3, -2)$ et donc son projeté orthogonal sur F est $\vec{v} - 7\vec{n} = (1, 4, 9)$.

Exercice B. $U^TU = I_3$ entraine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c) & \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b) & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

Donc $a = b$, $c = -2a$ et $6a^2 = 1$. Si $a = \pm 1/\sqrt{6}$ U est donc dans $O(3)$ et son déterminant est alors $-\sqrt{6}a$. Pour que U soit dans $SO(3)$ il faut $a = -1/\sqrt{6}$

Exercice C. Comme A est d'ordre 2, son polynôme caratéristique est

$$X^2 - (\operatorname{trace} A)X + \det A = X^2 - 125X + 2500 = (X - 25)(X - 100).$$

Les valeurs propres de A sont 25 et 100. Si $f_1 = (x, y)^T$ est un vecteur propre associé à 25, il satisfait $73x - 36y = 25x$, ou $4x = 3y$.Donc $f_1 = (3c, 4c)^T$. Si on veut que f_1 soit de norme 1, il faut prendre $c = \pm 1/5$. De même, si $f_2 = (x, y)^T$ est un vecteur propre associé à 25, il satisfait $73x - 36y = 100x$, ou $3x = -4y$. Donc $f_2 = (4c, -3c)^T$. Si on veut que f_2 soit de norme 1, il faut prendre $c = \pm 1/5$. Une réponse à la question posée est *par exemple* $f_1 = (3/5, 4/5)^T$, $f_2 = (-4/5, 3/5)^T$. Ces vecteurs sont bien de norme 1. Ils sont de plus orthogonaux, étant vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique. Comme l'espace est de dimension 2 ils forment une base f. La matrice représentative de a dans f est $[a]_f^f = D = Diag(25, 100)$. Si $U = [id]_f^e$ est la matrice de changement de base, elle est donc orthogonale car matrice de changement entre bases orthonormales et donc $[id]_e^f = U^{-1} = U^T$. D'où $A = UDU^T$. On a $U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Pour avoir B on prend $C = Diag(5, 10)$ qui satisfait $C^2 = D$ et a ses valeurs propres positives. On prend ensuite $B = UCU^T$ qui a pour valeurs propres 5 et 10 et est symétrique. B est donc définie positive d'après un théorème du cours. Ensuite $B^2 = UCU^TUCU^T = UCCU^T = UDU^T = A$. Explicitement :

$$B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix}.$$

Exercice D. Puisque $N^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, il est clair que n est nilpotent. Ses valeurs propres sont donc toutes nulles, puisque le polynôme minimal est X^2. Si $f = (f_1, f_2)$ est une base telle que $[n]_f^f$ soit triangulaire supérieure, la diagonale de $[n]_f^f$ sera formée des valeurs propres de n et sera donc nulle. La théorie concernant la décomposition de Dunford garantit d'ailleurs l'existence d'une telle base f. L'élément f_1 doit être dans le noyau de n. Si $[f_1]^e = (x, y)^T$ il est clair qu' il suffit de prendre $x = y \neq 0$. L'élément f_2 doit être dans le noyau de n^2 et être indépendant de f_1. Comme $n^2 = 0$ n'importe quel vecteur f_2 indépendant de f_1 convient. Si $[f_2]^e = (a, b)^T$, il faut $a \neq b$. Dans ces conditions

$$[n]_f^f = [id]_e^f [n]_e^e [id]_f^e$$

se détaille ainsi : la matrice de changement de base de e vers f est $[id]_f^e = \begin{bmatrix} x & a \\ x & b \end{bmatrix}$, son inverse est $[id]_e^f = \frac{1}{x(b-a)} \begin{bmatrix} b & -a \\ -x & x \end{bmatrix}$, et on a bien

$$[n]_f^f = \frac{1}{x(b-a)} \begin{bmatrix} b & -a \\ -x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & a \\ x & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (b-a)/x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque enfin l'énoncé demande une base orthonormale il faut prendre $x = \epsilon_1 1/\sqrt{2}$, avec $\epsilon_1 = \pm 1$ pour que f_1 soit de norme 1, prendre $a + b = 0$ pour que f_2 soit orthogonal à f_1 et prendre $a = \epsilon_2 1/\sqrt{2}$, avec $\epsilon_2 = \pm 1$ pour que f_2 soit de norme 1. Et donc $[id]_f^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_1 & -\epsilon_2 \end{bmatrix}$. Puisque la matrice $[id]_f^e$ change une base orthonormale en une base orthonormale, c'est une matrice orthogonale et sa matrice inverse $[id]_e^f$ est la transposée de $[id]_f^e$.

Deug 2 ième année. Corrigé de l'examen d'ANALYSE du 24 janvier 2001.

Question de cours. "U est ouvert" signifie que pour tout $x \in U$ on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que l'ensemble des $y \in E$ tels que $\|x - y\| \leq r$ est contenu dans U. "F est fermé" signifie que son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert. Proposition : Soit F une partie de l'espace normé E. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de F qui est convergente, alors $\lim_n x_n$ est dans F.

Exercice A. 1) En appliquant le critère de D'Alembert à la suite $u_n = |h|^n/n$, puisque $\lim_n u_{n+1}/u_n = |h|$ on voit que la série $\sum_1^\infty \frac{h^n}{n}$ converge si $|h| < 1$ et diverge grossièrement si $|h| > 1$. Le rayon de convergence R est donc 1. D'après le cours sa somme dans l'intervalle $]-1, 1[$ est $-\log(1-h)$. Donc dans le même intervalle $\sum_1^\infty \frac{h^{n-1}}{n} = -\frac{1}{h}\log(1-h)$ si $h \neq 0$ et $= 1$ si $h = 0$.

2) $\Leftarrow$ Si $0 \leq x \leq 1$ alors $|u_n(x)| = \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n) < \frac{2}{n^2} \to_n 0$. Ceci entraine au passage que $\sum_1^\infty u_n(x)$ converge normalement dans $[0, 1]$, puisque $\sum_1^\infty \frac{2}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 2 > 1$.

$\Rightarrow$ Si $x > 1$ alors $u_{2n}(x) > \frac{1}{4n^2}x^{2n} \to_n +\infty$ (car l'exponentielle l'emporte sur la puissance). De même si $x < 0$ alors $u_{2n}(x) > \frac{1}{4n^2}(1-x)^{2n} \to_n +\infty$. Donc $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 si $x \notin [0, 1]$.

La fonction f est la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement dans $[0, 1]$, donc uniformément dans $[0, 1]$. La fonction f y est donc continue d'après le cours. Comme $u_n(x) = u_n(1-x)$, cela entraine que $f(x) = f(1-x)$ et donc $f(0) = f(1) = \pi^2/6$.

3) Si $x \in [\epsilon, 1-\epsilon]$ alors $u_n'(x) = \frac{1}{n}(x^{n-1} - (1-x)^{n-1})$ et donc $|u_n'(x)| \leq \frac{1}{n}((1-\epsilon)^{n-1}$. D'après le 1) appliqué à $h = 1-\epsilon$ la série $\sum_n \frac{1}{n}((1-\epsilon)^{n-1}$ converge. Par conséquent la série $\sum_n u_n'(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[\epsilon, 1-\epsilon]$. D'après le cours, comme de plus $\sum_n u_n(x)$ converge, cela entraine que, dans $[\epsilon, 1-\epsilon]$, sa somme $f(x)$ est dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n'(x)$. Comme ceci est valable pour tout $\epsilon \in]0, 1/2]$, cela entraine que $f'(x)$ existe pour tout $x \in]0, 1[$ et que, d'après le 1) on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(x^{n-1} - (1-x)^{n-1}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}x^{n-1} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(1-x)^{n-1} = -\frac{1}{x}\log(1-x) + \frac{1}{1-x}\log x.$$

4) La dérivée de $y : x \mapsto -(\log x)(\log(1-x))$ satisfait $f'(x) = y'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$. Il existe donc un nombre C tel que $f(x) = C - (\log x)(\log(1-x))$ pour tout $x \in]0, 1[$. On sait de plus que f est *continue* en 0 et 1 et que $f(0) = f(1) = \pi^2/6$. Or $\log(1-x) \sim -x$ au voisinage de 0. Donc $y(x) \sim -x \log x$ au voisinage de 0. Comme la puissance l'emporte sur le logarithme, la limite de $y(x)$ en 0 est 0 et donc $C = f(0) = \pi^2/6$. En résumé, pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - (\log x)(\log(1-x)).$$

Enfin on applique ce résultat à $x = 1/2$ et $x = 1/3$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2, \ \sum_1^\infty \frac{1+2^n}{n^2 3^n} = f(\frac{1}{3}) = \frac{\pi^2}{6} - (\log 3)^2 + (\log 3)(\log 2).$$

Exercice B. 1) Le graphe est en dents de scie et montre que f est bien définie et continue. On le montre directement en constatant que sur $[-\pi, 0]$, à cause de la parité, la fonction vaut $f(x) = 1/2 + x/\pi$ et que la limite à gauche en 0 est $1/2$. Sur $[\pi, 2\pi]$ à cause de la périodicité la fonction vaut $f(x) = 1/2 + (x - 2\pi)/\pi$ et sa limite à droite en π est $-1/2$.

Comme f est paire, les coefficients de Fourier b_n sont nuls. Comme $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$, le coefficient a_0 est nul. Ensuite, si $n > 0$ on a, à l'aide d'une intégration par parties basée sur $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(nx)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi})\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= 0 - 0 - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi^2 n^2}(1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Donc pour n entier ≥ 0 on a $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$. La fonction f est C_1 par morceaux, le théorème de Dirichlet est donc applicable et la somme de sa série de Fourier est donc en tout point x égale à $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. Comme de plus f est continue, la série de Fourier converge donc vers $f(x)$ en tout point x :

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Comme $|\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}| \leq \frac{1}{(2n+1)^2}$ et que la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge d'après le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 2 > 1$, la série de Fourier est normalement donc uniformément convergente dans $\mathbb{R}$.

2) Rappelons qu'un théorème du cours dit que si une série de fonctions continues $\sum_n u_n$ sur un intervalle borné $[a, b]$ converge uniformément alors

$$\int_a^b \sum_n u_n(t)dt = \sum_n \int_a^b u_n(t)dt.$$

Appliquons cela à $a = 0$, $b = x$ et à $u_n(t) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$. Comme

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{\pi}), \quad \int_0^x u_n(t)dt = \frac{4}{\pi^2}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3},$$

la formule demandée est montrée. Si on fait $x = \pi/2$ dans cette formule on obtient, puisque $\sin((2n+1)\pi/2) = (-1)^n$:

$$A = \frac{\pi^2}{4}.\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{(\pi/2)^2}{\pi}) = \frac{\pi^3}{32}.$$

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ANALYSE du 3 Septembre 2001.
Durée 1h 30. Aucun document. Affichage des résultats le Jeudi 20 septembre à 16 h.

Question de cours. Soit E un espace normé de dimension finie. Soit F et K des parties de E. Que signifie la phrase "F est un fermé ?" Que signifie la phrase "K est un compact ?" Donner une caractérisation des fermés en termes de suites. Donner une caractérisation des compacts en termes de suites.

Exercice A. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies ainsi : $u_n = 1$ si $n \geq 0$ est pair et $u_n = 0$ si n est impair, $v_n = 1$ si $n \geq 0$ est divisible par 3 et $v_n = 0$ si n n'est pas divisible par 3, et w_n égal au nombre de couples (i,j) d'entiers ≥ 0 tels que $n = 2i + 3j$. Par exemple, si $n = 10$, les couples (i,j) acceptables sont (5,0) et (2,2) et donc $w_{10} = 2$. Pour tout $n \geq 0$ on a donc $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, un point qu'on ne demande pas de démontrer.

1. Calculer les sommes des séries entières $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n z^n$ avec leurs rayons de convergence respectifs et en déduire que pour $|z| < 1$ on a $\sum_{n\geq 0} w_n z^n = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$. On admettra sans démonstration que cette fraction rationnelle se décompose en éléments simples ainsi : $\frac{1}{4(1+z)} + \frac{1}{4(1-z)} + \frac{1}{6(1-z)^2} + \frac{1}{3(1+z+z^2)}$.
2. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$. Quel est son rayon de convergence ?
3. On admet $\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin((1-2n)\frac{\pi}{3}) z^n$. Indiquer le principe de la démonstration de cette formule. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est ≥ 1.
4. A l'aide de ce qui précède, calculer w_n pour tout n. Retrouver la valeur de $w_{10} = 2$ à l'aide de la formule obtenue. Calculer w_{53}.

Exercice B. Soit r un entier fixé. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des matrices carrées X réelles d'ordre r muni d'une norme quelconque. Montrer que $X \mapsto \det X$ est une fonction continue sur $\mathcal{M}$. Montrer que le sous ensemble de $\mathbb{R}$ formé des réels non nuls est un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ qui sont inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}$.

Exercice C. Parmi les séries suivantes, lesquelles sont absolument convergentes, lesquelles sont convergentes sans être absolument convergentes, lesquelles sont divergentes ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})\right)^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(\frac{n+1}{n}).$$

Exercice D. On considère la fonction f de période 2π telle que pour $x \in]-\pi, \pi]$ on ait $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Dire pour quelles valeurs de x la série de Fourier de f converge et donner sa somme en ces points (on ne demande pas de calculer les coefficients de Fourier).

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ANALYSE du 3 Septembre 2001.

QC : F fermé signifie que le complémentaire $U = E \setminus F$ de F relativement à E est un ouvert. On peut même préciser : U ouvert signifie que pour tout $c \in E$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre c et de rayon r soit inclue dans U. K compact signifie que K est fermé et borné, c'est à dire qu'il existe $R > 0$ tel que K soit contenue la boule ouverte de centre 0 et de rayon R.

F est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_{n\geq 0}$ formée d'éléments de F, alors la limite L de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est encore dans F.

K est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ formée d'éléments de K, on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{n\geq 0}$ de sorte que la suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ soit convergente et que sa limite soit dans K.

Exercice A.

1. Puisque $\sum_{n\geq 0} u_n z^n = \sum_{k\geq 0} z^{2k}$ et $\sum_{n\geq 0} v_n z^n = \sum_{k\geq 0} z^{3k}$, on voit que ces deux séries sont deux séries géométriques de raisons respectives z^2 et z^3. Elles convergent respectivement si et seulement si $\|z^2\| < 1$ et $\|z^3\| < 1$, autant dire si $\|z\| < 1$. Par définition du rayon de convergence, elles ont donc le même rayon de convergence égal à 1. Puisque la suite (w_n) est le produit de Cauchy des deux suites (u_n) et (v_n), d'après le cours on a $\sum_{n\geq 0} w_n z^n = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$ pour $|z| < 1$.

2. Rappelons la formule du binôme de Newton : si α est un réel et si $\|z\| < 1$ on a

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)\frac{z^n}{n!}.$$

En posant $\beta = -\alpha$ et en changeant z en $-z$, cette formule s'écrit aussi (plus commodément ici) :

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta(\beta + 1)\cdots(\beta + n - 1)\frac{z^n}{n!}.$$

Faisant $\beta = 2$ dans cette dernière formule on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

Le rayon de convergence dans la formule de Newton est 1 si α n'est pas un entier ≥ 0. Ici, $\alpha = -2$, le rayon de convergence est donc 1.

3. Pour développer en série entière une fraction rationnelle sans pôle à l'origine on sait qu'il faut la décomposer en éléments simples de première espèce auxquels on applique ensuite la formule du binôme de Newton pour les développer en série entière, et sommer ensuite le résultat. On applique ce principe à la fraction rationnelle $\frac{1}{1+z+z^2}$ (qui est un élément simple, mais de *deuxième* espèce). Ses pôles sont $j = e^{2i\pi/3}$ et $\overline{j} = j^2 = e^{-2i\pi/3}$.

Puisque $|\sin((1-2n)\frac{\pi}{3})z^n| \leq |z|^n$, il est clair que la série entière converge pour tout z tel que $|z| < 1$. C'est dire que son rayon de convergence est ≥ 1.

4. En utilisant la décomposition en éléments simples réels du 1, ainsi que les 2 et 3 on a

$$w_n = \frac{(-1)^n}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n+1}{6} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin((1-2n)\frac{\pi}{3}).$$

Si $n = 10$ on obtient $w_{10} = \frac{(-1)^{10}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{11}{6} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin(19\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{11}{6} - \frac{1}{3} = 2$. De même $w_{53} = 9$.

Exercice B. Puisque $X \mapsto \det X$ est une fonction polynomiale, elle est continue. Ensuite $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert, comme complémentaire du fermé $\{0\}$. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}$ est l'image inverse de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $X \mapsto \det X$. Comme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert et comme $X \mapsto \det X$ est continue, cette image inverse est continue.

Exercice C. Si $u_n = \frac{n^n}{n! 2^n}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^n$$

a pour limite $\frac{e}{2} > 1$. La première série diverge donc grossièrement par le critère de D'Alembert. Comme la deuxième série est de terme général $1/u_n$, le critère de D'Alembert conduit à la limite $2/e < 1$ et la deuxième série converge. Puisqu'elle est positive, elle converge aussi absolument. Ensuite, comme $\log(1 + h) \sim h$ au voisinage de $h = 0$, on a donc $\log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $(\log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}))^2 \sim \frac{1}{n}$ si n est grand. Comme la série harmonique diverge, d'après le critère d'équivalence la troisième série diverge. La quatrième série est alternée. De plus pour tout n on a

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

donc $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ et donc $\log(\frac{n+1}{n}) > \log(\frac{n+2}{n+1})$. Enfin, le terme général tend vers 0. On est donc dans les conditions d'application du théorème des séries alternées et la quatrième série est donc convergente. Toutefois on a $\log(\frac{n+1}{n}) = \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique diverge, d'après le critère d'équivalence la quatrième série n'est pas absolument convergente.

Exercice D. On a $f(\pi) = 0$. De plus, la limite à droite de f en $-\pi$ est 0. La fonction 2π périodique f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable partout sauf aux points de la forme $(2k + 1)\pi$ avec k entier relatif. Elle est donc C^1 par morceaux et on peut lui appliquer le théorème de Dirichlet : sa série de Fourier converge donc en tout point et sa valeur pour x est $\frac{1}{2}(f(x - 0) + f(x + 0))$. Mais comme la fonction f est continue, la série de Fourier converge en fait vers $f(x)$ en tout point x.

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ALGEBRE du 3 Septembre 2001.
Durée 1h 30. Aucun document. Affichage des résultats le Jeudi 20 septembre à 16 h.

Question de cours. Soit A une matrice symétrique carrée réelle. Que signifie la phrase "A est définie -positive" ? Donner une caractérisation des matrices définies -positives.

Exercice A. Soit p et q des entiers positifs fixés et soit $\mathcal{M}$ l'espace des matrices réelles $X = (x_{ij})$ à p lignes et q colonnes. Si $1 \leq i_0 \leq p, 1 \leq j_0 \leq q$ on note $E_{i_0 j_0}$ la matrice (a_{ij}) de $\mathcal{M}$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i = i_0$ et $j = j_0$, et $a_{ij} = 0$ dans les autres cas.

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$?
2. Soit D une matrice diagonale réelle d'ordre p et soit $d_1, \ldots, d_p$ ses éléments diagonaux. On considère l'endomorphisme φ_D de $\mathcal{M}$ défini par
$$X \mapsto \varphi_D(X) = DX.$$
Montrer que pour tous $1 \leq i_0 \leq p, 1 \leq j_0 \leq q$, la matrice $E_{i_0 j_0}$ est un vecteur propre de φ_D et préciser la valeur propre correspondante.
3. L'endomorphisme φ_D de $\mathcal{M}$ admet il une base de vecteurs propres ?
4. Montrer que $\det(\varphi_D) = (\det D)^q$.

Exercice B. Soit $e_0, e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de sa structure euclidienne canonique. On pose
$$h = \frac{1}{n}(e_1 + \cdots + e_n), \ g = \frac{1}{n+1}(e_0 + e_1 + \cdots + e_n).$$

1. Calculer $\|e_0 - g\|^2$ et $\|e_0 - h\|^2$.
2. Montrer que $e_0 - h$ est orthogonal au sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par les n vecteurs $e_i - h$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. Les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n$ forment les sommets d'un tétraèdre régulier situé dans l'hyperplan d'équation $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$. Quelle est la longueur de l'arête de ce tétraèdre ? Quelle est sa hauteur ? Quel est le rayon de la sphère de ce plan qui passe par tous les sommets ? Si $n = 3$ et si un tétraèdre régulier est d'arête a, quelle est sa hauteur en fonction de a? Quel est le rayon de sa sphère circonscrite en fonction de a?

Exercice C. On note U^T la transposée d'une matrice. Trouver une matrice orthogonale U d'ordre 2 telle que $\det U = 1$ et deux nombres $d_1 \geq d_2$ tels que $\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} U^T$.
En déduire $\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}^5$.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ALGÈBRE du 3 Septembre 2001.

QC : La matrice carrée symètrique réelle (n, n) est dite définie positive si pour toute matrice colonne d'ordre n X, réelle non nulle, on a $X^T AX > 0$. La caractérisation demandée est la suivante : la matrice carrée réelle A est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Exercice A.

1. L'ensemble des matrices $E_{i_0j_0}$ avec $1 \leq i_0 \leq p, 1 \leq j_0 \leq q$ forme une base de $\mathcal{M}$. En effet, tout $X = (x_{ij})$ de $\mathcal{M}$ s'écrit $X = \sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}$ ce qui montre que c'est une famille génératrice. De plus, $\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij} = 0$ entraîne que les x_{ij} sont nuls, ce qui montre que c'est une famille libre. Comme il y a pq éléments dans cette base, la dimension de l'espace $\mathcal{M}$ est pq.

2. Le calcul montre que $DE_{i_0j_0} = d_{i_0}E_{i_0j_0}$. Donc $E_{i_0j_0}$ est un vecteur propre de φ_D, il est associé à la valeur propre d_{i_0}.

3. On a vu au 1 que les $E_{i_0j_0}$ formaient une base de $\mathcal{M}$. On a vu au 2 que ce sont des vecteurs propres de φ_D. La réponse est donc oui.

4. En conséquence du 3, on a que φ_D est diagonalisable. Son déterminant est donc le produit de ses valeurs propres avec multiplicités. Donc $\det \varphi_D = (d_1)^q(d_2)^q \cdots (d_p)^q = (\det D)^q$.

Exercice B.

1. On a, d'après Pythagore

$$\|e_0 - g\|^2 = \|\frac{1}{n+1}(ne_0 - e_1 - \cdots - e_n)\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2}(n^2 + 1 + \cdots + 1) = \frac{n}{n+1}.$$

Ensuite

$$\|e_0 - h\|^2 = \|\frac{1}{n}(ne_0 - e_1 - \cdots - e_n)\|^2 = \frac{1}{n^2}(n^2 + 1 + \cdots + 1) = \frac{n+1}{n}.$$

2. Calculons le produit scalaire des deux vecteurs $e_0 - h = \frac{1}{n}(ne_0 - e_1 - \cdots - e_n)$ et $e_1 - h = \frac{1}{n}((n-1)e_1 - e_2 - \cdots - e_n)$. Il est égal à $\frac{1}{n^2}(-(n-1)e_1 + 1 + 1 \cdots + 1) = 0$, puisque en général le produit scalaire des vecteurs $x = x_0e_0 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_0e_0 + \cdots + y_ne_n$ est égal à $x_0y_0 + \cdots + x_ny_n$. Donc $e_0 - h$ et $e_1 - h$ sont orthogonaux. Par symétrie, on a de même que $e_0 - h$ et $e_i - h$ sont orthogonaux pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Donc $e_0 - h$ est orthogonal à l'espace engendré par les $e_i - h$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Il est clair que $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ pour tous $i \neq j$ avec $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$. On a donc bien un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales à $\sqrt{2}$. Comme vu au 1, le carré de sa hauteur est $\|e_0 - h\|^2 = \frac{n+1}{n}$. La hauteur cherchée est donc $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$. Le rayon de la sphère circonscrite est $\|e_0 - g\| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$. Si $n = 3$ et si un tétraèdre régulier est d'arête $\sqrt{2}$ alors sa hauteur est $H = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et le rayon de la sphère circonscrite est $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si l'arête est a, il suffit de multiplier ces résultats par $a/\sqrt{2}$. On obtient

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice C. Il nous est donc demandé de diagonaliser en base orthonormale la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$. Son polynôme caractéristique $\lambda^2 - \lambda \operatorname{trace} A + \det A$ est $\lambda^2 - 25\lambda$

et ses valeurs propres sont $d_1 = 25$ et $d_2 = 0$. Un vecteur propre (x, y) de $\mathbb{R}^2$ pour la valeur propre 25 est donné par l'équation $16x + 12y = 25x$ équivalente à $4y = 3x$. Les vecteurs propres de norme 1 satisfont de plus $x^2 + y^2 = 1$. On obtient donc $f_1 = (x, y) = \epsilon_1(4/5, 3/5)$, avec $\epsilon_1 = \pm 1$. De même pour la valeur propre $d_2 = 0$ on obtient les deux vecteurs propres de norme 1 $f_2 = (x, y) = \epsilon_2(-3/5, 4/5)$, avec $\epsilon_2 = \pm 1$. Notons alors par e la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$, par $f = (f_1, f_2)$ la base de vecteurs propres ci dessus et par a l'endomorphisme de E tel que $[a]_e^e = A$. Alors on a

$$A = [a]_e^e = [\mathrm{id}_E]_e^f [a]_f^f [\mathrm{id}_E]_f^e.$$

On a naturellement

$$[a]_f^f = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer la matrice de changement de base $U = [\mathrm{id}_E]_e^f$ on exprime en colonne les composantes de la nouvelle base f en fonction de l'ancienne e. On obtient

$$U = \begin{bmatrix} \epsilon_1 4/5 & -\epsilon_2 3/5 \\ \epsilon_1 3/5 & \epsilon_2 4/5 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est $\epsilon_1\epsilon_2$. Pour qu'il soit 1 on peut prendre $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. La matrice U est bien orthogonale ce qui entraîne $UU^T = I_2$. D'où le résultat final

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

L'autre choix possible était de prendre $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ et d'avoir la matrice U opposée.

Finalement, on en déduit

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25^5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = 25^4 \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Deug 2ème année MIAS UEF 3, 2001-2002. Devoir d'Algèbre, à remettre au dernier TD de la semaine du 5 au 9 novembre 2001

Problème 1. On considère les matrices réelles A et B définies par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer B^{-1}, $C = B^{-1}A$, le polynôme caractéristique $P_C(X)$ et montrer que les valeurs propres de C sont

$$\lambda_1 = \alpha = 2\sqrt{30} - 11 = -0,045..., \ \lambda_2 = \alpha^{-1}, \ \lambda_3 = -1.$$

Dans la suite on note $f = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de C. Pourquoi existe t-elle ? Calculer f_1 à une constante multiplicative près.

2) Soit $K : [-1/2, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto K''(x)$ existe et est continue, telle que $\lim_{x\to\infty} K(x) = 0$ et telle que pour tout $n \in /bfN = \{0, 1, 2, \ldots\}$ il existe $V_n = [a_n, b_n, c_n]^T \in \mathbb{R}^3$ avec

$$K(n + h) = 8a_nh^3 + 4b_nh^2 + 2c_nh$$

pour tout $h \in [-1/2, 1/2]$. En d'autres termes, K s'annule sur tous les entiers, et la restriction de K à l'intervalle $[n - 1/2, n + 1/2]$ est un polynôme de degré ≤ 3 (on dit que K est une fonction *spline*). Calculer pour $n \in /bfN$ les 3 nombres suivants $K(n + 1/2)$, $K'(n + 1/2)$, $K''(n + 1/2)$ en fonction de V_n. Calculer ensuite les trois mêmes nombres en fonction de V_{n+1}. Montrer que $AV_n = BV_{n+1}$.

3) Exprimer V_n en fonction de C^n et de V_0. Montrer que $\lim_{x\to\infty} K(x) = 0$ entraîne que $\lim_{n\to\infty\infty} V_n = 0$. Montrer que V_0 est proportionnel à f_1 (Méthode : écrire V_0 dans la base f, en déduire V_n dans la base f pour tout $n \in /bfN$ et utiliser $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$.) En supposant $K'(0) = 1$, donner l'expression de K dans $[-1/2, 1/2]$ puis dans $[1/2, 3/2]$.

Problème 2. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension q et soit a et b dans $L(E)$ de spectres disjoints, c'est à dire que les polynômes caractéristiques P_a et P_b sont premiers entre eux. Montrer que $P_b(a)$ est inversible (appliquer le lemme des noyaux à a et à P_aP_b). On pose ensuite $F = L(E)$ et on considère $\varphi \in L(F)$ défini pour tout $x \in F$ par $\varphi(x) = ax - bx$. Montrer que $\ker \varphi = \{0\}$ (Méthode : soit $x_0 \in F$ tel que $ax_0 = x_0b$; montrer que pour tout polynôme Q on a $Q(a)x_0 = x_0Q(b)$ et appliquer cela à $Q = P_b$). Soit enfin A et B des matrices carrées complexes d'ordre q ayant une valeur propre commune λ et soit U et V des matrices colonnes non nulles d'ordre q telles que $AU = \lambda U$ et $B^TV = \lambda V$. Si $X = UV^T$ calculer $AX - XB$. Conclusion ?

Deug 2 ème année. Corrigé du devoir d'algèbre de novembre 2001. .

Problème 1.
(1) Pour calculer B^{-1}, le plus raisonnable et le plus rapide est de résoudre à la main le système linéaire associé $BU = V$ avec $(x, y, z)^T = U$ et $(X, Y, Z)^T = V$, soit

$$-x + y - z = X, \ 3x - 2y + z = Y, \ -3x + y = Z$$

$$\Rightarrow x = -(X+Y+Z),\ y = -(3X+3Y+2Z),\ z = -(3X+2Y+Z).$$

$$B^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = B^{-1}A = -\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 18 & 11 & 6 \\ 12 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est alors

$$P_C(X) = -X^3 - 23X^2 - 23X - 1 = -(X+1)(X^2+22X+1) = -(X+1)(X-\alpha)(X-\alpha^{-1})$$

(il faut noter que le produit des deux racines de $X^2+22X+1$ est 1, d'après la classe de première). Donc P_C a trois racines réelles distinctes, l'endomorphisme c de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique e est C est donc diagonalisable et il existe une base f de vecteurs propres de c. Si $U = (x,y,z)^T = [f_1]^e$ alors

$$(7+\alpha)x + 4y = -2z,\ 18x + (11+\alpha)y = -6z.$$

Fixons $z \neq 0$. Le déterminant du système de Cramer en (x,y) ci dessus est $D = \alpha^2 + 18\alpha + 5$. Cela peut être simplifié puisque $\alpha^2 = -22\alpha - 1$ par définition de α. Donc $D = 4(1-\alpha)$. En résolvant on obtient $x = 2z$,

$$y = -\frac{3z}{2}\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = -\frac{3z}{2}\frac{\sqrt{30}-5}{6-\sqrt{30}} = -\frac{3z}{2}\frac{(\sqrt{30}-5)(6+\sqrt{30})}{(6-\sqrt{30})(6+\sqrt{30})} = -\frac{z}{4}\sqrt{30}.$$

En résumé, en prenant par exemple $z = 4t$ avec $t \neq 0$ on a $[f_1]^e = t(2, -\sqrt{30}, 4)^T$.

(2) Puisque K'' est continue, en particulier les trois fonctions K, K', K'' sont continues à gauche en $n+1/2$. Or pour $x \in]n-1/2, n+1/2[$ on a

$$K(x) = 8a_n(x-n)^3 + 4b_n(x-n)^2 + 2c_n(x-n),$$
$$K'(x) = 24a_n(x-n)^2 + 8b_n(x-n) + 2c_n,\ K''(x) = 48a_n(x-n) + 8b_n(x-n).$$

Les trois limites de ces fonctions quand x tend en croissant vers $n+1/2$ sont donc données par le vecteur AV_n. De même les trois fonctions K, K', K'' sont continues à droite en $n+1/2$. Or pour $x \in]n+1/2, n+3/2[$ on a

$$\begin{aligned} K(x) &= 8a_{n+1}(x-n-1)^3 + 4b_{n+1}(x-n-1)^2 + 2c_{n+1}(x-n-1), \\ K'(x) &= 24a_{n+1}(x-n-1)^2 + 8b_{n+1}(x-n-1) + 2c_{n+1}, \\ K''(x) &= 48a_{n+1}(x-n-1) + 8b_{n+1}(x-n-1). \end{aligned}$$

Les trois limites de ces fonctions quand x tend en décroissant vers $n+1/2$ sont donc données par le vecteur BV_{n+1}. Comme les limites à droite et à gauche de fonctions continues coincident on a donc $AV_n = BV_{n+1}$.

(3) Puisque $AV_n = BV_{n+1}$ et puisque B est inversible on en tire $V_{n+1} = B^{-1}AV_n = CV_n$. Ceci permet de montrer par récurrence sur n que $V_n = C^n V_0$. En effet, c'est trivial pour $n = 0$, et si c'est vrai pour n alors $V_{n+1} = CV_n = CC^nV_0 = C^{n+1}V_0$: la récurrence est étendue. En posant $f_h(a,b,c) = 8ah^3 + 4bh^2 + 2ch$, le fait que $K(x)$ tende vers 0 si x tend vers l'infini entraîne que pour tout $h \in [-1/2, 1/2]$ fixé on a

$$\lim_{n\to\infty} f_h(a_n, b_n, c_n) = 0.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n, c_n) = (0, 0, 0)$ n'est pas si facile. Une méthode est par exemple d'observer

$$f_{1/2}(a,b,c) = a+b+c,\ f_{-1/2}(a,b,c) = -a+b-c,\ b = \frac{1}{2}(f_{1/2}(a,b,c) + f_{-1/2}(a,b,c)),$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}(f_{1/2}(a_n,b_n,c_n) + f_{-1/2}(a_n,b_n,c_n)) = \frac{1}{2}(0+0)$$

et donc aussi $\lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) = 0$. Puis

$$c_n = \frac{1}{3}[8f_{1/4}(a_n,b_n,c_n) - (a_n+c_n) - 2b_n]$$

montre que c_n tend vers 0. Une méthode plus élégante consiste à dire qu'on peut trouver h_1, h_2, h_3 tels que les 3 formes linéaires f_{h_j} sur $\mathbb{R}^3$ soient indépendantes. Comme l'espace E^* des formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension 3 (cours de 1 ère année) alors $(f_{h_1}, f_{h_2}, f_{h_3})$ est une base de E^* et donc il existe une combinaison linéaire $\mu_1 f_{h_1} + \mu_2 f_{h_2} + \mu_3 f_{h_3}$, égale à la forme linéaire $(a,b,c) \mapsto a$. Cela entraîne

$$a_n = \mu_1 f_{h_1}(a_n,b_n,c_n) + \mu_2 f_{h_2}(a_n,b_n,c_n) + \mu_3 f_{h_3}(a_n,b_n,c_n),$$

et comme $\lim_{n\to\infty} f_{h_j}(a_n,b_n,c_n) = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. On procède de même pour b_n et c_n. La méthode bricolée ci dessus prenait $h_1 = 1/2, h_2 = -1/2, h_3 = 1/4$. En fait si h_1, h_2, h_3 sont distincts et non nuls alors $(f_{h_1}, f_{h_2}, f_{h_3})$ sont indépendants. S'il n'en était pas ainsi, il existerait des μ_j non tous nuls tels que pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on ait $(\mu_1 f_{h_1} + \mu_2 f_{h_2} + \mu_3 f_{h_3})(a,b,c) = 0$, c'est à dire

$$\mu_1 h_1^3 + \mu_2 h_2^3 + \mu_3 h_3^3 = 0,\ \mu_1 h_1^2 + \mu_2 h_2^2 + \mu_3 h_3^2 = 0,\ \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 = 0.$$

Mais le déterminant suivant est non nul puisque les h_j sont distincts et non nuls :

$$\det \begin{bmatrix} h_1^3 & h_2^3 & h_3^3 \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} = h_1 h_2 h_3 (h_1 - h_2)(h_1 - h_3)(h_2 - h_3).$$

Donc les trois μ_j sont nuls et l'indépendance des $(f_{h_1}, f_{h_2}, f_{h_3})$ est montrée (on peut éviter le calcul du déterminant en introduisant les 3 polynômes de Lagrange L_j de degré 2 tels que $L_j(h_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(h_j) = 1$: ils satisfont $0 = \sum_{i=1}^3 \mu_i h_i L_j(h_i) = h_j \mu_j$ pour $j = 1, 2, 3$).

Ayant donc enfin montré que $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, écrivons $V_0 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3$ (en confondant V_n et $[V_n]_e^e$ par un petit abus de notation). Donc

$$V_n = C^n V_0 = \mu_1 \alpha^n f_1 + \alpha^{-n} \mu_2 f_2 + (-1)^n \mu_3 f_3.$$

Si $\mu_2 \neq 0$ alors

$$V_n = \alpha^{-n} \mu_2 (f_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \alpha^{2n} f_1 + \frac{\mu_3}{\mu_2} (-\alpha)^n f_3),$$

Comme $|\alpha| < 1$ on a donc $\lim_{n\to\infty} f_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\alpha^{2n} f_1 + \frac{\mu_3}{\mu_2}(-\alpha^n) f_3 = f_2$ et il est donc impossible que $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$. Donc $\mu_2 = 0$. Si $\mu_3 \neq 0$ alors $V_n = (-1)^n \mu_3 (f_3 + \frac{\mu_1}{\mu_3}(-\alpha)^n f_1)$. On a donc $\lim_{n\to\infty} f_3 + \frac{\mu_1}{\mu_3}(-\alpha)^n f_1 = f_3$ et il est donc impossible que $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$. Donc $\mu_3 = 0$. Donc V_0 est proportionnel à f_1. Donc $V_0^T = [a_0, b_0, c_0] = t[2, -\sqrt{30}, 4]$ pour un $t \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Puisque $K(h) = 8a_0h^3 + 4b_0h^2 + 2c_0h$ et que $K'(0) = 2c_0 = 1$, alors $t = 1/8$ et donc pour $-1/2 \leq x \leq 1/2$ on a $K(x) = 2x^3 - \frac{\sqrt{30}}{2}x^2 + x$. Puisque $V_1 = CV_0$ on en déduit que $1/2 \leq x \leq 3/2$ on a

$$\begin{aligned} K(x) &= (-22+4\sqrt{30})(x-1)^3 + (-30+\frac{11\sqrt{30}}{2})(x-1)^2 + (-11+2\sqrt{30})(x-1) \\ &= (-22+4\sqrt{30})x^3 + (36-\frac{13\sqrt{30}}{2})x^2 + (-17+3\sqrt{30})x + (-8+\frac{3\sqrt{30}}{2}). \end{aligned}$$

Problème 2. Comme d'après Cayley Hamilton $P_a(a) = 0$ on a donc $E = \ker P_a(a) = \ker P_a(a)P_b(a)$. Comme P_a et P_b sont premiers entre eux, le lemme des noyaux entraîne $\ker P_a(a)P_b(a) = \ker P_b(a) \oplus \ker P_a(a)$, et donc $\ker P_b(a) = \{0\}$, soit donc $P_a(b)$ inversible.

Si $x_0 \in F$ satisfait $ax_0 = x_0b$, montrons par récurrence sur n que $a^nx_0 = x_0b^n$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Si c'est vrai pour n alors

$$a^{n+1}x_0 \overset{(1)}{=} a(a^nx_0) \overset{(2)}{=} a(x_0b^n) \overset{(3)}{=} (ax_0)b^n \overset{(4)}{=} (x_0b)b^n \overset{(5)}{=} x_0b^{n+1}$$

(dans cette chaîne d'égalités, (1), (3) et (5) viennent de l'associativité de la composition des endomorphismes, (4) vient de l'hypothèse sur x_0 et (2) vient de l'hypothèse de récurrence). La récurrence est donc étendue. Par linéarité on en déduit donc que pour tout polynôme Q on a $Q(a)x_0 = x_0Q(b)$. Appliquons cela à $Q = P_b$. On obtient $P_b(a)x_0 = 0$. Comme $P_b(a)$ est inversible, cela entraîne $x_0 = 0$, ce qui montre que $\ker \varphi = \{0\}$.

Si $AU = \lambda U$ et $B^TV = \lambda V$ alors $V^TB = \lambda V^T$ et $AX - XB = AUV^T - UV^TB = \lambda UV^T - \lambda UV^T = 0$. Moralité : si a et b n'ont pas des spectres disjoints alors $\ker \varphi \neq \{0\}$: il suffit de prendre une base e arbitraire, $A = [a]_e^e$ $B = [b]_e^e$, puis U et V comme ci dessus (qui existent toujours, parce que E est complexe et parce que les valeurs propres de B et de B^T coincident). Alors $x_0 \in F$ défini par $[x_0]_e^e = UV^T$ est dans $\ker \varphi$ et est non nul. Le problème se résume dans l'énoncé suivant : (*Th. de Liapounov*) Pour tout $c \in L(E)$ il existe un et un seul $x \in L(E)$ tel que $ax - xb = c$ *si et seulement si* les spectres de a et b sont disjoints.

Deug 2ème année MIAS UEF 3, 2001-2002. Devoir d'Analyse, à remettre au dernier TD de la semaine du 5 au 9 novembre 2001

Problème. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe on note $a = \Re z$ et $b = \Im z$. Soit n un entier et $P_n : \; [0, \infty[\to \mathbb{R}$ défini par $P_n(x) = \Im(\sqrt{x} + i)^{2n+1}$.

1. Calculer P_0, P_1 et P_2. Montrer que P_n est un polynôme de degré n et calculer les coefficients de x^n et de x^{n-1} (Méthode : développer $(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ par la formule du binôme de Pascal).
2. Si $k = 1, 2, \ldots, n$ on pose
$$\lambda_{k,n} = \left(\mathrm{cotg} \frac{k\pi}{2n+1}\right)^2.$$
Montrer à l'aide de la formule de Moivre que $P_n(\lambda_{k,n}) = 0$. En déduire que
$$P_n(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_{k,n}).$$
Calculer alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n}$ à l'aide du 1).
3. Montrer que si $0 < \theta < \pi/2$ alors $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ (Par exemple, étudier $\theta \mapsto \theta - \sin\theta$ et $\theta \mapsto \tan\theta - \theta$ sur $]0, \pi/2[$). En déduire
$$\mathrm{cotg}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \mathrm{cotg}^2\theta.$$
Appliquer cela à $\theta = \frac{k\pi}{2n+1}$.
4. En appliquant le 2) et le 3), démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a
$$\frac{1}{3}n(2n-1) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < n + \frac{1}{3}n(2n-1).$$
5. En déduire les sommes des séries
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$
(Méthode : utiliser le 4) pour la première, des décompositions en éléments simples pour la seconde et la troisième, et la décomposition en k pairs et impairs de la première pour les quatrième et cinquième).

Deug 2 ème année. Corrigé du devoir d'analyse de novembre 2001. .

(1) Par la formule du binôme : $(\sqrt{x} + i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}(\sqrt{x})^{2n+1-k}i^k$. Donc en ne gardant que les termes en $k = 2j+1$ on obtient $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j+1}(-1)^j x^{n-j}$ qui est un polynôme de degré n. Le coefficient de x^n est $C_{2n+1}^{1} = 2n+1$ et celui de x^{n-1} est $C_{2n+1}^{3} = \frac{1}{3!}(2n+1)2n(2n-1) = \frac{1}{3}(2n+1)n(2n-1)$. On obtient aussi $P_0(x) = 1,\; P_1(x) = 3x - 1,\; P_2(x) = 5x^2 - 10x + 1$.

(2) Comme $1 \leq k \leq n$, alors $0 < \theta_{k,n} = \frac{k\pi}{2n+1} < \pi$ et donc $\cot\theta_{k,n} > 0$. Donc, d'après Moivre

$$\begin{aligned} P_n(\lambda_{k,n}) &= \Im\left(\left(\frac{\cos\theta_{k,n}}{\sin\theta_{k,n}} + i\right)^{2n+1}\right) = \frac{1}{(\sin\theta_{k,n})^{2n+1}}\Im((\cos\theta_{k,n} + i\sin\theta_{k,n})^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{(\sin\theta_{k,n})^{2n+1}}\Im((\cos k\pi + i\sin k\pi) = 0. \end{aligned}$$

Donc les $(\lambda_{k,n})$ forment un ensemble de n racines distinctes du polynôme P_n. Comme $\deg P_n = n$ il n'y en a pas d'autres, et comme le coefficient de x^n est $2n+1$ on a la formule annoncée. On sait d'après le cours de première année que la somme des racines réelles ou complexes d'un polynôme de degré n est -(coefficient de x^{n-1})/(coefficient de x^n). Donc $\sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} = n(2n-1)/3$.
(3) et (4) La positivité des fonctions $\theta \mapsto \theta - \sin\theta$ et $\theta \mapsto \tan\theta - \theta$ sur $[0, \pi/2[$ découle du fait qu'elles sont nulles en 0 et que leurs dérivées respectives $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ et $\tan^2\theta$ sont > 0 sur $]0, \pi/2[$. Les inégalités qui suivent sont évidentes et fournissent, si appliquées à $\theta = \theta_{k,n}$: $\lambda_{k,n} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} < 1 + \lambda_{k,n}$. Sommons alors entre $k = 1$ et $k = n$ ces dernières inégalités, on obtient le (4).
(5) Soit $s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n 1/k^2$. D'après le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 2$ on sait que $L^{(1)} = \lim_{n\infty} s_n^{(1)}$ existe et est finie. Le (4) entraîne

$$\pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < s_n^{(1)} < \pi^2\left(\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\right).$$

Appliquons le principe : "le comportement à l'infini d'un quotient de deux polynômes est celui du quotient des termes de plus haut degré" aux fractions rationnelles $n \mapsto \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$ et $n \mapsto \frac{n}{(2n+1)^2}$. On obtient que $\pi^2/6 \leq L^{(1)} \leq \pi^2/6$ et donc $L^{(1)} = \pi^2/6$ (le résultat remonte à Euler, et la présente méthode est celle de I. Papadimitriadou, *Amer. Math. Monthly* 1973, 424-5).

Soit $s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)}$ et $s_n^{(3)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2}$. D'après le théorème d'équivalence et le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$ on sait que $L^{(2)} = \lim_{n\infty} s_n^{(2)}$ et $L^{(3)} = \lim_{n\infty} s_n^{(3)}$ existent et sont finies. Donnons une autre présentation de $s_n^{(2)}$ et de $s_n^{(3)}$ à l'aide des décompositions en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}; \qquad \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k} + \frac{2}{k+1}.$$

Par conséquent

$$s_n^{(2)} = s_n^{(1)} - 1 + \frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} L^{(2)} = \frac{\pi^2}{6} - 1;$$

$$s_n^{(3)} = s_n^{(1)} + (s_{n+1}^{(1)} - 1) - 2 + \frac{2}{n+1} \to_{n\to\infty} L^{(3)} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Soit $s_n^{(4)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$ et $s_n^{(5)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$. D'après le théorème d'équivalence, le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 2$ et l'absolue convergence pour $s_n^{(5)}$, on sait que $L^{(4)} = \lim_{n\infty} s_n^{(4)}$ et $L^{(5)} = \lim_{n\infty} s_n^{(5)}$ existent et sont finies. Avec une autre présentation de $s_n^{(4)}$ et de $s_{2n}^{(5)}$:

$$s_n^{(4)} = s_{2n}^{(1)} - \frac{1}{4}s_n^{(1)}, \quad s_{2n}^{(5)} = \frac{1}{4}s_n^{(1)} - s_n^{(4)}, \quad L^{(4)} = (1 - \frac{1}{4})\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}, \quad L^{(5)} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Deug MIAS 2ème année, Partiel d'analyse du 20 nov. 2001

Durée 2 heures. Aucun document. Affichage des résultats le 4 novembre 16 heures. Corrigé sur le web (annales du deug).

Question de cours. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes. Que signifie la phrase "la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge" ? Si elle converge, qu'appelle t-on somme de la série ? Si elle converge, démontrer qu'alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Problème A. Soit pour $a > 0$ les intégrales impropres $I_a = \int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$, $J = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$. Montrer qu'elles convergent et donner la valeur de J. Montrer que $I_1 = 0$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$. Calculer la valeur de I_a pour $a > 0$ à l'aide du changement de variable $t = ax$.

Problème B. Calculer la somme des chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{3^n}$ et $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$. Dire si les deux séries suivantes sont convergentes ou non : $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$.

Problème C. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres > 0, et soit $u_n : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ définie par $u_n(x) = \frac{a_n}{n^x}$. On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ converge.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[x_0, \infty[$ et que la somme $S(x)$ de cette série est continue sur $[x_0, \infty[$.
2. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on ait $\ln(n)/n^{\epsilon} \leq M$ (Méthode : considérer $\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n^{\epsilon}$). En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ converge normalement sur $[x_0 + \epsilon, \infty[$. Pourquoi $S'(x)$ existe t-il pour tout $x > x_0$?
3. On suppose qu'il existe un nombre $x_1 < x_0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1)$ diverge. Montrer que l'ensemble I_+ des $x \in [x_1, x_0]$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge est un intervalle. Montrer qu'il existe un nombre $\sigma \in [x_1, x_0]$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ diverge pour $x < \sigma$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge pour $x > \sigma$. Quel est σ si $a_n = 1$ pour tout n? Quel est σ si $a_n = 1/(\ln(n+1))^2$ pour tout n?

Problème D. Soit α un réel >0 et, pour $x \geq 0$, $u_n(x) = \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$.

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto u_n(x)$ sur $[0, \infty[$. Préciser la valeur de $u_n(1/\sqrt{n})$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$. On note dans la suite sa somme par $S(x)$. Quelle est la valeur de $S(0)$?
3. Trouver pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, \infty[$.
4. Soit $S_n(x)$ la somme partielle d'ordre n de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Montrer que $S_n(x) \geq nu_n(x)$ (Méthode : montrer que $k \mapsto u_k(x)$ est décroissante pour tout $x \geq 0$). En déduire que $S(1/\sqrt{n}) \geq nu_n(1/\sqrt{n})$. Calculer $\lim_{n\to\infty} nu_n(1/\sqrt{n})$ pour $\alpha = 1/2$ et pour $0 < \alpha < 1/2$.
5. Montrer à l'aide du 4) que S n'est pas continue en 0 si $0 < \alpha \leq 1/2$. Montrer à l'aide du 3) que S est continue en 0 si $\alpha > 1/2$.
6. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[\epsilon, \infty[$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ la fonction S est continue sur $]0, \infty[$.

Barême : QC=2 pts. A= 1+0,5+0,5+1+1 pts. B=4 pts. C1= 0,5+0,5 pts. C2=0,5 +1+0,5 pts. C3= 1+1+0,5+0,5 pts. D1=0,5 pts. D2= 0,5+0,5 pts. D3= 1 pt. D4= 1 + 0,5+0,5 pts. D5=1+1 pts. D6=1,5+1 pts.

Deug 2 ème année, nov. 2001. Corrigé du partiel d'analyse.

QC. Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge si $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existe et est finie. Dans ce cas s est appelé somme de la série. Si la série converge et a pour somme s, alors $u_n = s_n - s_{n-1}$ a pour limite $s - s = 0$.

Problème A. $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x \to_{x\to\infty} = \pi/2$. Donc J existe et vaut $\pi/2$. Pour I_a la fonction à intégrer $\frac{\log t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0,\infty[$ n'est pas continue en 0 où elle est équivalente à $a^{-2}\log t$. Mais on sait que $\int_0^1 \log t dt$ converge : par exemple si $\epsilon > 0$ alors

$$\int_\epsilon^1 \log t dt = [t\log t]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 dt = -1 + \epsilon - \epsilon\log\epsilon \to_{\epsilon\to 0} -1.$$

Donc par le théorème d'équivalence $\int_0^1 \frac{\log t}{a^2+t^2}dt$ converge. Pour la convergence de $\int_1^\infty \frac{\log t}{a^2+t^2}dt$ on observe qu'il existe $M > 0$ tel que pour $t \geq 1$ on a $t^{-1/2}\log t \leq M$ (ceci vient de $\lim_{t\to\infty} t^{-1/2}\log t = 0$). Donc pour $t \geq 1$ on a

$$\frac{\log t}{a^2+t^2} \leq \frac{Mt^{1/2}}{a^2+t^2} \sim_{t\to\infty} \frac{M}{t^{3/2}}.$$

Appliquant le théorème sur les intégrales de Riemann à $\alpha = 3/2 > 1$ et le théorème de comparaison, on a la convergence de $\int_1^\infty \frac{\log t}{a^2+t^2}dt$ et donc de I_a. Le changement de variable dans I_1 défini par $t \mapsto u = 1/t$ est un difféomorphisme de $]0,\infty[$ sur lui même et est donc légitime. On en tire $I_1 = -\int_0^\infty \frac{\log u}{u^2+1}dt = -I_1$ et donc $I_1 = 0$. De même le changement de variable $t \mapsto x = t/a$ dans I_a est légitime et fournit $I_a = \frac{\log a}{a^2}J + \frac{1}{a^2}I_1 = \frac{\pi\log a}{2a^2}$.

Problème B. Le 1) est la somme de deux séries géométriques de raisons $-1/3$ et $2/3$ et est donc de somme $1/(1+\frac{1}{3}) + 1/(1-\frac{2}{3}) = 15/4$. Le 2) est une série télescopique

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}) \\ &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to_{n\infty} 3/2. \end{aligned}$$

Le 3) se fait par le critère de Cauchy $\sqrt[n]{u_n} = (\frac{n-2}{n})^n \to_{n\infty} L = e^{-2} < 1$: la série converge. Le 4 peut se faire par comparaison à l'intégrale impropre $I = \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)(\log(x+1))^2}$. Le changement de variable $t = \log(x+1)$ est un difféomorphisme qui ne change pas la nature de l'intégrale, donc $I = \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^2}$ qui est clairement convergente. La série 4) converge.

Problème C. 1) Pour $n \geq 1$, $x \mapsto n^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc u_n aussi. D'où $0 \leq u_n(x) \leq u_n(x_0)$ pour $x \geq x_0$. Comme $\sum_{n=1}^\infty u_n(x_0)$ la convergence normale de $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ sur $[x_0,\infty[$ est montrée.
2) On sait que $\lim \log n/n^\epsilon = 0$ (la puissance l'emporte sur le logarithme). Toute suite convergente étant bornée, il existe donc $M > 0$ telle que pour tout n entier on ait $0 \geq \log n/n^\epsilon \leq M$. Comme $u_n'(x) = -u_n(x)\log n$ on en déduit que si $x \geq x_0 + \epsilon$ alors $|u_n'(x)| \leq \log n/n^\epsilon u_n(x_0) \leq Mu_n(x_0)$. Comme $\sum_{n=1}^\infty u_n(x_0)$ la convergence normale de $\sum_{n=1}^\infty u_n'(x)$ sur $[x_0+\epsilon,\infty[$ est montrée. Comme u_n' est continue et que $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge vers une fonction S pour $x \geq x_0$ on déduit du

théorème du cours que S' existe sur $[x_0+\epsilon,\infty[$ et est égal à la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Enfin, si $x > x_0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $x \geq x_0 + \epsilon$: par exemple $\epsilon = \frac{1}{2}(x - x_0)$. Appliquant le résultat du début de la question on voit que $S'(x)$ existe pour cet x particulier.
3) Si $x_2 \in I_+$ alors le raisonnement du 1) remplacant x_0 par x_2 montre que si $x > x_2$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge. Donc $[x_2, x_0] \in I_+$. Donc

$$I_+ = \cup_{x_2 \in I_+}[x_2, x_0]$$

est réunion d'intervalles d'intersection $\{x_0\}$ non vide. I_+ est donc un intervalle, nécessairement de la forme $[\sigma, x_0]$ ou $]\sigma, x_0]$ avec $x_1 \leq \sigma \leq x_0$. Si $a_n = 1$ pour tout n alors x_0 et x_1 existent : prendre par exemple $x_1 = 0$ (série grossièrement divergente) et $x_0 = 2$ (critère de Riemann). La coupure est en $\sigma = 1$ (critère de Riemann). Si $a_n = 1/(\log(n+1))^2$ alors $x_0 = 2$ (comparaison avec Riemann) et $x_1 = 0$ existent. Alors $\sigma = 1$. En effet pour tout $\alpha > 1$ alors $\alpha \in I_+$ (comparaison avec Riemann) et donc $\sigma \leq 1$. Ensuite pour tout $\alpha < 1$ soit $\epsilon > 0$ tel que $\alpha + 2\epsilon < 1$ et appliquons l'inégalité du 2) $\log(n+1) \leq Mn^{\epsilon}$. Elle entraîne

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\log(n+1))^2} \geq \frac{1}{M^2 n^{\alpha+2\epsilon}}.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série (de Riemann) divergente. Donc celui de gauche aussi. Donc $\sigma \geq 1$.

On peut remarquer que $\sigma \in I_+$ dans le second exemple (Pb B série 4) mais pas dans le premier.

Problème D. 1) La fonction u_n est strictement croissante sur $[0, 1/\sqrt{n}]$ et strictement décroissante sur $[1/\sqrt{n}, \infty[$. Son maximum est donc $u_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$.
2) Le terme général est nul si $x = 0$ et la série converge donc en $x = 0$ vers $S(0) = 0$. Si $x > 0$ alors $u_n(x) \sim \frac{1}{xn^{\alpha+1}}$. Riemann et le critère d'équivalence montre que alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge vers un nombre $S(x)$.
3) Il est clair que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1/\sqrt{n})$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ d'après Riemann, et donc que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, \infty[$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
4) Comme $\alpha > 0$ il est clair que $n \mapsto n^{\alpha}(1 + nx^2)$ est une suite croissante. Donc

$$u_1(x) \geq u_2(x) \geq \cdots \geq u_n(x).$$

Donc $S_n(x) \geq nu_n(x)$. Comme $n \mapsto S_n(x)$ est croissante alors $S(x) \geq S_n(x)$ et donc $S(1/\sqrt{n}) \geq nu_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2n^{\alpha-1/2}}$. Trivialement la limite de $nu_n(1/\sqrt{n})$ est $1/2$ si $\alpha = 1/2$ et ∞ si $\alpha < 1/2$.
5) Du 4) on tire que si $\alpha \leq 1/2$ alors la limite de $S(1/\sqrt{n})$ n'est pas $0 = S(0)$ et donc S n'est pas continue en 0. Du 3) on tire que si $\alpha > 1/2$ alors la série de somme $S(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, \infty[$. Comme les u_n sont continues sur le même intervalle (comme fractions rationnelles sans pôle dans l'intervalle) cela entraîne que S est continue sur $[0, \infty[$ d'après le théorème du cours sur la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
6) Comme on a vu au 1) que $x \mapsto u_n(x)$ décroit sur $[1/\sqrt{n}, \infty[$ alors u_n décroit sur $[\epsilon, \infty[$ dès que $n \geq 1/\epsilon^2$. Donc si $n \geq N = 1/\epsilon^2$ alors $u_n(x) \leq u_n(\epsilon)$. Comme la série $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(\epsilon)$ converge (voir 2) on en déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[\epsilon, \infty[$. Cela entraîne que $S(x)$ est continue sur $[\epsilon, \infty[$ par le th. mentionné au 4). Si enfin $x > 0$ on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $x \in [\epsilon, \infty[$ (par exemple $\epsilon = x$...) et donc S est continue en x.

Deug MIAS 2ème année, Partiel d'algèbre du 20 nov. 2001

Durée 2 heures. Aucun document. Affichage des résultats le 4 novembre 16 heures. Corrigé sur le web (annales du deug).

Question de cours. Enoncer le théorème de Cayley Hamilton.
Problème A. Trouver des matrices D et P réelles carrées d'ordre 2 avec D diagonale et P inversible telles que

$$\begin{bmatrix} 27 & -30 \\ 24 & -27 \end{bmatrix} = PDP^{-1}.$$

Problème B. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 4, et $a \in L(E)$ défini par

$$a(P)(X) = (1 - X^2)P'(X) + 4XP(X).$$

1. Pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ soit $e_i(X) = X^i$. On admet que $e = (e_0, \ldots, e_4)$ est une base de E. Calculer $a(e_i)$ pour tout i et la matrice représentative $A = [a]_e^e$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver les nombres α et β tels que $\frac{\lambda - 4X}{1-X^2} = \frac{\alpha}{1-X} + \frac{\beta}{1+X}$, et en déduire la fonction $y_\lambda :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $y_\lambda(0) = 1$ et telle que que pour $-1 < x < 1$ on ait

$$y'_\lambda(x) = \frac{\lambda - 4x}{1 - x^2} y_\lambda(x).$$

   Pour quelles valeurs de λ la fonction y_λ est elle un polynôme ?
3. Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ soit $f_j(X) = (1-X)^j(1+X)^{4-j}$. Montrer que f_j est un vecteur propre de a, en précisant pour quelle valeur propre (on peut utiliser la question précédente). Pourquoi a est il diagonalisable ? Pourquoi $f = (f_0, \ldots, f_4)$ est elle une base de E?
4. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P d'ordre 5 telles que $A = PDP^{-1}$. Donner D et P (on ne demande pas P^{-1}).

Problème C. Soit E un espace complexe de dimension q et soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers ≥ 0. On dit qu'une suite $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $L(E)$ tend vers 0 si pour toute base e de E les coefficients de la matrice $[b_k]_e^e$ tendent vers 0 si $k \to \infty$. Soit alors $a \in L(E)$ fixé inversible.

1. On suppose dans cette question que la suite $(a^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0. Montrer que ses valeurs propres sont de module < 1 (Méthode : prendre une base f de triangularisation de a et expliciter la diagonale de T^k si $T = [a]_f^f$).
2. Si a n'a qu'une valeur propre λ, montrer que $n = a - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent. Expliciter $(\lambda \mathrm{id}_E + n)^k$ avec les coefficients du binôme et en déduire que si λ est de module < 1 alors la suite $(a^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
3. Si toutes les valeurs propres de a sont de module < 1, montrer que la suite $(a^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 (Méthode : introduire une base de Dunford pour a et appliquer le 2).

Barême : QC= 1 pt. A=3 pts. B1=2 pts. B2=1+1+1 pts. B3= 1+1 pts. B4= 1+1 pts. C1=2 pts. C2= 1+1+1 pts. C3=2 pts.

Deug 2 ème année, nov. 2001. Corrigé du partiel d'algèbre .

QC. Si E est un espace vectoriel de dimension finie q, si a est un endomorphisme de E et si $P_a(X) = \det(a - X\mathrm{id}_E) = c_0 + c_1X + \cdots + c_qX^q$ est son polynôme caractéristique, alors $P_a(a) = c_0\mathrm{id}_E + c_1a + \cdots + c_qa^q$ est l'endomorphisme nul.

Problème A. Soit a l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique e est $A = \begin{bmatrix} 27 & -30 \\ 24 & -27 \end{bmatrix}$. Si f est une base de diagonalisation de a et puisque $[a]_e^e = [\mathrm{id}_E]_f^e[a]_f^f[\mathrm{id}_E]_e^f$, alors $D = [a]_f^f$ et $P = [\mathrm{id}_E]_f^e$ satisfont aux conditions demandées. Pour trouver si f existe et pour le calculer on calcule d'abord le polynôme caractéristique $P_a(X) = X^2 - X\operatorname{trace} A + \det A = X^2 - 9$. Donc a a deux valeurs propres distinctes qui sont ± 3. D'après le cours f existe et est formée de vecteurs propres de a. On prend $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Un vecteur propre f_1 associé à 3 est donné par $[f_1]^e = [x, y]^T$ avec $27x - 30y = 3x$. Donc $x = 5$ et $y = 4$ par exemple conviennent. De même un vecteur propre f_2 associé à -3 est donné par $[f_2]^e = [x, y]^T$ avec $27x - 30y = -3x$. Donc $x = 1$ et $y = 1$ par exemple conviennent. Ce choix donne $P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Problème B. 1) $a(e_i)(X) = (1 - X^2)iX^{i-1} + 4X^{i+1}$. Donc $a(e_i) = ie_{i-1} + (4 - i)e_{i+1}$, ce qui a un sens même pour $i = 0$ ou 4. Donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Par identification, ou par la méthode du cache (puisque les pôles sont simples) on trouve $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda - 4)$ et $\beta = \frac{1}{2}(\lambda + 4)$. La fonction inconnue y_λ satisfait à une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont on sait que elle ne s'annule pas sauf si c'est la solution identiquement nulle. En divisant par la fonction inconnue y_λ on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{y'_\lambda(x)}{y_\lambda(x)} = \frac{1}{2(1-x)}(\lambda - 4) + \frac{1}{2(1-x)}(\lambda + 4).$$

D'où l'existence d'une constante C telle que $y_\lambda(x) = C(1-x)^{2-\lambda/2}(1+x)^{2+\lambda/2}$. Comme $y_\lambda(0) = 1$ on a $C = 1$. Si c'est un polynôme alors $2 \pm \lambda/2$ sont des entiers ≥ 0. En particulier $\lambda/2 = k$ est un entier tel que $2 \pm k$ est entier ≥ 0. Seules les valeurs $k = -2, -1, 0, 1, 2$ et $\lambda = -4, -2, 0, 2, 4$ sont acceptables.
3) En utilisant la question précédente on voit que $f_j = y_{4-2j}$ et donc

$$a(f_j)(X) = (1 - X^2)f'_j(X) + 4Xf_j(X) = (4 - 2j - 4X)f_j(X) + 4Xf_j(X) = (4 - 2j)f_j(X).$$

On voit que f_j est donc vecteur propre de a pour la valeur propre $(4 - 2j)$ (Une autre manière de le voir était de calculer directement $a(f_j)$ sans passer par les y_{4-2j}). Il y a 5 valeurs propres distinctes à a. Comme E est de dimension 5, a est donc diagonalisable. f est une base car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Des matrices D et P qui conviennent sont donc données par $D = \mathrm{diag}(4, 2, 0, -2, -4)$ et $P = [\mathrm{id}_E]_f^e$. Cette dernière se calcule ainsi :

$f_0(X) = (1+X)^4 = 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4$, et donc $f_0 = e_0 + 4e_1 + 6e_2 + 4e_3 + e_4$. De même $f_1(X) = (1-X)(1+X)^3 = 1 + 2X - 2X^3 - X^4$, et donc $f_1 = e_0 + 2e_1 - 2e_3 - e_4$. Ensuite $f_2 = e_0 - 2e_2 + e_4$, $f_3 = e_0 - 2e_1 + 2e_3 - e_4$, $f_4 = e_0 - 4e_1 + 6e_2 - 4e_3 + e_4$. On obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problème C. 1) Soit D la diagonale de T. Les valeurs propres de a, de T et de D coincident. D'autre part D^k est la diagonale de T^k. Donc, si a^k tend vers 0, les éléments de D^k aussi. Donc si λ est une valeur propre de a alors λ^k tend vers 0, ce qui ne peut arriver que si $|\lambda| < 1$.
2) Si f est base de diagonalisation de a alors $[n]_f^f = \lambda I_q - [a]_f^f$ est triangulaire supérieure et de diagonale nulle. D'après un théorème du cours elle est donc nilpotente et n également. Ensuite

$$(\lambda \mathrm{id}_E + n)^k = \lambda^k \mathrm{id}_E + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j!} k(k-1)\dots(k-j+1) n^j \lambda^{k-j}.$$

On voit que $a^k = \lambda^k b_k$ où l'endomorphisme b_k est

$$b_k = \mathrm{id}_E + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{\lambda^j j!} k(k-1)\dots(k-j+1) n^j.$$

Si e est une base arbitraire alors les coefficients de la matrice $[b_k]_e^e$ sont des polynômes en k. Comme $|\lambda| < 1$ et que l'exponentielle l'emporte sur le polynôme alors $\lambda^k b_k$ tend vers 0.
3) Soit $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = E$ la décomposition de E en somme directe des p sous espaces caractéristiques associés aux valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors les F_j sont stables par a et donc la restriction a_j de a à F_j satisfait les conditions du 2). Donc (a_j^k) tend vers 0. Si f_j est une base de triangulation de a_j, c'est à dire si $f = f_1 \cup \dots \cup f_p$ est une base de Dunford pour a, notons $A_j = [a_j]_{f_j}^{f_j}$. Alors il est clair que

$$[a]_f^f = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_p),\ [a^k]_f^f = \mathrm{diag}(A_1^k, \dots, A_p^k)$$

et donc que les coefficients de $[a^k]_f^f = (a_{ij}(k))$ tendent vers 0 puisque ceux des A_j^k le font. Pour terminer, si e est une base quelconque, soit $P = (p_{ij}) = [\mathrm{id}_E]_f^e$ et $Q = P^{-1} = (q_{ij}) = [\mathrm{id}_E]_e^f$, de sorte que le coefficient ij de la matrice $[a^k]_e^e = P[a^k]_f^f P^{-1}$ est $\sum_{s,t} p_{is} a_{st}(k) q_{tj}$. Ce nombre tend bien vers 0 puisque les $a_{st}(k)$ tendent vers 0.
Remarques L'hypothèse d'inversibilité de a a servi dans le 2) pour garantir $\lambda \neq 0$ et définir b_k. Toutefois elle n'est pas nécessaire : si $\lambda = 0$ dans le 2) alors a est nilpotent et $a^k = 0$ si $k \geq q$. En résumé si $a \in L(E)$ alors a^k tend vers 0 *si et seulement si* ses valeurs propres sont de module < 1.

Deug 2 ème année, année 2001-2002, Feuille de TD d'analyse n. 5.

Exercice A. Montrer que $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_1+x_2|\}$ définit une norme dans $\mathbb{R}^2$ et dessiner $\overline{B}(0;1)$.

Exercice B. Soit p et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ pour s et $t \geq 0$ (Méthode : pour $t \geq 0$ fixé, étudier la fonction $s \mapsto \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} - st$ sur $[0, \infty[$).
2. Soit $n > 0$ un entier fixé, $A = [0, \infty[^n$ et $m_p : A \to [0, \infty[$ défini par $m_p(x) = (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{1/p}$. Montrer que si $m_p(x) = m_q(y) = 1$ alors $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq 1$ (Appliquer le 1) aux $(s, t) = (x_i, y_i)$).
3. En appliquant le 2) à $x = a/m_p(a)$ et $y = b/m_q(b)$ montrer que $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq m_p(a) m_q(b)$ (Inégalité de *Hölder*).
4. Pour x et $y \in A$ soit $b \in A$ défini par $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$. Montrer que $m_q(b) = [m_p(x+y)]^{p-1}$. Montrer que $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i b_i + \sum_{i=1}^n y_i b_i$. En appliquant le 3) aux deux dernières sommes, montrer que $m_p(x+y) \leq m_p(x) + m_p(y)$ (Inégalité de *Minkowski*).
5. Montrer à l'aide du 4) que $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice C. Soit $U \subset E$, avec E espace normé. Montrer que U est ouvert si et seulement si il est réunion de boules ouvertes (Méthode : utiliser la définition d'un ouvert et le fait que la réunion finie ou infinie d'ouverts est un ouvert). Montrer que un singleton (= ensemble réduit à un point) dans un espace normé est fermé. Montrer qu'un ensemble fini dans un espace normé est fermé.

Exercice D. *Les ouverts de $\mathbb{R}$.* Montrer que les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts bornés. Quels sont les intervalles ouverts non bornés ?

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $x \in U$. Pourquoi l'ensemble $I_+(x)$ des $b > x$ tels que $[x, b] \subset U$ est il un intervalle ? Soit $b_x = \sup I_+(x) \leq \infty$. Pourquoi l'ensemble $I_-(x)$ des $a < x$ tels que $[a, x] \subset U$ est il un intervalle ? Soit $a_x = \inf I_+(x) \geq -\infty$. Montrer que $I_x =]a_x, b_x[\subset U$. Montrer que $I_x \cap I_y$ est non vide si et seulement si $I_x = I_y$.

Trouver les I_x et le fermé $\mathbb{R} \setminus U$ dans l'exemple suivant

$$U =]-\infty, 0[\bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}[.$$

Revenant au cas général, soit $\mathcal{I}$ la famille des intervalles image de l'application $x \mapsto I_x$ de U dans l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $U = \cup_{I \in \mathcal{I}} I$. En déduire qu'une partie de U est ouverte si et seulement si elle est réunion d'une famille $\mathcal{I}$ d'intervalles ouverts deux a deux disjoints. (On pourrait montrer que $\mathcal{I}$ est unique, et finie ou dénombrable).

Exercice E. Soit F un sous espace vectoriel de l'espace euclidien E. Montrer qu'il est fermé (Méthode : utiliser la caractérisation des fermés par les suites, ou bien montrer que $E \setminus F$ est ouvert à l'aide du théorème de projection orthogonale).

Exercice F. Dans un espace normé E montrer que $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ et en déduire que $x \mapsto \|x\|$ est une fonction continue (utiliser la définition des fonctions continues par (ϵ, η) ou bien par les suites convergentes). Montrer que $x \mapsto \exp -\|x\|$ est continue (Rappel : la composée de deux fonctions continue est continue). Montrer que la sphère unité $\{x \in E; \|x\| = 1\}$ est compacte si de plus E est de dimension finie (utiliser le singleton $\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de la norme).

Exercice G. Soit E un espace euclidien. Pourquoi $f_v : x \mapsto \langle v, x\rangle$ est elle continue (Méthode : Schwarz). On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est polynomiale si elle est combinaison linéaire de produits de formes linéaires. Pourquoi une fonction polynomiale est elle continue ? On considère l'espace E des matrices carrées d'ordre q réelles comme un espace euclidien par le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace} A^T B$. Montrer que $A \mapsto \det A$ est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des A de E inversibles est un ouvert (Méthode : utiliser le théorème du cours qui dit que l'image inverse d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, appliqué à $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ est une partie fermée de E (Méthode : Observer que les équations $A^T A = I_q$ sont polynomiales). Montrer que $O(n)$ est compact.

Exercice H. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien on considère les deux ensembles

$$U = \{(x, y); x < 1, y < 1, -x - y < 1\}, \quad F = \{(x, y); x \leq 1, y \leq 1, -x - y \leq 1\}.$$

Dessiner U et F. Montrer que U est ouvert et que F est fermé (Méthode : considérer les trois formes linéaires $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = -x - y$, et les ensembles $U_j = \{(x, y); f_j(x, y) < 1\}$ et $F_j = \{(x, y); f_j(x, y) \leq 1\}$, et montrer à l'aide de la continuité des formes linéaires f_j que U_j et F_j sont respectivement ouvert et fermé). Montrer de la même manière que $K = \{(x, y); |x| \leq 1, |y| \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$ est fermé après l'avoir dessiné. Montrer que K est compact.

Exercice I : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit K un compact de E. Le but de l'exercice est de montrer que la borne inférieure α de l'ensemble de nombres réels $A = \{\|x - y\|;\ (x, y) \in K \times F\}$ est atteinte.

1. Montrer qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n \geq 1}$ de $K \times F$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $\alpha \leq \|x_n - y_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$ (Méthode : définition de la borne inférieure comme le plus grand des minorants) et qu'il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ ainsi qu'un x_0 dans K tels que $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0$ (Méthode : caractérisation des compacts par les suites extraites).
2. Soit $r > \alpha$ et soit K_1 l'intersection de F et de la boule fermée de centre x_0 et de rayon r. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que si $k \geq k_0$ alors $y_{n_k} \in K_1$ (Méthode : utiliser $\|x_0 - y_{n_k}\| \leq \|x_0 - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\|$).
3. Pourquoi K_1 est il compact ? Utiliser cela et le 2) pour montrer qu'il existe $y_0 \in K_1$ tel que $\alpha = \|x_0 - y_0\|$. Pourquoi $\alpha > 0$ si F et K sont disjoints ?

Exercice J : Soit F une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie, et soit $r > 0$ fixé. On note par $\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. Soit

$$F_1 = \cup_{x \in F} \overline{B}(x, r).$$

Le but de l'exercice est de montrer que F_1 est fermé. Soit (y_n) une suite de F_1 qui converge vers $y \in E$. Montrer les faits suivants :

1. Pour tout n il existe $x_n \in F$ et $h_n \in \overline{B}(0, r)$ tels que $x_n = y_n + h_n$.
2. Il existe une suite d'entiers n_k tendant vers $+\infty$ et $h \in \overline{B}(0, r)$ tels que $\lim_{k \to +\infty} h_{n_k} = h$.
3. Le point $y + h$ est dans F et F_1 est fermé.

Deug 2 ème année, Devoir d'algèbre 2, à remettre au dernier T.D de la semaine du 17 au 21 décembre 2001.

Soit E un espace euclidien de dimension q, soit V l'espace de ses endomorphismes symétriques, soit V_+ l'ensemble de ses endomorphismes symétriques b définis-positifs, soit $\overline{V_+}$ l'ensemble de ses endomorphismes symétriques b positifs. On se fixe $a \in V$ tel que $\mathrm{id}_E - a \in V_+$.

Partie **A**

A1) En considérant les valeurs propres montrer $(\mathrm{id}_E - a)^{-1} \in V_+$.
A2) Montrer $a^n(\mathrm{id}_E - a)^{-1}a^n \in \overline{V_+}$ pour tout entier $n \geq 1$ (Méthode : appliquer A1) et la définition de V_+).
A3) En multipliant le membre de droite par $\mathrm{id}_E - a$ montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$(\mathrm{id}_E - a)^{-1} = \mathrm{id}_E + a + a^2 + \cdots + a^{2n-1} + a^n(\mathrm{id}_E - a)^{-1}a^n.$$

A4) Déduire des A2) et A3) que pour tout $n \geq 1$ on a $\sum_{k=0}^{2n-1} \mathrm{trace}\, a^k \leq \mathrm{trace}\,(\mathrm{id}_E - a)^{-1}$.

Partie **B**

Dans cette partie on suppose *de plus* que $E = \mathbb{R}^q$ muni de sa structure euclidienne et de sa base e canonique, et que $A = [a]_e^e = (a_{ij})$ a tous ses coefficients ≥ 0. On pose $A^n = (a_{ij}^{(n)})$.
B1) Montrer que $a_{ij}^{(n)} \geq 0$ et que $\mathrm{trace}\, a^n \geq 0$.
B2) A l'aide de B1) et A4) montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{trace}\, a^k$ converge et que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{trace}\, a^n = 0$.
B3) Montrer que $\mathrm{trace}\, a^{2n} = \sum_{i,j=1}^{q} (a_{ij}^{(n)})^2$. A l'aide de B2) montrer que pour tous $1 \leq i, j \leq q$ on a $\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = 0$ et donc que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
B4) Soit $B = (I_q - A)^{-1}$. Montrer que à l'aide du A3) et du B3) que $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge et a pour somme B.
B5) Montrer que à l'aide des B1) et B4) que B a ses coefficients positifs ou nuls (Stieltjes).

Partie **C**

On revient au cas où E euclidien n'est pas nécessairement égal à $\mathbb{R}^q$ euclidien canonique, et on se donne une base $f = (f_1, \ldots, f_q)$ de E. On note $G_r = (\langle f_i, f_j\rangle)_{1\leq i,j\leq r}$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_q)$ la bon de Schmidt engendrée par f et soit $(c_{r,j})$ avec $1 \leq j \leq r \leq q$ les nombres définis par $e_r = \sum_{j=1}^{r} c_{rj} f_j$.
C1) Montrer que G_r est une matrice symétrique définie-positive.
C2) Montrer que si $1 \leq i < r \leq q$ alors $\langle e_r, f_i\rangle = 0$ et que le nombre $\alpha_r = \langle e_r, f_r\rangle$ est >0. Montrer que $(c_{r1}, c_{r2}, \ldots, c_{rr})G_r = (0, \ldots, 0, \alpha_r)$.
C3) On suppose enfin que $\|f_j\|^2 = 1$ pour tout j et $\langle f_i, f_j\rangle \leq 0$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $A = I_q - G_q$ est à coefficients ≥ 0. A l'aide du B5) et du C2) montrer que $c_{r,j} \geq 0$ pour tous $1 \leq j \leq r \leq q$ (Théorème de Wilson).
C4) Exemple : soit E l'espace des polynômes réels de degré $\leq N$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$. La base de Schmidt engendrée par $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est notée $e = (P_0, P_1, \ldots, P_N)$ (et P_n est appelé polynôme de Legendre de degré n). On note T_n le polynôme de degré n tel que $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$ (et T_n est appelé polynôme de Tchebychev de degré n). Montrer que $f = (T_0, T_1, \ldots, T_N)$ est une base de E dont e est la base de Schmidt associée. Montrer que $\langle T_i, T_j\rangle \leq 0$ si $0 \leq i < j \leq N$ et déduire du C3) que les polynômes de Legendre sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs des polynômes de Tchebychev.

Deug 2 ème année, 2001-2. Corrigé du devoir d'algèbre 2.

A1) $b = \mathrm{id}_E - a \in V_+$ entraine que $b = b^*$ et que les valeurs propres de b sont > 0. Donc $\det b > 0$, donc b^{-1} existe. Ensuite b^{-1} est symétrique, car d'après le cours $(b^{-1})^* = (b^*)^{-1}$. Enfin les valeurs propres de b^{-1} sont les inverses des valeurs propres de b et sont donc > 0. Donc $b^{-1} \in V_+$.
A2) Soit $x \in E$. Posons $y = a^n(x)$. Alors puisque $(a^n)^* = a^n$, et d'après A1) on a $\langle a^n(\mathrm{id}_E - a)^{-1}a^n(x), x\rangle = \langle(\mathrm{id}_E - a)^{-1}a^n(x), a^n(x)\rangle = \langle(\mathrm{id}_E - a)^{-1}y, y\rangle \geq 0$.
A3) Puisque a^n et $\mathrm{id}_E - a$ sont des polynômes en a, ils *commutent.* En multipliant à droite par $\mathrm{id}_E - a$ le second membre de l'égalité à démontrer on obtient $\mathrm{id}_E + a + a^2 + \cdots + a^{2n-1} - a - a^2 - \cdots - a^{2n} + a^n(\mathrm{id}_E - a)^{-1}(\mathrm{id}_E - a)a^n = \mathrm{id}_E$.
A4) D'après A2) les valeurs propres de $a^n(\mathrm{id}_E - a)^{-1}a^n$ sont ≥ 0 et donc sa trace est ≥ 0. Le résultat s'ensuit, par linéarité de la trace.
B1) On procède par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n, alors puisque $A^{n+1} = A^nA$ et en utilisant $a_{ij} \geq 0$ et l'hypothèse de récurrence : $a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^q a_{ik}^{(n)}a_{kj} \geq 0$. Donc trace $A^n = \sum_{k=1}^q a_{kk}^{(n)} \geq 0$.
B2) D'après B1) la série $\sum_{k=1}^\infty \mathrm{trace}\, a^k$ est à termes positifs. D'après A4) la suite de ses sommes partielles est bornée. Donc la série converge et en particulier son terme général tend vers 0.
B3) Si $C = (c_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ est des matrices carrées d'ordre q alors on sait d'après le cours, ou par un calcul immédiat, que $\mathrm{trace}\, CD^T = \sum_{i,j=1}^q c_{ij}d_{ij}$. Appliquant cela à $C = D = A^n$ et en utilisant la symétrie de A on a la première égalité. Donc pour tout (i,j) on a $(a_{ij}^{(n)})^2 \leq \epsilon_n = \mathrm{trace}\, a^{2n}$. Comme d'après B2) ϵ_n tend vers 0 on a le résultat.
B4) Dans la base e le A3) se réécrit $B = I_q + A + \cdots + A^{2n-1} + A^nBA^n$. Comme d'après B3) la suite A^n tend vers 0 on en déduit que A^nBA^n tend vers 0 et que $I_q + A + \cdots + A^{2n-1}$ tend vers B. Ce sont les sommes partielles d'ordre impair de la série $\sum_{k=0}^\infty A^k$. Comme A^n tend vers 0 les sommes partielles d'ordre pair tendent aussi vers B et donc la série $\sum_{k=0}^\infty A^k$ converge et a pour somme B.
B5) Si $B = (b_{ij})$ alors le B4) entraîne que b_{ij} est la limite de la suite $\sum_{k=0}^n a_{ij}^{(k)}$. D'après B1) c'est une suite positive ou nulle (et croissante au sens large). Donc $b_{ij} \geq 0$.
C1) Si $X = (x_1, \ldots, x_r)^T \in \mathbb{R}^r$ est non nul, donc

$$X^TG_rX = \sum_{i,j=1}^r x_ix_j\langle f_i, f_j\rangle = \|\sum_{i=1}^r x_if_i\|^2 > 0,$$

car, f étant une base, si $\sum_{i=1}^r x_if_i = 0$ alors $X = 0$. Donc G_r est définie-positive.
C2) Par définition de la base de Schmidt, e_r est orthogonal à l'espace engendré par $f_1, \ldots, f_{r-1}$ et $\langle e_r, f_r\rangle > 0$. Alors la colonne j de la matrice ligne $(c_{r1}, \ldots, c_{rq})G_r$ est

$$\sum_{i=1}^q c_{ri}\langle f_i, f_j\rangle = \langle\sum_{i=1}^q c_{ri}f_i, f_j\rangle = \langle e_r, f_j\rangle.$$

C3) Il est clair que A a une diagonale nulle et les autre termes ≥ 0. Donc $A_r = I_r - G_r$ est aussi à coefficients ≥ 0 et on lui applique le B5) : C'est dire que G_r^{-1} est aussi à coefficients ≥ 0. Appliquons alors le C2). On obtient que $(c_{r1}, \ldots, c_{rq}) = (0, \ldots, 0, \alpha_r)G_r^{-1}$ est à coefficients ≥ 0.
C4) Il suffit de calculer $\langle T_i, T_j\rangle$ qui est égal par le changement de variable $x = \cos t$ à

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi 2\cos it\cos jt\sin tdt$$

et de vérifier que c'est ≤ 0.

Université P. Sabatier, Deug Mias 2^{ieme} année, UF3, Corrige de l'examen d'analyse du 21/01/02

Question de cours. Le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ étant la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors $R_c \geq R_m = \min\{R_a, R_b\}$ et on a $A(z)B(z) = C(z)$ pour $|z| < R_m$.

Application. La formule du binôme de Newton du cours affirme que pour α réel non entier positif et $-1 < h < 1$ alors $(1+h)^\alpha$ est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha)h^n$ avec $P_0(\alpha) = 1$ et $P_n(\alpha) = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ et que le rayon de convergence de cette série entière en h est 1. Appliquant cela à $h = -x^2$ et $\alpha = -1/2$ on voit que B est développable en série entière avec $R_b = 1$ avec $b_n = 0$ si n est impair et, pour $n = 2p$ pair

$$b_{2p} = (-1)^p P_p(-1/2) = \frac{1}{p!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+p-1) = \frac{1.3.5.\dots(2p-1)}{2^p p!} = 4^{-p}C_{2p}^p.$$

Quant à A c'est un polynôme et donc trivialement une série entière avec $R_a = \infty$. Donc $R_m = 1$. La série entière de somme $C(x) = A(x)B(x)$ satisfait donc $R_c \geq 1$ et ses coefficients (c_n) satisfont donc $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et, pour $n > 0$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = b_n + b_{n-1}$. Appliquant cette formule à $n = 2p$ et à $n = 2p+1$ pour p entier on obtient $c_{2p} = c_{2p+1} = 4^{-p}C_{2p}^p$. Reste à observer que pour $-1 < x < 1$ on a $C(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice A. 1. La représentation graphique est immédiate et est formée de jolis festons. La fonction f est continue : c'est trivial sur $]-\pi, \pi[$. La limite à gauche de f en π est π^2. La limite à droite de f en $-\pi$ est aussi π^2. Mais comme la fonction est périodique c'est aussi la limite à droite de f en π. Comme la limite à gauche de f en π est π^2 et que $f(\pi) = \pi^2$, la fonction f est continue en π et donc en tout $(2p+1)\pi$ par périodicité. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est évidemment dérivable en tout point qui n'est pas de la forme $(2p+1)\pi$ et la fonction $x \mapsto f'(x)$ est continue en un tel point. On peut prévoir d'après le dessin que la dérivée en π n'existe pas. Mais on le montre rigoureusement en calculant les limites à droite et à gauche quand x tend vers π du rapport $\frac{f'x)-f(\pi)}{x-\pi}$ qui sont respectivement 2π et -2π et sont donc distinctes. Donc f n'est pas de classe C_1.

La limite à gauche de f' en π est 2π. La limite à droite de f en $-\pi$ est -2π. Mais comme la fonction est périodique c'est aussi la limite à droite de f' en π. Comme la limite à gauche de f' en π est 2π on voit que les limites à droite et à gauche de f' existent et sont finies, et donc f est de classe C_1 par morceaux.

2. Le calcul des coefficients de Fourier est standard et fournit $a_0 = \pi^2/3$ et pour $n > 0$ au moyen de deux intégrations par parties $a_n = 4(-1)^n/n^2$. Enfin $b_n = 0$ car la fonction est paire.

3. La fonction f est de classe C_1 par morceaux et continue. Par conséquent, d'après le théorème de Dirichlet elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

Exercice B. 1. Comme $\frac{|\cos nt|}{n2^n} \leq u_n = \frac{1}{n2^n}$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1/2 < 1$ le critère de D'Alembert garantit la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et la convergence normale de la série considérée. Ensuite d'après le cours, pour $-1 < x < 1$ la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est $-\log(1-x)$. Faisant $x = 1/2$ dans ce résultat on obtient la valeur de $f(0) = -\log(1-\frac{1}{2}) = \log 2$.

2. Comme $\frac{d}{dt}\frac{\cos nt}{n2^n} = \frac{-\sin nt}{2^n}$ on a $|\frac{d}{dt}\frac{\cos nt}{n2^n}| \leq 2^{-n}$ La série géometrique de raison 1/2 étant convergente, on en déduit que la série des dérivées est normalement convergente, donc, d'après le cours, uniformément convergente. De plus la série de fonctions initiale converge en au moins un point (tous, en fait, d'après le 1). On est donc dans les conditions d'application du théorème de dérivation d'une série de fonctions et f' est la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nt}{2^n}$.

3. La série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-it}/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\cos nt - i\sin nt)/2^n$ de raison $e^{-it}/2$ converge car sa raison est de module $1/2 < 1$. Sa somme est donc

$$\frac{e^{-it}}{2-e^{-it}} = \frac{1}{2e^{it}-1} = \frac{1}{2\cos t - 1 + 2i\sin t} = \frac{2\cos t - 1 - 2i\sin t}{5 - 4\cos t}.$$

En prenant la partie imaginaire on a le résultat voulu.

4. En faisant le changement de variable $u = 5 - 4\cos t$ dans l'intégrale suivante on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{-2\sin t dt}{5-4\cos t} = \log 2 - \frac{1}{2}\log(5 - 4\cos x).$$

Exercice C. Les fonctions $f_1(x,y) = e^x - |y|$ et $f_2(x,y) = x - y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car elles sont somme de fonctions évidemment continues à une variable. Donc $A_j = \{(x,y; f_j(x,y) > 0\}$ est ouvert car c'est l'image inverse par la fonction continue f_j de l'ouvert de $\mathbb{R}$ égal à $]0,\infty[$. Donc $A = A_1 \cap A_2$ est ouvert, comme intersection d'un nombre fini d'ouverts.

Université P. Sabatier, Deug Mias 2^{ieme} année, UF3, examen d'algèbre 21/01/02

Durée 2 heures. Aucun document. Affichage des résultats le vendredi 1/02. Présentation des copies aux étudiants le mercredi 6/02 de 11 à 12, salle

Question de cours. Si U est une matrice carrée complexe, qu'est ce que la matrice adjointe de U? Qu'est ce qu'une matrice unitaire ? Décrire les éléments de $\mathbf{SU}(2)$ (avec démonstration) (4 points).

Exercice A. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\|Y\|$. On note ensuite $f(X) = x + 2y + 3z$. Montrer que si $\|X\| = 1$, alors $f(X) \leq \sqrt{14}$. Pour quel X de norme 1 a t-on égalité ? (2 points).

Exercice B. Soit θ fixé dans $]0, \pi[$ et

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1 - \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

1. Trouver une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D d'ordre 2 telles que $A = UDU^T$ (2 points).
2. Si $\rho > 0$ et $a > 0$, mêmes questions pour les matrices ρA et $P = aI_2 + \rho A$ (2 points).
3. Montrer que P est définie positive et calculer sa racine carrée (2 points).

Exercice C. Soit E un espace euclidien de dimension q et soit $\langle x, y\rangle$ son produit scalaire. Soit enfin $a \in L(E)$ tel que $a^3 = \mathrm{id}_E$. On définit alors la forme bilinéaire symétrique sur E

$$B(x, y) = \langle x, y\rangle + \langle a(x), a(y)\rangle + \langle a^2(x), a^2(y)\rangle.$$

1. Montrer que $(x, y) \mapsto B(x, y)$ définit un nouveau produit scalaire sur E (E muni de B sera dit euclidien pour la structure B) (2 points).
2. Calculer $B(a(x), a(y)) - B(x, y)$ et déduire du résultat que a est orthogonal pour la structure B (2 points).
3. Montrer que $\det a = 1$. Soit f une base orthonormale de E pour la structure B. Pourquoi a t-on $[a]_f^f \in \mathbf{SO}(q)$? (2 points).
4. On suppose désormais $q = 2$ et $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique. On considère une matrice carrée $A \neq I_2$ d'ordre 2 réelle telle que $A^3 = I_2$. Soit $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Montrer à l'aide du 3) et du cours qu'il existe une matrice inversible réelle d'ordre 2 telle que $A = PR(\pm 2\pi/3)P^{-1}$ (2 points).

Liste des questions de cours d'analyse, Deug deuxième année, sessions de Janvier et Septembre 2002.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Que signifie la phrase " la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge" ? Que signifie la phrase " la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument" ? Enoncer un résultat reliant les deux notions.
2. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes. Qu'appelle t-on suite produit de Cauchy $c = (c_n)_{n\geq 0}$ de a et b? Enoncer un théorème reliant les trois séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
3. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes et $c = (c_n)_{n\geq 0}$ leur produit de Cauchy. Soit $A(z), B(z), C(z)$ les sommes des trois séries entières correspondantes à l'intérieur de leurs disques de convergence respectifs R_a, R_b, R_c. Enoncer un théorème reliant R_a, R_b, R_c et reliant A, B, C.
4. Enoncer le théorème permettant de définir le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
5. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Que signifie la phrase "la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$? Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, énoncer une condition suffisante pour que f soit continue sur $[a, b]$.
6. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Que signifie la phrase "la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge normalement sur $[a, b]$? Si la série converge pour tout $x \in [a, b]$ énoncer une condition suffisante pour que sa somme S soit continue sur $[a, b]$.
7. Soit $f :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Qu'appelle t-on série de Taylor de f en x_0? Soit α un nombre réel. Précisez cette série de Taylor pour $x_0 = 0$, $\epsilon = 1$ et $f(x) = (1 + x)^\alpha$.
8. Soit E un espace normé et $A \subset E$. Que signifie la phrase A est ouvert ? Que signifie la phrase A est fermé ? Donner la caractérisation des fermés en termes de suites.
9. Donner les axiomes d'une norme dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Donner une définition des fonctions continues sur E. A l'aide de ces axiomes et de cette définition, montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E.
10. Soit E un espace normé de dimension finie et $K \subset E$. Que signifie la phrase K est compact ? Donner ensuite une caractérisation des compacts de E.

Liste des questions de cours d'algèbre, Deug deuxième année, sessions de Janvier et Septembre 2002.

1. Définir le polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
2. Soit a un endomorphisme de l'espace de dimension finie E. Que signifie la phrase "a est diagonalisable" ? Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que a soit diagonalisable en termes de son polynôme minimal.
3. Soit a un endomorphisme de l'espace de dimension finie E sur le corps des complexes. Qu'appelle t-on décomposition de Dunford de a? Que signifie la phrase "la base f de E est une base de Dunford pour a" ?
4. Donner une démonstration de l'inégalité de Schwarz dans un espace euclidien (les cas d'égalité ne sont pas demandés).
5. Soit F un sous espace vectoriel de l'espace euclidien E. Définir la projection orthogonale sur F et la symétrie orthogonale par rapport à F.
6. Enoncer le théorème caractérisant la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel dans un espace euclidien.
7. Qu'appelle t-on endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) dans un espace euclidien ? Montrer qu'un tel endomorphisme ne peut avoir d'autres valeurs propres que ± 1, et qu'il est de déterminant ± 1.
8. Soit E un plan euclidien. Décrire sans démonstration les endomorphismes orthogonaux (ou isométries vectorielles) de E de déterminant -1. Même question pour ceux de déterminant 1.
9. Enoncer le théorème de la décomposition polaire d'un endomorphisme inversible d'un espace euclidien.
10. Si U est une matrice carrée complexe, qu'est ce que la matrice adjointe de U? Qu'est ce qu'une matrice unitaire ? Décrire les éléments de $\mathbf{SU}(2)$ (avec démonstration).

Université P. Sabatier, Deug Mias 2^{ieme} année, UF3, examen d'algèbre de Septembre 2002

Question de cours. Définir le polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Exercice A. Soit E un espace euclidien et soit A et B deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire tels que $A+B=E$ et $A\cap B=\{0\}$. On note par p la projection de E sur A parallèlement à B, c'est à dire que si $a\in A$ et $b\in B$ alors $p(a+b)=a$.

1. On suppose dans cette question que A et B sont orthogonaux. Montrer que pour tout $x\in E$ on a $\|p(x)\|^2\leq\|x\|^2$.
2. On suppose dans cette question que pour tout $x\in E$ on a $\|p(x)\|^2\leq\|x\|^2$ et on veut en déduire que A et B sont orthogonaux. Pour cela, on fixe $a\in A$ et $b\in B$. Trouver les deux nombres r et s tels que pour tout λ réel on ait $r\lambda+s=\|\lambda a+b\|^2-\|p(\lambda a+b)\|^2$. En utilisant alors le fait que $r\lambda+s\geq 0$ pour tout λ réel, montrer que $\langle a,b\rangle=0$.

Exercice B. Soit n un entier ≥ 2.

1. Soit $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice symétrique réelle d'ordre n définie par $m_{ii}=1$ pour $i=1,\dots,n$ et $m_{ij}=1/2$ si $i\neq j$. Montrer que M est définie positive. Méthode : on peut démontrer l'identité
$$\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2.$$
Pourquoi M est elle inversible ?
2. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1,u_2,\dots,u_n$ des vecteurs de E de norme 1 tels que de plus, pour $i\neq j$ on ait toujours $\|u_i-u_j\|^2=1$. Montrer que $\langle u_i,u_j\rangle=1/2$ pour $i\neq j$. Si X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1,\dots,x_n)$ tel que
$$\sum_{i=1}^n x_iu_i=0$$
montrer que $MX=0$. Déduire de ceci et du 1) que $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ est une base de E.

Exercice C. Soit $\theta>0$. On pose $t=2\operatorname{ch}\theta$ et on considère les deux matrices
$$A=\begin{bmatrix}-1&t\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\t&-1\end{bmatrix}.$$

Calculer AB, son déterminant et sa trace (rappel : $2\operatorname{ch}^2\theta-1=\operatorname{ch}2\theta$), et en déduire son polynôme caractéristique. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D réelles d'ordre 2 telles que $AB=PDP^{-1}$. En déduire $(AB)^n$ si n est un entier relatif.

Barême : QC=2 ; A=B=C=6.

Corrigé de l'épreuve d'algèbre, Deug Mias, UF3, Septembre 2002.

Q.C. Si l'espace vectoriel E est de dimension finie et si a est un endomorphisme de E, le polynôme minimal de a est le polynôme monique non nul P de plus bas degré tel que $P(a)$ est l'endomorphisme nul.

A 1. Soit $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. D'après Pythagore $\|x\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \geq \|a\|^2$.

A 2. Puisque $p(\lambda a + b) = \lambda a$ on a

$$r\lambda + s = \|\lambda a + b\|^2 - \|p(\lambda a + b)\|^2 = \lambda^2(\|a\|^2 - \|a\|^2) + 2\lambda\langle a, b\rangle + \|b\|^2.$$

Donc $r = 2\langle a, b\rangle$ et $s = \|b\|^2$ ne dépendent pas de λ. De plus la fonction affine $\lambda \mapsto r\lambda + s$ est toujours ≥ 0 par hypothèse : ceci n'est possible que si $r = 0$, (sinon $r\lambda + s$ change de signe quand λ varie entre ∞ et $+\infty$). Donc a et b sont orthogonaux.

B 1. L'identité se démontre immédiatement en développant le second membre. Ensuite, si $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$ alors $X^T MX$ est le premier membre de l'identité, et le second membre étant une somme de carrés, est toujours ≥ 0. Donc M est déjà une matrice positive. Pour voir qu'elle est définie positive, il reste à vérifier que $X^T MX = 0$ entraine $X = 0$. Mais le second membre nul entraine $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ et donc $X = 0$. La matrice M est inversible car définie positive (c'est du cours).

B 2. Puisque $1 = \|u_i - u_j\|^2 = \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j\rangle + \|u_j\|^2 = 2 - 2\langle u_i, u_j\rangle$, on a $\langle u_i, u_j\rangle = 1/2$. Ensuite on multiplie scalairement $\sum_{i=1}^n x_i u_i$ par u_j pour obtenir $\frac{1}{2}(x_j + \sum_{i=1}^n x_i) = 0$. Comme c'est vrai pour tout j c'est dire $MX = 0$. Comme M est inversible, cela entraine $X = 0$ et donc les $(u_1, \ldots, u_n)$ sont indépendants. Comme la dimension de E est n, c'est aussi une base de E.

C.

$$AB = \begin{bmatrix} t^2 - 1 & -t \\ t & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\operatorname{ch}^2\theta - 1 & -2\operatorname{ch}\theta \\ 2\operatorname{ch}\theta & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\theta} + 1 + e^{-2\theta} & -e^{\theta} - e^{-\theta} \\ e^{\theta} + e^{-\theta} & -1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite $\det(AB) = \det A \det B = (-1)^2 = 1$, et $\operatorname{trace}(AB) = t^2 - 2 = 2\operatorname{ch} 2\theta$. Puisque AB est d'ordre 2, son polynôme caractéristique est $X^2 - X\operatorname{trace}(AB) + \det(AB) = X^2 - 2X\operatorname{ch}(2\theta) + 1$. Ses valeurs propres se calculent facilement et sont $\operatorname{ch}(2\theta) \pm \operatorname{sh}(2\theta) = e^{\pm 2\theta}$. Comme $\theta > 0$ les valeurs propres sont distinctes et AB est donc diagonalisable. Calculons un vecteur propre $(x, y)^T$ associé à la valeur propre $e^{2\theta}$: il satisfait $(t^2 - 1)x - ty = e^{2\theta}x$, ou encore

$$(e^{2\theta} + 1 + e^{-2\theta})x - (e^{\theta} + e^{-\theta})y = e^{2\theta}x,$$

ou encore $x = e^{\theta}y$. On peut par exemple prendre $y = 1$ et un vecteur propre de $e^{2\theta}$ est $f_1 = (e^{\theta}, 1)^T$. De même un vecteur propre de $e^{-2\theta}$ est $f_2 = (1, e^{\theta})^T$. La matrice P de changement de base entre la base canonique e et la base $f = (f_1, f_2)$ satisfait

$$P = \begin{bmatrix} e^{\theta} & 1 \\ 1 & e^{\theta} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{e^{2\theta} - 1} \begin{bmatrix} e^{\theta} & -1 \\ -1 & e^{\theta} \end{bmatrix}.$$

Avec $D = \begin{bmatrix} e^{2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-2\theta} \end{bmatrix}$ on a $AB = PDP^{-1}$. Enfin pour n entier > 0 on a $(AB)^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ (on peut le voir par récurrence sur n). Comme $\det(AB) = 1$ alors AB est inversible et on peut considérer $(AB)^n$ pour n entier < 0. Il est clair que $(AB)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et donc $(AB)^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ aussi pour $n \leq 0$. Bref, pour tout entier relatif :

$$\begin{aligned}
(AB)^n &= \frac{1}{e^{2\theta}-1}\begin{bmatrix} e^{\theta} & 1 \\ 1 & e^{\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2n\theta} & 0 \\ 0 & e^{-2n\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\theta} & -1 \\ -1 & e^{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{e^{2\theta}-1}\begin{bmatrix} e^{(2n+2)\theta} - e^{-2n\theta} & -e^{(2n+1)\theta} + e^{(-2n+1)\theta} \\ e^{(2n+1)\theta} - e^{(-2n+1)\theta} & -e^{2n\theta} + e^{(-2n+2)\theta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\begin{bmatrix} \operatorname{sh}(2n+1)\theta & -\operatorname{sh}2n\theta \\ \operatorname{sh}2n\theta & -\operatorname{sh}(2n-1)\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Université P. Sabatier, Deug Mias 2^{ieme} année, UF3, examen d'analyse de Septembre 2002

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Que signifie la phrase "la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge" ? Que signifie la phrase "la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument" ? Préciser le lien entre les deux notions.

Exercice A. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle positive telle que $u_0 = u_1 = 1$ et telle que si $n \geq 1$ on ait $2(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4. Montrer par récurrence sur n que $u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^n}$. En déduire que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \sqrt{2}$ (Méthode : rappeler la *définition* du rayon de convergence). On note désormais par $f(x)$ la somme de cette série entière pour $-R < x < R$.
2. Pour $n \geq 0$ on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ et donc $v_0 = 1$ et $v_n = 2(n+1)u_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Montrer à l'aide du cours que pour $-R < x < R$ les sommes des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1}x^n$ sont respectivement $f(x)^2$ et $f'(x)$. En déduire la valeur de $2f'x) - f(x)^2$.
3. Déduire du 2) que pour $-R < t < R$ on a
$$\int_0^t \frac{2f'(x)}{1+f(x)^2}dx = t.$$
A l'aide du changement de variable $u = f(x)$ (ne pas oublier que $f(0) = 1 = \text{tg } \frac{\pi}{4}$), calculer l'intégrale ci dessus et en déduire $f(t)$ pour $-R < t < R$.

Exercice B. Soit n un entier > 0 et E l'espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$ des matrices réelles symétriques d'ordre n muni d'une norme quelconque. Soit P l'ensemble des matrices A de E qui sont positives, c'est à dire telles que pour toute matrice colonne X d'ordre n on ait $X^T AX \geq 0$ (des auteurs disent aussi "semidéfinie positive" pour "positive").

1. Soit X fixé. Pourquoi l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $A \mapsto X^T AX$ est elle continue ?
2. Montrer que P est fermé (Méthode : utiliser le 1) et, par exemple, la caractérisation des fermés par les suites dans les espaces normés).

Exercice C. En justifiant votre réponse, indiquez lesquelles des séries suivantes sont convergentes :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^2, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(\frac{n+1}{n}).$$

Barème : QC=2+1+1 ; A=3+3+3, B=1+2, C=4.

Corrigé de l'épreuve d'analyse, Deug Mias, UF3, Septembre 2002.

Q.C. Notons $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge est dire que $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe et est finie. Dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument est dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ converge. Un théorème du cours affirme qu'une série qui converge absolument converge. L'exemple de $u_n = (-1)^n/(n+1)$ montre qu'une série peut converger sans converger absolument.

A 1.

$$\begin{aligned} 2.2u_2 &= u_0u_1 + u_1u_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 1/2 \\ 2.3u_3 &= u_0u_2 + u_1^2 + u_2u_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 1/3 \\ 2.4u_4 &= u_0u_3 + u_1u_2 + u_2u_1 + u_3u_0 = 5/3 \quad \Rightarrow \quad u_4 = 5/24. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que $u_n \leq 2^{-(n-1)/2}$. C'est évident pour $n = 0$ et 1. Supposons cela vrai jusqu'à $n \geq 1$. Alors

$$2(n+1)u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^k} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^{n-k}} = \frac{2(n+1)}{(\sqrt{2})^n},$$

et la récurrence est étendue. Rappelons alors que le rayon R de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est l'unique élément de $[0, \infty]$ tel que la série converge si $|x| < R$ et diverge si $|x| > R$. Observons alors que si $|x| < \sqrt{2}$ alors

$$u_n|x|^n \leq \sqrt{2}\left(\frac{|x|}{(\sqrt{2})}\right)^n.$$

Donc le terme général $u_n|x|^n$ est majoré par le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{|x|}{\sqrt{2}} \in [0, 1[$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ converge absolument, donc converge. Donc $R \geq |x|$ pour tout x tel que $|x| < \sqrt{2}$ et donc $R \geq \sqrt{2}$.

A 2. Le cours dit que si $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout n et que si R_a et $A(x)$ sont les rayon de convergence et la somme (pour $|x| < R_a$) de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et $C(x) = A(x)B(x)$ si $|x| < \min(R_a, R_b)$. Appliquons ce principe à $a_n = b_n = u_n$. Alors $c_n = v_n$, $A = B = f$ et donc $C = f^2$.

Le cours dit que R_a est aussi le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et que sa somme est $A'(x)$ pour $|x| < R_a$. Donc pour $|x| < R$ la somme de $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$ est $f'(x)$.

Le cours dit enfin que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ est $\geq \min(R_a, R_b)$ et que sa somme dans le disque de convergence est $A(x) - B(x)$. Appliquons cela à $a_n = 2(n+1)u_{n+1}$ et $b_n = v_n$. Comme $a_0 - b_0 = 1$ et $a_n - b_n = 0$ si $n \geq 1$ alors $A(x) - B(x)$ se calcule de 2 manières qui fournissent $2f'(x) - f(x)^2 = 1$ si $|x| < R$.

A 3. Le 2) fournit pour $|x| < R$ l'égalité $\frac{2f'(x)}{1+f(x)^2} = 1$. En intégrant les deux membres sur l'intervalle d'extrémités 0 et t on a l'expression annoncée. Le changement de variable indiqué donne

$$t = \int_1^{f(t)} \frac{2du}{1+u^2} = [2\arctan u]_1^{f(t)} = 2\arctan f(t) - \frac{\pi}{2},$$

$$f(t) = \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan\frac{t}{2}}{1 - \tan\frac{t}{2}} = \tan t + \frac{1}{\cos t}.$$

(Remarque : on verra en licence que ce résultat permet de montrer que $R = \pi/2 > \sqrt{2}$.

B 1. L'application est linéaire, et toute application linéaire définie sur un espace normé de dimension finie est continue.

B 2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de P qui converge vers A. Montrons que A est aussi dans P. En effet pour tout X on a $X^T A_n X \geq 0$ par hypothèse. D'après le 1) lim $X^T A_n X = X^T AX$ et comme la limite d'une suite ≥ 0 est ≥ 0 on a $X^T AX \geq 0$. Comme $A \in E$ on a $A \in P$ et donc P est fermé.

C. Voir session de septembre 2001.

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3
Devoir numéro 1 d'algèbre linéaire,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 30/09 au 4/10 2002

Soit n un entier ≥ 2 et soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées réelles d'ordre n. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur E telle que de plus pour tous X et Y dans E on ait $f(XY) = f(YX)$. Le but du problème est de montrer qu'alors il existe un réel c tel que pour tout $X \in E$ on ait $f(X) = c \operatorname{trace} X$. Dans toute la suite pour $k = 1, \ldots, n$ $P_k = (p_{ij}) \in E$ est défini par $p_{ij} = 0$ si $(i,j) \neq (k,k)$ et $p_{kk} = 1$.

1. Soit $X = (x_{ij}) \in E$. Montrer les affirmations suivantes : $P_1 + \ldots + P_n = I_n$, $P_k^2 = P_k$, $P_k X P_k = x_{kk} P_k$ et $f(XP_k) = f(P_k X P_k) = x_{kk} f(P_k)$.
2. Dans le cas particulier $n = 2$, trouver $U \in E$ inversible telle que $P_2 U = U P_1$. Même question pour n quelconque. Enfin, si $k \geq 2$ trouver $U_k \in E$ inversible telle que $P_k = U_k P_1 U_k^{-1}$.
3. On pose $c = f(P_1)$. Montrer à l'aide du 2) que $c = f(P_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. En écrivant $X = X(P_1 + \ldots + P_n)$ montrer à l'aide de la linéarité de f et du 1) que $f(X) = c \operatorname{trace} X$.

Devoir numéro 1 d'analyse,
à remettre au dernier TD d'analyse de la semaine du 7 au 11 octobre 2002

Soit a, b et c trois nombres positifs ou nuls. On considère les trois fonctions affines de x : $A = x + a$, $B = x + b$ et $C = x + c$, ainsi que les deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $R = (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{B} + \sqrt{C})(\sqrt{C} + \sqrt{A})$ et $J = x + \sqrt{AB} + \sqrt{BC} + \sqrt{CA}$

1. Soit $s > 0$ fixé. Montrer que $\int_s^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}$. est une intégrale convergente (Méthode : montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{ABC}}$ est équivalente à $x^{-3/2}$ quand x tend vers l'infini, et utiliser le théorème d'équivalence des intégrales impropres). On désigne désormais par $I(s)$ la valeur de cette intégrale (ne pas chercher à la calculer pour a, b, c quelconques). Quelle est la limite de $I(s)$ quand $s \to +\infty$? Montrer que $I'(x) = -\frac{1}{\sqrt{ABC}}$. Calculer $I(s)$ quand $a = b = c \geq 0$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{2}{u^2-a}$ et calculer $\int_{\sqrt{s+a}}^{U} \frac{2du}{u^2-a}$ avec $U > \sqrt{s+a}$. En déduire $I(s)$ dans le cas particulier $b = c = 0$ par le changement de variable $u = \sqrt{x+a}$. (Dans cette question, penser à distinguer $a > 0$ et $a = 0$.)
3. (1) Montrer que $J(x) = (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{C}) - a > x$.
   (2) En déduire que $J'(x) = \frac{R}{2\sqrt{ABC}}$.
   (3) Avec deux expressions similaires à (1), montrer que $R^2 = (J+a)(J+b)(J+c)$.
4. Montrer avec 1), 3.2) et 3.3) que $2I'(J(x))J'(x) = I'(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire, avec la limite à l'infini de $I(s)$ calculée au 1), que $2I(J(x)) = I(x)$. En écrivant $I(s) = \int_s^{J(s)} + \int_{J(s)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}$, montrer que $I(s) = 2\int_s^{J(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}$.
5. (*Facultatif*) Soit $(J_n)_{n=0}^{+\infty}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $J_0(x) = x$ et, pour $n \geq 0$, $J_{n+1}(x) = J_n(J(x))$. Montrer par récurrence sur n à l'aide du 4) que $I(s) = 2^{n+1} \int_{J_n(s)}^{J_{n+1}(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}}$ Démontrer à l'aide du changement de variable $x = st$ que $\lim_{s \to +\infty} \sqrt{s} \int_s^{J(s)} \frac{dx}{\sqrt{ABC}} = \int_1^4 \frac{dt}{t^{3/2}} = 1$. Montrer que $(J_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite strictement croissante dont la limite ne peut être un nombre fini. En déduire que $\lim_{n\to\infty} J_n(x)/4^{n+1} = 1/I(x)^2$.

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3
Devoir numéro 2 d'algèbre linéaire,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 14 au 18 octobre 2002

Soit $0 < \theta < \pi$. On pose $t = 2\cos\ \theta$. Soit $E = \mathbf{C}^2$ l'espace vectoriel complexe canonique de dimension 2 et soit $e = (e_1, e_2)$ sa base canonique. On considère les deux endomorphismes a et b de E de matrices représentatives respectives dans la base e :

$$[a]_e^e = A = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [b]_e^e = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer AB, son déterminant et montrer que sa trace est $2\cos 2\theta$. En déduire le polynôme caractéristique de $c = a \circ b$. Trouver les valeurs propres de c et une base $f = (f_1, f_2)$ de vecteurs propres de c. Préciser $[c]_f^f$ et les $[f_i]^e$. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $AB = PDP^{-1}$. En déduire $(AB)^n$ si n est un entier relatif.

Devoir numéro 2 d'analyse,
à remettre au dernier TD d'analyse de la semaine du 21 au 25 octobre 2002

Soit $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Le but du problème est de montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\frac{\pi}{5}\alpha^k)$.

1. Montrer la congergence absolue des séries suivantes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{5}\beta^k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\frac{\pi}{5}\beta^k).$$

2. Montrer à l'aide du critère de Riemann que si $1 \leq a < b \leq 12$ la série $\sum_{q=0}^{\infty}(\frac{1}{12q+a} - \frac{1}{12q+b})$ converge. On pose $S_p(a) = \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{12q+a}$. Est ce que $\lim_{p\to\infty} S_p(a)$ existe et est finie ? Est ce que $\lim_{p\to\infty}(S_p(a) - S_p(b))$ existe et est finie ?
3. On considère la suite d'entiers $(L_k)_{k\geq 1}$ définie par $L_1 = 2$, $L_2 = 6$ et $L_{k+2} = 2L_{k+1} + L_k$. Montrer par récurrence sur k que $L_k = \alpha^k + \beta^k$ (méthode : si $L'_k = \alpha^k + \beta^k$ montrer $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_2$ et $L'_{k+2} = 2L'_{k+1} + L'_k$). Calculer ensuite les restes modulo 10 des nombres L_k pour $k = 1, \ldots, 12, 13, 14$. Déduire du résultat que les restes modulo 10 de L_k forment une suite de période 12. Si $i = 0, 1, 2, \ldots, 9$, soit a_i le nombre de $k = 1, \ldots, 12$ tels que $L_k \equiv i$ modulo 10. Donner la valeur des a_i pour $i = 0, \ldots, 9$.
4. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\frac{\pi}{5} L_k)$ converge (Méthode : considérer la suite $(s_{12p})_{p=1}^{\infty}$ de ses sommes partielles surveillées seulement pour $n = 12p$ et montrer que

$$s_{12p} = \sum_{c=1}^{12} \sin(\frac{\pi}{5} L_c) S_p(c).$$

Déduire du 2) et 3) que $\lim_{p\to\infty} s_{12p}$ existe et est finie. Montrer aussi que pour $1 \leq c \leq 12$ on a $\lim_{p\to\infty}(s_{12p+c} - s_{12p}) = 0$. Déduire de tout cela que $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe et est finie).
5. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\frac{\pi}{5} L_k) \cos(\frac{\pi}{5}\beta^k)$ converge (Méthode : utiliser $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, le résultat de 4) et le théorème sur la somme de deux séries).
6. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\frac{\pi}{5}\alpha^k)$ (Méthode : écrire $\alpha^k = L_k - \beta^k$, utiliser $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ et le théorème sur la somme de deux séries).

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3
Devoir numéro 3 d'algèbre linéaire,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 28 au 31 octobre 2002

Soit K un corps quelconque, n un entier > 1, $E = K^n$ muni de sa base canonique $e = (e_1, \ldots, e_n)$, et soit $a \in L(E)$ défini par $a(e_j) = e_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, n-1$ et $a(e_n) = e_1$.

1. Ecrire $[a]_e^e$ et $[\mathrm{id}_E + a]_e^e$ dans les cas particuliers $n = 4$ ou 5. Dans le cas général, calculer $a^k(e_1)$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Montrer que le polynôme minimal de a est de degré n (Méthode : si on avait $P(a) = 0_{L(E)}$ pour P non nul de degré $\leq n-1$, observer qu'alors $P(a)(e_1) = 0_E$ conduit à une contradiction). Calculer $a^n - \mathrm{id}_E$ (Méthode : calculer $a^n(e_j) - e_j$) et déduire du résultat le polynôme caractéristique de a (Méthode : utiliser le cours). Quelles sont les valeurs propres de a dans le cas particulier où K est le corps de complexes et où $n = 4$ ou 5 ? Dans le cas général, montrer par la formule du binôme qu'on a $(\mathrm{id}_E + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k$.
2. Si n est un entier ≥ 0 et si $n = \sum_{k\geq 0} \epsilon_k(n) 2^k$ avec $\epsilon_k(n) = 0$ ou 1, on note $\|n\| = \sum_{k\geq 0} \epsilon_k(n)$ et, si $n > 0$, on note $v(n) = \inf\{k \geq 0; \epsilon_k(n) = 1\}$ (Par exemple, puisque $76 = 2^2 + 2^3 + 2^6$ alors $\|76\| = 3$ et $v(76) = 2$). Montrer que $v(n) = 1 + \|n-1\| - \|n\|$ (Méthode : écrire $n = 2^v + 2^{v+1}p$ et $n - 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^{v-1} + 2^{v+1}p$). En déduire que $v(n!) = n - \|n\|$ (Méthode : observer que $v(ab) = v(a) + v(b)$). Montrer que si $0 \leq k \leq n$ alors $v(C_n^k) = \|k\| + \|n-k\| - \|n\|$. En déduire que si $n = 2^r$ avec r entier ≥ 0 et si $1 \leq k \leq n-1$ alors $v(C_n^k) \geq 1$. Montrer que si $n = 2^r(2p+1)$ et $k = 2^r$ avec r entier ≥ 0 et p entier ≥ 1 alors $v(C_n^k) = 0$.
3. On suppose dans cette question que $K = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ est le corps à deux éléments. Montrer à l'aide des 1) et 2) que $(\mathrm{id}_E + a)^n = 0_{L(E)}$ si et seulement si n est une puissance de 2.
4. *Facultatif.* Si $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{N}^n$ est une suite d'entiers ≥ 0, l'application $z \mapsto D(z)$ de $\mathbf{N}^n$ dans $\mathbf{N}^n$ est définie par

$$D(z) = D(z_1, \ldots, z_n) = (|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|, \ldots, |z_{n-1} - z_n|, |z_n - z_1|).$$

Ainsi pour $n = 4$ par exemple les itérés de $z = (1, 76, 35, 3)$ sont $D(z) = (75, 41, 32, 2)$, $D^2(z) = (34, 9, 30, 73)$, $D^3(z) = (25, 21, 43, 39)$, $D^4(z) = (4, 22, 4, 14), \ldots, D^8(z) = (0, 0, 0, 0)$. D'autre part, si $z \in \mathbf{N}^n$ et $x \in K^n = E$, avec $K = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ on convient d'écrire $z \equiv x \mod 2$ si z_k a la parité de x_k pour $k = 1, \ldots, n$. On suppose désormais que n est une puissance de 2 et que $z \in \mathbf{N}^n$ est fixé. Montrer à l'aide du 3) que $D^n(z) \equiv 0_E \mod 2$ pour tout $z \in \mathbf{N}^n$ (Méthode : montrer que $z \equiv x \mod 2$ entraine $D(z) \equiv (\mathrm{id}_E + a)(x) \mod 2$ et que $D^k(z) \equiv (\mathrm{id}_E + a)^k(x) \mod 2$ pour tout entier $k \geq 0$). Montrer par récurrence sur k qu'il existe $z^{(k)} \in \mathbf{N}^n$ tel que $D^{nk}(z) = 2^k z^{(k)}$. En déduire qu'il existe k tel que $D^{nk}(z) = (0, \ldots, 0)$ (Méthode : si $M = \max_{1\leq j\leq n} z_j$ montrer que tout élément de la suite $D(z)$ est $\leq M$).

Devoir numéro 3 d'analyse,
à remettre au dernier TD d'analyse de la semaine du 4 au 8 novembre 2002

On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur $I =]0, \infty[$ définie par $f_1(x) = x, f_2(x) = x(x+1), f_{n+1}(x) = (n+x)f_n(x)$. Le but du problème est de montrer que $L(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)/(n!n^{x-1})$

existe, est à valeurs dans I et que $x \mapsto L(x)$ est dérivable dans I. Pour cela on considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}, (w_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur I définies par $u_n(x) = \log(n+x) - x\log(n+1) + (x-1)\log n$, $v_n = u_n'$ et $w_n = u_n''$.

1. Montrer que pour x fixé les 3 séries $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)$ convergent (Méthode : utiliser $\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)$ avec $\epsilon(h) \to 0$ pour $h \to 0$). Soit $U(x), V(x), W(x)$ leurs sommes respectives. Montrer $L(x) = x \exp U(x)$ (Méthode : simplifier $\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x)$).
2. Montrer que $|w_k(x)| \leq 1/k^2$ pour tout $x \in I$. En déduire les convergences normale et uniforme sur I de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$. Justifier $V' = W$. Soit $J = [a, b] \subset I$. Justifier la convergence uniforme de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ sur J, justifier $U' = V$ sur J, justifier $U' = V$ sur I.

Devoir numéro 4 d'algèbre,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 18 au 22 novembre 2002

(Base de Schmidt du tétraèdre régulier) Dans un espace euclidien de dimension n on considère une suite $(f_0,\dots,f_n)$ de $n+1$ vecteurs telle que $\|f_i - f_j\|^2 = 1$ si $i \neq j$ et telle que $f_0 = 0$.

1. Calculer $\langle f_i, f_j\rangle$ si $1 \le i < j \le n$. Montrer que $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de E (Méthode : si $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$, multiplier scalairement les 2 membres par f_j pour $j = 1,\dots,n$ et introduire $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$).
2. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base de Schmidt associée à $(f_1,\dots,f_n)$. On veut montrer qu'il existe des nombres réels $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_{n-1})$ tels que pour tout $j = 1,\dots,n$ on ait $f_j = a_je_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_ie_i$. Pour cela on procède par récurrence sur j : si c'est vrai pour $j < n$ introduisons les nombres a_{j+1}, b_j et les nombres $c_1,\dots,c_{j-1}$ tels que $f_{j+1} = c_1e_1 + \dots + c_{j-1}e_{j-1} + b_je_j + a_{j+1}e_{j+1}$. Démontrer alors que $f_{j+1} - f_j$ est orthogonal à F_{j-1}, l'espace engendré par $(f_1,\dots,f_{j-1})$ ou par $(e_1,\dots,e_{j-1})$, et en déduire que $c_i = b_i$ pour $i = 1,\dots,j-1$.
3. En calculant de deux manières par le 1 et le 2 les 3 nombres $\|f_j\|^2$, $\|f_{j+1}\|^2$, $\langle f_j, f_{j+1}\rangle$ montrer que $a_{j+1}^2 = 1 - \frac{1}{4a_j^2}$ et $a_jb_j = -\frac{1}{2} + a_j^2$. Dire pourquoi $a_j > 0$, calculer a_1 et montrer $a_j^2 = \frac{j+1}{2j}$.

Devoir numéro 4 d'analyse,
à remettre au dernier TD d'analyse de la semaine du 25 au 29 novembre 2002

Pour x réel $\neq 1$ on pose $y = y(x) = \frac{-x}{1-x}$. Soit $I = [0,1]$, $J = [-1,\frac{1}{2}]$ et $K = I \cap J$, et soit pour $n \ge 1$ les fonctions définies respectivement sur I, J, K par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n),\ v_n(x) = \frac{1}{n^2}(x^n + y^n),\ w_n(x) = \frac{1}{n^3}\left(x^n + (1-x)^n + y^n - 1\right).$$

1. Tracer le graphe de $x \mapsto y(x)$ (Rappel : $(\frac{ax+b}{cx+d})' = \frac{1}{(cx+d)^2}\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$). Montrer que les séries $\sum_{n=1}^\infty u_n$, $\sum_{n=1}^\infty v_n$, $\sum_{n=1}^\infty w_n$ convergent normalement dans I, J, K et y ont pour sommes des fonctions continues U, V, W.
2. Si $I_\epsilon = [\epsilon, 1-\epsilon]$ avec $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, montrer que $\sum_{n=1}^\infty u_n'$ converge normalement dans I_ϵ. En déduire que U' existe sur I_ϵ, puis sur $]0,1[$ et y est continue. Montrer de même que V' et W' existent et sont continues sur $]-1,\frac{1}{2}[$ et $]0,\frac{1}{2}[$.
3. On rappelle que pour $-1 < h < 1$ la somme de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}h^{n-1}$ est $-\frac{1}{h}\log(1-h)$. Calculer U' et V' dans $]0,1[$ et $]-1,\frac{1}{2}[$. En admettant $U(0) = \pi^2/6$, et en observant $V(0) = 0$ calculer U et V dans I et J.
4. Si $0 < x < \frac{1}{2}$ montrer que $(1-x)W'(x) = -U(x) + \frac{1}{x}V(x)$ et montrer que

$$W(x) = \frac{\pi^2}{6}\log(1-x) + \frac{1}{6}(\log(1-x))^3 - \frac{1}{2}(\log x)(\log(1-x))^2.$$

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3
Devoir numéro 5 d'algèbre linéaire,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 2 au 6 décembre 2002

(A) Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée réelle d'ordre n qui soit triangulaire inférieure (c'est à dire que $t_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j \leq n$), et inversible.

1. Montrer que $T^{-1} = (t'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire inférieure (Méthode : dire pourquoi les t_{ii} sont non nuls, puis démontrer par récurrence sur i que $t'_{ik} = 0$ pour $k > i$).
2. On suppose de plus que T est orthogonale. Montrer que T est diagonale. Décrire toutes les matrices qui sont à la fois diagonales et orthogonales.

(B) Sur l'espace réel $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré $\leq d$ on considère la forme bilinéaire symétrique

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{d} P^{(i)}(-i)Q^{(i)}(-i).$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire (Méthode : si P a $a_p x^p$ pour terme de plus haut degré, calculer $P^{(p)}(-p)$).
2. Soit $(E_0, \cdots, E_d)$ la base de $\mathcal{P}_d$ définie par $E_i(x) = x^i$, et soit $(P_0, \cdots, P_d)$ la base orthonormale de Schmidt engendrée par $(E_0, \cdots, E_d)$ pour le produit scalaire ci dessus. Soit T_d la matrice carrée d'ordre $d+1$ définie par $T_d = (P_i^{(j)}(-j))_{0\leq i,j\leq d}$. Montrer que T_d est triangulaire inférieure et orthogonale. En utilisant le **A** et le fait que $\langle E_i, P_i\rangle$ est > 0, montrer que T_d est la matrice identité d'ordre $d+1$, c'est à dire que $P_i^{(j)}(-j) = 0$ si $i \neq j$, $= 1$ si $i = j$.
3. Si S est dans $\mathcal{P}_d$, calculer $\langle S, P_i\rangle - S_i^{(i)}(-i)$ à l'aide de la définition du produit scalaire sur $\mathcal{P}_d$ et du 2). En déduire $S(x) - \sum_{i=0}^{d} S^{(i)}(-i)P_i(x)$.
4. On considère le polynôme Q_j défini par $Q_j(x) = P'_{j+1}(x-1) - P_j(x)$. Calculer $Q_j^{(i)}(-i)$ à l'aide du 2) et $Q_j(x)$ à l'aide du 3).
5. On considère le polynôme $R_j(x) = P_j(x) - \frac{x(x+j)^{j-1}}{j!}$. Montrer que $R_j(0) = 0$ et, à l'aide du 4), que $R'_{j+1}(x-1) = R_j(x)$. En déduire par récurrence sur j que R_j est le polynôme nul. Montrer que pour tout S de $\mathcal{P}_d$ on a $S(x) = \sum_{i=0}^{d} S^{(i)}(-i)\frac{x(x+i)^{i-1}}{i!}$.

Devoir numéro 5 d'analyse,
à remettre au dernier TD d'analyse de la semaine du 9 au 13 décembre 2002

Soit $p > 0$. On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$x(1-x)f''(x) + (p-3x)f'(x) - f(x) = 0.$$

On souhaite trouver une solution f_p de cette équation qui soit définie dans un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f_p(0) = 1$ et qui soit développable en série entière en 0 : $f_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

1. Montrer que si une telle série existe, de rayon de convergence $R > 0$, alors ses coefficients satisfont la relation de récurrence $(k+p)a_{k+1} = (k+1)a_k$, pour tout $k \geq 0$.

2. En déduire l'expression des coefficients a_k en fonction de k et p. Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue. Préciser f_1, f_2 et f_3.

Deug 2ème année, devoir d'algèbre numéro 6,
à remettre au dernier TD d'algèbre de la semaine du 16 au 20 décembre 2002

Soit k et n des entiers tels que $1 \leq k \leq n/2$ et soit $S_{k,n} = (a_{ij})$ la matrice symétrique réelle d'ordre n dont les coefficients sont 0 ou 1, de sorte que $a_{ii} = 0$ pour tout i, et que $a_{ij} = 1$ si et seulement si $\{i,j\} = \{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}, \ldots, \{n-1,n\}$ ou $\{1,k+1\}$. Le but du problème est de trouver les (k,n) tels que les matrices $C_{k,n} = 2I_n - S_{k,n}$ ("de Cartan") soient définies positives. On note $P_{k,n}(x) = \det(xI_n + S_{k,n})$ et en particulier on note $P_n = P_{1,n}$.

1. Ecrire les matrices $S_{1,5}, S_{2,5}, S_{3,6}$. Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$. On convient $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$. Pour $n \geq 2$, en développant $\det(xI_n + S_{1,n})$ par rapport à la dernière ligne, montrer que $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$ et montrer par récurrence sur n que $P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ si $0 < \theta < \pi$. En déduire les valeurs propres de $S_{1,n}$ et de $C_{1,n}$, et montrer que $C_{1,n}$ est définie positive.
2. Si $a \in \mathbb{R}$, si $b = (b_1, \ldots, b_q)$ est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^q$ et si C est une matrice symétrique réelle d'ordre q on considère la matrice par blocs symétrique d'ordre $q+1$
$$M(a;b;C) = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & C \end{bmatrix}.$$
Montrer que $S_{k,n} + xI_n = M(x;b;S_{k,n-1} + xI_{n-1})$ pour un vecteur ligne b de $\mathbb{R}^{n-1}$ convenable. En développant $\det(S_{k,n} + xI_n)$ par rapport à la première ligne, montrer que $P_{k,n}(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-1-k}(x)P_{k-1}(x)$. En déduire que $P_{k,n}(2\cos\theta) = \frac{1}{\sin^2\theta}(\sin 2\theta \sin n\theta - \sin(n-k)\theta \sin k\theta)$ si $0 < \theta < \pi$. En déduire que $\det C_{k,n} = 2n - k(n-k)$. Pour quels couples (k,n) (avec $1 \leq k \leq n/2$) a t-on $\det C_{k,n} > 0$? (Méthode : discuter $k \leq 2, k = 3, k \geq 4$).
3. On admet (Th. 9.4, 3) chap. 2) que si C est une matrice symétrique définie positive d'ordre q et si $\det M(a;b;C) > 0$, alors $M(a;b;C)$ est définie positive. Déduire du 2 tous les couples (k,n) tels que $C_{k,n}$ est définie positive.
4. *Facultatif.* Calculer la norme de $S_{1,n}$ (voir Prop. 10.4, chap. 2). Montrer que $P_{2,n}(2\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(\sin(n+1)\theta - \sin(n-3)\theta)$. En déduire les valeurs propres et la norme de $S_{2,n}$.

Devoir d'analyse numéro 6,
à remettre au PREMIER TD d'analyse de la semaine du 6 au 10 janvier 2003

Soit $0 < p < 1$.

1. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$ et la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+p}$ convergent. On note dans la suite respectivement par I et J les valeurs des intégrales et par S la somme de la série.
2. Montrer que $I = S$ (Méthode : expliciter le reste de la série entière $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$). En déduire que J est la somme de la série suivante
$$\frac{1}{p} + 2p\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - p^2}$$
(Méthode : faire le changement de variable $x \mapsto 1/x$ dans $\int_1^\infty x^{p-1}/(1+x)\,dx$).
3. On considère la fonction f de période 2π telle que $f(x) = \cos px$ si $|x| \leq \pi$. Dans le cas particulier où $p = 1/3$, dessiner le graphe de cette fonction entre -2π et 4π. Revenant au cas général $0 < p < 1$, calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Quel théorème du cours garantit que f est la somme de sa série de Fourier ? Utiliser ce qui précède pour montrer que $J = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$.

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3.
Partiel d'analyse du mardi 12 novembre 2002
Durée : 2 heures. Aucun document. Les calculatrices UPS sont autorisées.
Affichage des résultats le 21 novembre à 16 heures

Question de cours : Enoncer le théorème du cours concernant le produit de Cauchy de deux suites et concernant les séries correspondantes.

Exercice A : On considère pour $\alpha > 0$ les intégrales impropres :

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, dt \quad ; \qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t^\alpha}\, dt \quad ;$$

1. Montrez que $I(\alpha)$ est absolument convergente pour tout $\alpha > 1$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrez que $I(\alpha)$ est convergente pour tout $\alpha > 0$.
3. En utilisant la formule $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, montrez que $J(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice B : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ possède un développement limité d'ordre 2 de la forme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}$ avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$. *(On a ici* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ *et on sait que la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure en général).* On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = n^a\, u_n$ et $z_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

1. Montrez, à l'aide d'un développement limité de z_k en $1/k$ d'ordre 2 que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ est convergente.
2. Vérifiez que la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} z_k$ s'exprime en fonction de v_{n+1} et de v_1. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ est strictement positive.
3. Déduisez des questions précédentes un équivalent de u_n et concluez que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice C : On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ sur l'intervalle $I =]0, 2]$ définie par $f_0(x) = 1$ et, pour $n \geq 0$, par $f_{n+1}(x) = 2f_n(x) - x(f_n(x))^2$.

1. Montrer par récurrence que pour $n \geq 0$ et $x \in I$ on a
$$f_n(x) = \frac{1}{x}(1 - (1-x)^{2^n}).$$
2. Soit $c \in]0, 1[$ fixé. Montrer que la suite (f_n) converge simplement dans I et donner sa limite. Montrer qu'elle converge uniformément dans $[c, 1]$ et dans $[1, 2-c]$. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément dans $]0, 1]$ et qu'elle ne converge pas uniformément dans $[1, 2]$

(Barême : QC=2, A1=1, A2=2, A3=2, B1=3, B2=3, B3=2, C1=1, C2=4)

Corrigé de l'épreuve d'analyse, Deug Mias, UF3, Partiel 12 nov. 2002.

Q.C. Si $u = (u_n)_{n\geq 0}$, $v = (v_n)_{n\geq 0}$, $w = (w_n)_{n\geq 0}$, sont trois suites complexes, on dit que w est le produit de Cauchy de u et v si $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour tout $n \geq 0$. Dans ces conditions, si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont absolument convergentes et de sommes U et V, alors $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est absolument convergente et sa somme W satisfait $W = UV$.

A.1. Puisque $t^{-\alpha}|\cos t| \leq t^{-\alpha}$ et que pour $\alpha > 1$ l'intégrale $\int_1^{\infty} t^{-\alpha} dt$ converge, le théorème de comparaison montre que $\int_1^{\infty} t^{-\alpha} \cos t dt$ converge absolument, donc converge (cours).

A.2. Transformons $I(x) = \int_1^x t^{-\alpha} \cos t dt$ par l'intégration par parties gouvernée par $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t^{-\alpha}$. On obtient $I(x) = -\sin 1 + x^{-\alpha} \sin x + \alpha \int_1^x t^{-\alpha-1} \sin t dt$. Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \sin x = 0$ et de plus $\int_1^{\infty} t^{-\alpha-1} \sin t dt$ converge, par une méthode analogue au 1) puisque $\alpha + 1 > 1$. C'est dire que $\lim_{x\to\infty} I(x)$ existe et est finie, donc dire que $\int_1^{\infty} t^{-\alpha} \cos t dt$ converge.

A.3. Si $\alpha > 0$ alors $J = \int_1^{\infty} t^{-\alpha} \cos(2t)\, dt$ converge, on le voit par le changement de variable $u = 2t$, difféomorphisme qui ne change pas la nature d'une intégrale impropre, et qui ramène au 2). Ensuite $K = \int_1^{\infty} t^{-\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (cours). Donc l'intégrale impropre $L = \int_1^{\infty} t^{-\alpha} \cos^2 t dt$ est la somme $\frac{J+K}{2}$ où J est toujours convergente. D'après le théorème sur la somme de deux intégrales impropres, L converge si et seulement si K converge, et donc si et seulement si $\alpha > 1$.

B.1.

$$z_n = a \log(1 + \frac{1}{n}) + \log(1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}).$$

Puisque $\log(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2 \epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, on a

$$\begin{aligned} z_n &= a(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + (-\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}) - \frac{1}{2}(-\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2})^2 + \frac{\epsilon'_n}{n^2} \\ &= \frac{2b - a - a^2}{2n^2} + \frac{\epsilon''_n}{n^2} \\ &\sim \frac{2b - a - a^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'équivalence et le critère de Riemann, la série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge.

B.2. $\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (\log v_{k+1} - \log v_k) = \log v_{n+1} - \log v_1$. Dire que la série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge est dire que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$ existe et est finie, ce qui entraine que la limite de $\log v_{n+1} = \log v_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k$ existe et est finie. Puisque la fonction exponentielle est continue, on en déduit que $v_n = \exp(\log v_n)$ a une limite finie v et strictement positive.

B.3. Puisque $u_n = n^{-a} v_n$ on a $u_n \sim n^{-a} v$ et donc d'après le théorème d'équivalence et le critère de Riemann la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge si et seulement si $a > 1$.

C.1. C'est trivial pour $n = 0$. Si vrai pour $n - 1 \geq 0$ alors la récurrence s'étend :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= 2f_{n-1}(x) - xf_{n-1}^2(x) \\
&= 2[\frac{1}{x}(1 - (1-x)^{2^{n-1}})] - x[\frac{1}{x}(1 - (1-x)^{2^{n-1}})]^2 \\
&= \frac{1}{x}(2 - 2(1-x)^{2^{n-1}} - 1 + 2(1-x)^{2^{n-1}} - (1-x)^{2^n}) \\
&= \frac{1}{x}(1 - (1-x)^{2^n}).
\end{aligned}$$

C.2. Puisque $f_n(2) = 0$ pour tout n, on a donc $\lim_{n\to\infty} f_n(2) = 0$. Si $x \in]0, 2[$, ou si $|1 - x| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty}(1-x)^{2^n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1/x$, d'où la convergence simple vers la fonction f définie sur $]0, 2]$ par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 2$ et $f(2) = 0$. L'étude des variations de la fonction g_n définie sur $]0, 2]$ par $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ montre que g_n décroit sur $]0, 1]$ de $+\infty$ à 0 croit sur $[1, 2[$ de 0 à $1/2$, et satisfait $g_n(2) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
m_n = \sup_{x\in[c,1]} |f(x) - f_n(x)| &= g_n(c) = \frac{1}{c}(1-c)^{2^n} \to_{n\to\infty} = 0 \\
\sup_{x\in[1,2-c]} |f(x) - f_n(x)| &= g_n(1-c) = \frac{1}{1-c}c^{2^n} \to_{n\to\infty} = 0 \\
\sup_{x\in]0,1]} |f(x) - f_n(x)| &= \infty \\
\sup_{x\in[1,2]} |f(x) - f_n(x)| &= 1/2,
\end{aligned}$$

d'où les différents résultats. On peut remarquer que les fonctions f_n étant continues sur $]0, 2]$ et convergeant vers la fonction f discontinue en 2, il ne pouvait y avoir convergence uniforme sur un intervalle contenant 2, par le théorème du cours qui dit que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Invoquer ce théorème donnait donc une autre démonstration de la non convergence uniforme sur $[1, 2]$.

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3.
Partiel d'algèbre linéaire du mardi 12 novembre 2002

Durée : 2 heures. Aucun document. Les calculatrices UPS sont autorisées.
Affichage des résultats le 21 novembre à 16 heures.

Question de cours : Enoncer le théorème de Cayley Hamilton.

Exercice A. On note $\alpha = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ et $\beta = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$ les racines du polynôme X^2+X-1. On rappelle que I_k est la matrice identité d'ordre k. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer A^2 ainsi que trace (A) et trace (A^2).
2. Calculer A^2+A-I_5-J, $(A-2I_5)J$ et en déduire que $P(X)=(X-2)(X^2+X-1)$ est un polynôme annulateur de A. Pourquoi ce résultat entraine-t-il que A, en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$, admet une base de diagonalisation ? Pourquoi existe il une matrice inversible P et 3 entiers (n_2, n_α, n_β) positifs ou nuls tels que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(2I_{n_2}, \alpha I_{n_\alpha}, \beta I_{n_\beta})$?
3. Montrer que (n_2, n_α, n_β) satisfont au système linéaire

$$n_2+n_\alpha+n_\beta = 5, \quad 2n_2+\alpha n_\alpha+\beta n_\beta = \mathrm{trace}\,(A), \quad 4n_2+\alpha^2 n_\alpha+\beta^2 n_\beta = \mathrm{trace}\,(A^2)$$

(Méthode : comparer trace (D) et trace (A) et comparer trace (D^2) et trace (A^2)). En déduire que $(n_2, n_\alpha, n_\beta) = (1,2,2)$ (Rappel : $\alpha^2 = -\alpha+1$ et $\beta^2 = -\beta+1$.) En déduire les polynômes minimal et caractéristique de A.

Exercice B. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré ≤ 4. Soit $P^{(k)}$ le k ième polynôme dérivé de P. Pour $P, Q \in E$, soit $B(P,Q)$ le nouveau polynôme défini par $B(P,Q)(X) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k P^{(k)}(X) Q^{(4-k)}(X)$

1. Calculer $B(P,Q)$ dans les deux cas suivants : $P(X)=Q(X)=X$ et $P(X)=Q(X)=X^4-1$.
2. Soit $P, Q \in E$. Quelle est la dérivée du polynôme $B(P,Q)$? En déduire que $B(P,Q)$ est un polynôme constant, c'est à dire que B est une forme de $E \times E$. Montrer que cette forme est bilinéaire et symétrique.
3. Rappeler quand est ce qu'une forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire. Est ce que B définit un produit scalaire sur E ?

Deug 2 ème année, Université Paul Sabatier UF3.
Corrigé du partiel d'algèbre linéaire du mardi 12 novembre 2002

A1 : Par calcul $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, trace $(A)=0$, trace $(A^2)=10$.

A2 : Par calcul $A^2+A-I_5-J=(A-2I_5)J=0$. Donc comme $J=A^2+A-I_5$ alors $0=(A-2I_5)J=(A-2I_5)(A^2+A-I_5)$ ce qui montre que $P(X)=(X-2)(X^2+X-1)$ est dans l'idéal annulateur de A. Dans $\mathbb{R}$, P est scindé et ses racines sont simples. Comme par définition du polynôme minimal m_A celui ci divise tout polynôme annulateur on a que m_A divise P. Donc m_A est aussi scindé et a des racines simples. D'après le cours, (Chap 1, Prop. 5.1) cela entraine que A admet une base de diagonalisation et que son spectre Λ est contenu dans l'ensemble $\{2,\alpha,\beta\}$ des racines de P. Soit n_λ la multiplicité de la valeur propre $\lambda\in\Lambda$, soit E_λ l'espace propre correspondant, et convenons $n_\lambda=0$ et $E_\lambda=\{0\}$ si λ n'est pas une valeur propre. Comme A est diagonalisable, $\dim E_\lambda=n_\lambda$. Si (n_2,n_α,n_β) est ainsi défini, soit $D=\mathrm{diag}(2I_{n_2},\alpha I_{n_\alpha},\beta I_{n_\beta})$. Soit alors f_2,f_α,f_β des bases respectives pour E_2,E_α,E_β, soit f leur union, soit e la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et soit

$$P=[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}]^e_f$$

la matrice de changement de base de e à f. Alors on a $A=PDP^{-1}$.

A3 : On a $A^2=PDP^{-1}PDP^{-1}=PD^2P^{-1}$. D'après le cours $\mathrm{trace}\,MN=\mathrm{trace}\,NM$. Donc $0=\mathrm{trace}\,A=\mathrm{trace}\,DP^{-1}P=\mathrm{trace}\,D=2n_2+\alpha n_\alpha+\beta n_\beta$ et $10=\mathrm{trace}\,A^2=\mathrm{trace}\,D^2P^{-1}P=\mathrm{trace}\,D=4n_2+\alpha^2n_\alpha+\beta^2n_\beta$. Enfin puisque A est diagonalisable la somme des dimensions des espaces propres est égale à 5. D'où le système linéaire. C'est un système de Cramer, en effet son déterminant est

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1\\2&\alpha&\beta\\4&\alpha^2&\beta^2\end{bmatrix}=4(\alpha-\beta)=4\sqrt{5}\neq 0.$$

Sa solution est unique. Vérifions que c'est $(1,2,2)$. C'est clair pour la première. Pour la 2 ème on utilise $\alpha+\beta=-1$ et pour la 3 ème aussi, avec $\alpha^2=-\alpha+1$. Donc $\dim E_2=1,\dim E_\alpha=\dim E_\beta=2$. Toutes ces dimensions sont positives donc d'après le cours $m_A=P$. Le polynôme caractéristique P_A est $(X-2)(X^2+X-1)^2$.

NB : le contexte de cet exercice peut être trouvé dans l'exercice 5.7 du Chap. 1 du cours.

B1 : Puisque

$$B(P,Q)=PQ^{(4)}-P'Q'''+P''Q''-P'''Q'+P^{(4)}Q \quad (*)$$

on voit que $B(P,P)=2PP^{(4)}-2P'P'''+(P'')^2$. Si $P(X)$ on obtient $B(P,P)=0$, si $P(X)=X^4-1$ on obtient $B(P,P)=-48$.

B2 : En calculant à partir de (*) on trouve $B(P,Q)'=P^{(5)}Q+PP^{(5)}$ qui est nul car les polynômes sont de degré ≤ 4. Donc $B(P,Q)$ est constant. On voit immédiatement à partir de (*) que $B(P,Q)=B(Q,P)$: c'est dire que la forme est symétrique. Enfin si P,P_1,Q sont dans E et si λ et λ_1 sont des réels, (*) montre que $B(\lambda P+\lambda_1P_1,Q)=\lambda B(P,Q)+\lambda_1 B(P_1,Q)$ ce qui est dire que $P\mapsto B(P,Q)$ est linéaire pour tout Q fixé. A cause de la symétrie on en déduit que $Q\mapsto B(P,Q)$ est linéaire pour tout P fixé. Donc B est une forme bilinéaire symétrique.

B3 : B serait un produit scalaire si on avait $B(P,P)>0$ pour tout P qui n'est pas le polynôme nul. Les exemples du 1) montrent tous deux que c'est faux.

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ANALYSE de Janvier 2003.

Durée 2h. Aucun document. Seules les calculatrices UPS sont autorisées. Affichage des résultats le Mardi 4 février à 16 h.

Question de cours. Donner les axiomes d'une norme dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Donner une définition des fonctions continues réelles sur E. A l'aide de ces axiomes et de cette définition, montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E.

Exercice A

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} x^k$ et soit $f(x)$ sa somme. Calculer R et dire si $f(R)$ existe et est finie. Même question avec $f(-R)$.
2. Montrer que la série précédente ne converge pas normalement dans $[-1, 0]$. Montrer qu'elle converge uniformément dans $[-1, 0]$ (Méthode : utiliser le point du cours suivant, qu'on ne demande pas de redémontrer : si (u_k) est une suite qui décroit vers 0, alors la somme r_n de la série $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k$ satisfait $|r_n| \leq u_n$). Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$.
3. On pose $g(x) = (1 - x)f(x)$ pour $-1 \leq x < 1$. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ le développement en série entière de g au voisinage de 0 et soit R_c son rayon de convergence. Calculer c_0, c_1 et c_n pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge et a pour somme 0. Montrer que $c_n \sim -\frac{1}{2n^{3/2}}$ si $n \to \infty$ et en déduire R_c.
4. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et déduire du 3 la limite de $(1 - x)f(x)$ si $x \to 1$ par valeurs inférieures.

Exercice B

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \cos(kx)\, dx$ pour k entier ≥ 0.
2. On considère la fonction f de période 2π définie par $f(x) = |\sin \frac{x}{2}|$ pour tout x réel. Tracer son graphe dans l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques. Montrer que sa série de Fourier converge normalement et donner sa somme en justifiant votre réponse.
3. En déduire les sommes des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{kx}{2}}{4k^2 - 1}$$

(Méthodes : $x = 0$, Parseval et $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$).

Barême indicatif : QC=3 ; A1=2, A2=3, A3=3, A4=2 ; B1=1, B2=3, B3=3.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'analyse de Janvier 2003.

QC. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Une norme $x \mapsto \|x\|$ sur E est une application de E dans $[0, \infty[$ telle que

- Pour tous $x, y \in E$ on $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- Pour tout λ réel et tout x de E on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- Si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$.

Une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ est dite continue sur E si pour tout $x \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in E$ satisfaisant $\|y - x\| \leq r$ alors $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$. Or l' axiome 1 des normes appliqué au couple $(y, x-y)$ entraine $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ et symétriquement $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. L'axiome 2 appliqué à $\lambda = -1$ et à $y - x$ entraine $\|x - y\| = \|y - x\|$ et donc $-\|y - x\| \leq \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. En prenant $r = \epsilon$ on voit que $x \mapsto \|x\|$ est continue.

A1. Appliquons le critère de D'Alembert à $u_k = |x|^k / k^{1/2}$. On obtient que $\lim_{k\to\infty} u_{k+1}/u_k = |x|$. La série converge donc absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. C'est dire que $R = 1$. Comme la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}$ diverge (car $1/2 \leq 1$) et est à termes positifs, $f(R) = \infty$ et n'est pas finie. Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2}$ est alternée et comme la valeur absolue $k^{-1/2}$ de son terme général décroit vers 0, on est dans les conditions d'application du théorème des séries alternées et cette série converge : $f(R)$ existe et est finie.

A2. Soit

$$M_k = \sup_{x \in [-1,0]} |x|^k / k^{1/2} = k^{-1/2}.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ diverge comme vu ci dessus et il n'y a pas convergence normale. Cependant, notant par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k k^{-1/2}$ et observant que pour $x \in [-1, 0]$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} x^k k^{-1/2}$ satisfait au critère des séries alternées, le résultat rappelé du cours fournit pour tout $x \in [-1, 0]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |x|^{n+1} (n+1)^{-1/2} \leq m_n = (n+1)^{-1/2} \to_{n\to\infty} 0.$$

Comme le polynôme f_n est continu, sa limite uniforme f sur $[-1, 0]$ est continue. De plus f est continue sur $]-1, 1[$ comme l'est toute somme de série entière dans son intervalle *ouvert* de convergence (cours). Donc f est continue sur $[-1, 1[$.

A3. Appliquons le théorème sur le produit de Cauchy pour les séries entières aux deux suites (a_k) et (b_k) définies par $a_0 = 1,\ a_1 = -1$ et $a_k = 0$ si $k > 1$, et $b_0 = 0$ et $b_k = k^{-1/2}$ pour $k > 0$. On obtient $c_0 = 0,\ c_1 = 1$ et, pour $n > 1$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = b_n - b_{n-1} = n^{-1/2} - (n-1)^{-1/2}$$

Il est clair qu'on a par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = n^{-1/2} \to_{n\to\infty} 0.$$

Enfin, en multipliant haut et bas par une quantité conjuguée

$$c_n = \frac{(n-1)^{1/2} - n^{1/2}}{(n-1)^{1/2} n^{1/2}} \times \frac{(n-1)^{1/2} + n^{1/2}}{(n-1)^{1/2} + n^{1/2}} = \frac{-1}{((n-1)^{1/2} + n^{1/2})(n-1)^{1/2} n^{1/2}} \sim \frac{-1}{2n^{3/2}}.$$

Le critère de D'Alembert appliqué à $u_n = |c_n x^n|$ donne $\lim_n u_{n+1}/u_n = |x| \lim_n (n+1)^{-3/2} n^{3/2} = |x|$, ce qui montre que $R_c = 1$.

A4. Comme $|c_n| \sim An^{-3/2}$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ converge par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs et par le critére de Riemann, applicable ici car $3/2 > 1$. Comme $M_k = \sup_{x\in[-1,1]} |c_k x^k| = c_k$ la convergence normale est acquise. Comme les sommes partielles de cette série sont continues (car polynomiales) la somme $C(x)$ de cette série sur $[-1, 1]$ est continue. On savait d'autre part que $C(x) = (1-x)f(x)$ si $x \in [-1, 1[$ et que $C(1) = 0$. Comme C est continue en 1 on en déduit que $(1-x)f(x)$ tend vers 0 si x tend vers 1 par valeurs inférieures.

B1. D'après la classe de première $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(b+a) - \sin(b-a))$. Appliquant cette formule à $a = x/2$ et $b = kx$ on obtient que l'intégrale I_k est $4/(1-4k^2)$ pour k entier ≥ 0.

B2. Graphe : 3 jolis festons. Coefficients de Fourier $a_0(f) = \frac{I_0}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ et pour $k > 0$ $a_k(f) = \frac{I_k}{\pi} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$. Comme f est paire, on a $b_k(f) = 0$. La série de Fourier de f est donc

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(kx)}{\pi(1-4k^2)}.$$

Or pour $k \geq 1$ on a

$$M_k = \sup_x \left| \frac{4\cos(kx)}{\pi(1-4k^2)} \right| = \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \sim Ak^{-2}.$$

D'après le critère de Riemann (applicable car 2>1) la série $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge et la série de Fourier de f converge normalement. Finalement, f est $C_1 M(2\pi)$ car f est continue ($\sin x/2$ est continue, $x \mapsto |x|$ aussi et la composée de deux fonctions continues est continue.) Ensuite si $g(x) = f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$ pour $0 < x < 2\pi$ et si on prolonge g par 2π périodicité, on constate que $g(0^+) = 1/2$ et $g(2\pi^-) = -1/2$ existent et sont finies. Donc f' est bien la restriction d'une fonction continue par morceaux. On est bien dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet et comme f est continue, f est égale à la somme de sa série de Fourier.

B3. Puisque pour tout x on a

$$|\sin\frac{x}{2}| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(kx)}{\pi(1-4k^2)},$$

faisons $x = 0$. On obtient $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 1/2$. Rappelons ensuite l'égalité de Parseval, valable pour tout f continue par morceaux

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2).$$

Pour l'appliquer ici il faut calculer $\int_0^{2\pi} |\sin\frac{x}{2}|^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \pi$. On obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Quant à la dernière somme, en remplacant $\sin^2 \frac{kx}{2}$ par $\frac{1}{2}(1-\cos kx)$, et en utilisant la somme de la série de Fourier et le premier résultat de ce B3 on arrive à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{kx}{2}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4}|\sin \frac{x}{2}|.$$

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ALGEBRE LINEAIRE de Janvier 2003.
Durée 2h. Aucun document. Seules les calculatrices UPS sont autorisées. Affichage des résultats le Mardi 4 février à 16 h.

Question de cours. Qu'appelle-t-on endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) d'un espace euclidien ? Montrer qu'un tel endomorphisme ne peut avoir d'autres valeurs propres que ± 1, et qu'il est de déterminant ± 1.

Exercice A. Soit A une matrice (n, n) symétrique réelle telle que $A^3 = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice B. Soit a et b linéairement indépendants et de norme 1 dans le plan euclidien E et soit $f \in L(E)$ défini par

$$f(x) = \langle x, a \rangle a + \langle x, b \rangle b.$$

1. Montrer que $f = f^*$ et que f est défini positif.
2. Calculer en fonction de $\langle a, b \rangle$ les valeurs propres de f et trouver en fonction de a et b une base de diagonalisation de f.

Exercice C. Soit E un espace euclidien de dimension 3, $e = e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E et $u \in L(E)$ tel que $[u]_e^e = M$ soit

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que u a trois valeurs propres distinctes $-1, \alpha, \beta$.
2. Soit v_α et v_β des vecteurs propres de u associés à α et β respectivement. Montrer que $\langle u(v_\alpha), u(v_\beta) \rangle < \|v_\alpha\| \|v_\beta\|$ (notez l'inégalité stricte).
3. Soit $\mathcal{C}_j = u(e_j)$, $j = 1, 2, 3$. Montrer que $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ est une base de E. Si $f = (f_1, f_2, f_3)$ est la base orthonormale de Schmidt associée à $\mathcal{C}$, exprimer les vecteurs de f en fonction des vecteurs de e.

Exercice D. Soit la matrice complexe

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer à l'aide du cours que A est diagonalisable et à valeurs propres réelles.
2. Trouver une matrice P de $\mathbf{SU}(2)$ telle que $P^* A P$ soit diagonale.

Exercice E. Soit a un réel et la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$q(x, y) = (1 + a)x^2 + 2xy + y^2.$$

Discuter la signature de q suivant les valeurs de a.

Barême indicatif : QC=3 ; A=2 ; B1=2, B2=2 ; C1=1, C2=2, C3=3 ; D1=1, D2=3 ; E=2.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ALGEBRE LINEAIRE de Janvier 2003.

Question de cours – On dit qu'un endomorphisme f d'un espace euclidien E est un endomorphisme orthogonal de E s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

a) f est inversible et $f^{-1} = f^*$,

b) $\forall x, y \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}$. On a $\|f(x)\| = |\lambda| \, \|x\| = \|x\|$ et donc $|\lambda| = 1$ puis $\lambda \in \{-1, 1\}$.
On a $f \circ f^* = \mathrm{id}_E$ et donc $\det(f) \det(f^*) = 1$ et comme $\det(f) = \det(f^*)$, on a $(\det f)^2 = 1$ et donc $\det f \in \{-1, 1\}$.

Exercice A – Puisque A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable (on n' aura pas à utiliser que A diagonalise dans le groupe orthogonal) et donc il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$. Or, $(P^{-1}AP)^3 = P^{-1}A^3P$ et comme $A^3 = I_n$, on a $D^3 = I_n$ et donc, si λ un coefficient diagonal de D, on a $\lambda^3 = 1$. Comme λ est réel, on a $\lambda = 1$. Ainsi, $D = I_n$ et par suite, $P^{-1}AP = I_n$ en sorte que $A = PP^{-1} = I_n$.

Exercice B – **1°)** Pour montrer que f est symétrique, il suffit de montrer que

$$\forall x, y \in E, \; \langle f(x), y \rangle \; = \; \langle x, f(y) \rangle$$

Or, par définition de f et d'après les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\langle f(x), y \rangle \; = \; \langle \, \langle x, a \rangle \, a + \, \langle x, b \rangle \, b, y \rangle \; = \; \langle x, a \rangle \; \langle a, y \rangle \; + \; \langle x, b \rangle \; \langle b, y \rangle \, .$$

On en déduit (permuter x et y ci-dessus) que $\langle f(y), x \rangle \; = \; \langle y, a \rangle \; \langle a, x \rangle \; + \; \langle y, b \rangle \; \langle b, x \rangle$ et on constate que $\langle f(x), y \rangle \; = \; \langle f(y), x \rangle \; = \; \langle x, f(y) \rangle \, .$
Pour montrer que f est défini positif, il suffit de montrer que

$$\forall x \in E, \; \langle x, f(x) \rangle \; \geq 0 \text{ et } \; \langle x, f(x) \rangle \; = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

Or, le résultat ci-dessus montre que $\langle x, f(x) \rangle \; = \; \langle x, a \rangle^{\,2} + \langle x, b \rangle^{\,2} \geq 0$ et donc que si $\langle x, f(x) \rangle \; = 0$ alors, $\langle x, a \rangle \; = \; \langle x, b \rangle \; = 0$ i.e. x est orthogonal à a et à b et comme (a, b) est une base du plan E, x est orthogonal à tout vecteur de E et donc $x = 0_E$.
2°) $B = (a, b)$ est une base de E et $f(a) = \|a\|^2 a + \; \langle a, b \rangle \, b = a + \; \langle a, b \rangle \, b, \; f(b) = \; \langle a, b \rangle \, a + b$ (on a utilisé que a et b sont unitaires). La matrice de f dans B est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & 1 \end{bmatrix}.$$

Avec le polynôme caractéristique de M on trouve que $1 \pm \; \langle a, b \rangle$ sont les valeurs propres de f et que $a \pm b \neq 0_E$ sont vecteur propres associés. Ainsi, une base de diagonalisation de f est $(a + b, a - b)$. Si $\langle a, b \rangle \; = 0$ alors f est l'identité et tout vecteur non nul est vecteur propre.

Exercice C – **1°)** Le polynôme caractéristique de M est $P_M = -(X + 1)(X^2 - 4X + 1)$. Le polynôme $X^2 - 4X + 1$ admet deux racines réelles distinctes α et β positives ($\Delta = 16 - 4 > 0$,

$\alpha+\beta = 4 > 0$ et $\alpha\beta = 1 > 0$). Donc M admet trois valeurs propres réelles distinctes -1, α et β.

2°) Les vecteurs v_α et v_β sont des vecteurs propres, donc $u(v_\alpha) = \alpha v_\alpha$ et $u(v_\beta) = \beta v_\beta$ et comme $\alpha\beta = 1$, on a

$$\langle u(v_\alpha), u(v_\beta)\rangle = \langle \alpha v_\alpha, \beta v_\beta\rangle = \alpha\beta \langle v_\alpha, v_\beta\rangle = \langle v_\alpha, v_\beta\rangle .$$

Enfin, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle \le \|v_\alpha\|\|v_\beta\|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs v_α et v_β sont colinéaires ce qui est exclu puisque v_α et v_β sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. L'inégalité demandée est bien prouvée.

3°) Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une base de E si et seulement si u est bijectif ce qui est le cas puisque $\det(u) = (-1)\alpha\beta = -1 \neq 0$.

Construisons une orthogonalisée (v_1, v_2, v_3) de $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$:

$v_1 = u(e_1) = -e_1$,

$v_2 = u(e_2) - \frac{\langle u(e_2), v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u(e_2) = 2e_2 - e_3$,

$v_3 = u(e_3) - \frac{\langle u(e_3), v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u(e_3), v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = -3e_2 + 2e_3 - \frac{-8}{5}(2e_2 - e_3) = \frac{1}{5}(e_2 + 2e_3)$.

On en déduit l'orthonormalisée (f_1, f_2, f_3) de $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$: $f_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = -e_1$, $f_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 - e_3)$ et $f_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2 + 2e_3)$.

Exercice D – **1°)** A est de la forme $\begin{bmatrix} a & \overline{b} \\ b & a \end{bmatrix}$ avec a réel, donc A est hermitienne et donc, d'après le cours, A est diagonalisable et à valeurs propres réelles.

2°) On a $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & e^{-3i\pi/4} \\ e^{3i\pi/4} & 3 \end{bmatrix}$ et par suite, $\operatorname{trace}(A) = 3$ et $\det(A) = \frac{1}{4}(9-1) = 2$. Il en résulte que le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^2 - \operatorname{trace}(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2. On notera E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels propres correspondants. Comme

$$A - I_2 = A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-3i\pi/4} \\ e^{3i\pi/4} & 1 \end{bmatrix},$$

on a $E_1 = \operatorname{vect}(-e^{-3i\pi/4}, 1) = \operatorname{vect}(e_1)$ où $e_1 = (e^{i\pi/4}, 1)$. Comme $(e^{i\pi/4}, -1) \perp (e^{i\pi/4}, 1)$, on a $E_2 = \operatorname{vect}(e_2)$ où $e_2 = (e^{i\pi/4}, -1)$. On a $\|e_1\| = \|e_2\| = \sqrt{2}$ et $(v_1, v_2) = (\frac{1}{\|e_1\|}e_1, \frac{1}{\|e_2\|}e_2)$ est une base orthonormale. On a $\det(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(-e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = -e^{i\pi/4} = e^{5i\pi/4}$. Par suite, $\det(e^{-5i\pi/4}v_1, v_2) = 1$. On a $e^{-5i\pi/4}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{3i\pi/4}(e^{i\pi/4}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, e^{3i\pi/4})$ et donc si $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & e^{i\pi/4} \\ e^{3i\pi/4} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{(2)} & 1+i \\ -1+i & -\sqrt{(2)} \end{bmatrix}$ alors $P \in \mathbf{SU}(2)$ et $P^*AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice E – On applique la méthode de Gauss : $q(x,y) = y^2 + 2yx + (1+a)x^2 = (y+x)^2 + ax^2$. On en déduit que la signature de q est (2,0) si $a > 0$, (1,1) si $a < 0$ et (1,0) si $a = 0$.

Liste des questions de cours d'analyse, Deug deuxième année UF3, sessions de Janvier et Septembre 2003.

1. Soit f une fonction continue complexe sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq \infty$. Que signifie la phrase " l'intégrale impropre $I = \int_a^b f(t)dt$ converge" ? En cas de convergence , qu'appelle-t-on valeur de I? Si de plus $f \geq 0$, donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de I.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Que signifie la phrase " la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge" ? Que signifie la phrase " la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument" ? Enoncer un résultat reliant les deux notions et montrer par un contre exemple qu'elles ne sont pas équivalentes.
3. Enoncer le théorème de convergence des séries alternées.
4. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes et $c = (c_n)_{n\geq 0}$ leur produit de Cauchy. Soit $A(z), B(z), C(z)$ les sommes des trois séries entières correspondantes à l'intérieur de leurs disques de convergence de rayons respectifs R_a, R_b, R_c. Enoncer un théorème reliant R_a, R_b, R_c et reliant A, B, C.
5. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Que signifie la phrase "la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$" ? Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, énoncer une condition suffisante pour que f soit continue sur $[a, b]$.
6. Soit $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Que signifie la phrase "la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[a, b]$" ? Si la série converge pour tout $x \in [a, b]$ énoncer une condition suffisante pour que sa somme S soit continue sur $[a, b]$.
7. Soit $f :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Qu'appelle t-on série de Taylor de f en x_0? Soit α un nombre réel. Précisez cette série de Taylor pour $x_0 = 0$, $\epsilon = 1$ et $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$.
8. Donner l'expression des coefficients de Fourier trigonométriques et exponentiels d'une fonction f de période 2π et continue par morceaux. Enoncer le théorème de Dirichlet en précisant les hypothèses et le sens des symboles utilisés.
9. Enoncer la formule de Parseval sous forme trigonométrique, en précisant des conditions suffisantes de validité.
10. Soit E un espace normé et $A \subset E$. Que signifie la phrase A est ouvert ? Que signifie la phrase A est fermé ? Donner la caractérisation des fermés en termes de suites.
11. Donner les axiomes d'une norme dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Donner une définition des fonctions continues réelles sur E. A l'aide de ces axiomes et de cette définition, montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E.
12. Donner une description des parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Enoncer un théorème relatif aux fonctions continues réelles définies sur un compact.

Liste des questions de cours d'algèbre, Deug deuxième année UF3, sessions de Janvier et Septembre 2003.

1. Définir le polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
2. Soit a un endomorphisme de l'espace de dimension finie E. Que signifie la phrase "a est diagonalisable" ? Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que a soit diagonalisable en termes de son polynôme minimal.
3. Donner une démonstration de l'inégalité de Schwarz dans un espace euclidien (les cas d'égalité ne sont pas demandés).
4. Soit F un sous espace vectoriel de l'espace euclidien E. Définir la projection orthogonale sur F et la symétrie orthogonale par rapport à F.
5. Enoncer le théorème caractérisant la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel dans un espace euclidien.
6. Qu'appelle t-on endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) dans un espace euclidien ? Montrer qu'un tel endomorphisme ne peut avoir d'autres valeurs propres que ± 1, et qu'il est de déterminant ± 1.
7. Soit E un plan euclidien. Décrire sans démonstration les endomorphismes orthogonaux u (ou isométries vectorielles) de E tels que $\det u = -1$. Même question pour $\det u = 1$.
8. Enoncer le théorème spectral pour un espace euclidien. Enoncer le théorème de la décomposition polaire d'un endomorphisme inversible d'un espace euclidien.
9. Si U est une matrice carrée complexe, qu'est ce que la matrice adjointe de U? Qu'est ce qu'une matrice unitaire ? Décrire les éléments de $\mathbf{SU}(2)$ (avec démonstration).
10. Enoncer les axiomes d'un produit scalaire hermitien. Donner une formule de polarisation du produit sacalaire hermitien.
11. Donner une définition et une propriété caractéristique des endomorphismes normaux d'un espace hermitien.
12. Enoncer le théorème d'inertie de Sylvester.

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ALGÈBRE LINÉAIRE du 13 octobre 2003.
Durée 2h. Aucun document. Seules les calculatrices UPS sont autorisées. Affichage des résultats le Vendredi 25 octobre à 16 h.

Question de cours. Si U est une matrice carrée complexe, qu'est ce que la matrice adjointe de U? Qu'est ce qu'une matrice unitaire ? Décrire les éléments de $\mathbf{SU}(2)$ (avec démonstration).

Exercice A. Soit A une matrice réelle quelconque à deux lignes et trois colonnes. On note I_n la matrice identité d'ordre n et on considère la matrice carrée d'ordre 5 réelle écrite par blocs $M = \begin{bmatrix} -8\,I_2 & A \\ 0 & 13\,I_3 \end{bmatrix}$. Montrer qu'il existe deux matrices carrées P et D réelles d'ordre 5 telles que P soit inversible, D soit diagonale et $M = PDP^{-1}$, et préciser D (méthode : polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont M est matrice représentative dans la base canonique).

Exercice B. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère le plan vectoriel

$$F = \{(x, y, z);\ 6x + 3y + 2z = 0\}.$$

Donner une base orthonormale de $F^{\perp}$. Calculer le projeté orthogonal du vecteur $\vec{v} = (7, 14, -\frac{35}{2})$ sur $F^{\perp}$, puis en déduire le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur F.

Exercice C. Soient a et b deux endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E de dimension q, tels que a et $c = b - a$ soient dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des endomorphismes symétriques définis positifs de E.

1. Montrer que b est dans $\mathcal{P}$.
2. On note par r l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $r^2 = a^{-1}$ et on note $u = rbr$. Montrer que $rcr = u - \mathrm{id}_E$ et que $a^{-1} - b^{-1} = r(\mathrm{id}_E - u^{-1})r$.
3. Montrer que $u - \mathrm{id}_E$ et u sont dans $\mathcal{P}$.
4. Soit e une bon de diagonalisation de u et soit $[u]_e^e = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$. Montrer que $\lambda_k > 1$ pour tout $k = 1, \ldots, q$. Calculer $[\mathrm{id}_E - u^{-1}]_e^e$ en fonction des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ et en déduire que $\mathrm{id}_E - u^{-1}$ est dans $\mathcal{P}$. En déduire que $a^{-1} - b^{-1}$ est dans $\mathcal{P}$.

Exercice D. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on considère l'endomorphisme symétrique a dont la matrice représentative dans la base canonique $e = (e_1, e_2)$ est $A = \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$. Trouver une base orthonormale $f = (f_1, f_2)$ telle que la matrice représentative de a dans cette base soit diagonale (on précisera donc les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base e). En déduire une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D telles que $A = UDU^{-1}$.

Barême indicatif : QC=4 ; A=3 ; B=3 ; C=5 ; D=5.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ALGÈBRE LINÉAIRE du 13 octobre 2003.

QC. Voir cours polycopié.

A. Il est clair que le polynôme caractéristique de M est $(X+8)^2(X-13)^3$. Puisque on demande de montrer que M est diagonalisable, c'est équivalent d'après le cours à montrer que le polynôme $Q(X) = (X+8)(X-13)$ est un polynôme annulateur de M. Or

$$M + 8I_5 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 21\,I_3 \end{bmatrix}, \quad M - 13I_5 = \begin{bmatrix} -21\,I_2 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc M est bien diagonalisable car

$$Q(M) = (M+8I_5)(M-13I_5) = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 21\,I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21\,I_2 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice D est calculée avec les valeurs propres et leurs multiplicités et est par exemple $\begin{bmatrix} -8\,I_2 & 0 \\ 0 & 13\,I_3 \end{bmatrix}$. On peut aussi vérifier que $P = \begin{bmatrix} I_2 & A/21 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$ convient et que $P^{-1} = \begin{bmatrix} I_2 & -A/21 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$.

B. Introduisons le vecteur $\vec{n} = (6,3,2) \in \mathbb{R}^3$. Alors F est l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = (x,y,z)$ tels que $\langle \vec{X}, \vec{n} \rangle = 0$, donc $F^{\perp}$ est de dimension 1 et $\vec{n}$ en donne une base. Elle n'est pas orthonormale, mais comme $\|\vec{n}\|^2 = 36 + 9 + 4 = 49 = 7^2$ le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{7}\vec{n} = (\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ donne une base orthonormale de $F^{\perp}$. La projection de $\vec{v}$ sur $F^{\perp}$ est donc

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} = (7 \times \frac{6}{7} + 14 \times \frac{3}{7} - 17,5 \times \frac{2}{7})\vec{u} = 7\vec{u} = (6,3,2)$$

La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur F est donc

$$\vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} = (7, 14, -\frac{35}{2}) - (6,3,2) = (1, 11, -\frac{39}{2}).$$

C1. Dire que a et c sont dans $\mathcal{P}$ est dire que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\langle x, a(x) \rangle > 0$ et $\langle x, c(x) \rangle > 0$. On a bien $b \in \mathcal{P}$ car pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ on a

$$\langle x, b(x) \rangle = \langle x, (a+c)(x) \rangle = \langle x, a(x) \rangle + \langle x, c(x) \rangle > 0.$$

C2. En se placant dans une bon de diagonalisation de a on voit que $r = a^{-1/2}$ et a commutent et que $a^{-1/2}aa^{-1/2} = \mathrm{id}_E$. On a $rcr = r(b-a)r = rbr - rar = u - a^{-1/2}aa^{-1/2} = u - \mathrm{id}_E$ et $a^{-1} - b^{-1} = r^2 - (r^{-1}u^{-1}r^{-1})^{-1} = r^2 - ru^{-1}r = r(\mathrm{id}_E - u^{-1})r$.

C3. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors, en utilisant le fait que $r^* = r$ et en posant $y = r(x)$ on a

$$\langle x, (u - \mathrm{id}_E)(x) \rangle = \langle x, rcr(x) \rangle = \langle r(x), c(r(x)) \rangle = \langle y, c(y) \rangle.$$

Mais $y \neq 0$, car r est inversible donc de noyau nul, ce qui entraine $r(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Donc, comme $c \in \mathcal{P}$ on a $\langle y, c(y) \rangle > 0$ et donc $u - \mathrm{id}_E \in \mathcal{P}$. On procède de même pour montrer que $u \in \mathcal{P}$ en remplacant c par b. Toutefois, une autre méthode est possible, en observant que $u = (u - \mathrm{id}_E) + \mathrm{id}_E$ est la somme de deux éléments de $\mathcal{P}$ et donc est dans $\mathcal{P}$.

C4. On a donc $[u - \mathrm{id}_E]_e^e = \mathrm{diag}(\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_q - 1)$. On sait d'après le 3 que $u - \mathrm{id}_E \in \mathcal{P}$, et on sait d'après le cours qu'un endomorphisme symétrique est dans $\mathcal{P}$ si et seulement ses valeurs propres sont strictement positives. Donc $\lambda_k - 1 > 0$ pour $k = 1, \ldots, q$. Or

$$[u^{-1}]_e^e = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_q^{-1}), \quad [\mathrm{id}_E - u^{-1}]_e^e = \mathrm{diag}(1 - \lambda_1^{-1}, \ldots, 1 - \lambda_q^{-1}).$$

Comme $\lambda_k - 1 > 0$ on a $1 - \lambda_q^{-1} > 0$ pour $k = 1, \dots, q$, ce qui entraine que l'endomorphisme symétrique $\mathrm{id}_E - u^{-1}$ est dans $\mathcal{P}$ puisque ses valeurs propres sont strictement positives. Finalement, si $x \in E \setminus \{0\}$ et si on pose $y = r(x)(\neq 0$ comme on l'a vu) on a

$$\langle x, (b^{-1} - a^{-1})(x)\rangle = \langle x, r(\mathrm{id}_E - u^{-1})r(x)\rangle = \langle r(x), (\mathrm{id}_E - u^{-1})r(x)\rangle = \langle y, (\mathrm{id}_E - u^{-1})y\rangle.$$

Ce nombre $\langle y, (\mathrm{id}_E - u^{-1})y\rangle$ est > 0 puisque $\mathrm{id}_E - u^{-1} \in \mathcal{P}$. Donc $b^{-1} - a^{-1} \in \mathcal{P}$.
D. Puisque $\det A = 91$ et $\operatorname{trace} A = -20$ le polynôme caractéristique de A est $X^2 + 20X + 91$ et a donc pour racines $-7, -13$. Comme la matrice A est symétrique, elle est représentative d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique qui est diagonalisable dans une bon. L'espace propre E_{-7} est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-10x + 3y = -7x$ et est de base $(1, 1)$. Une base orthonormale de E_{-7} est donc $f_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. De même, l'espace propre E_{-13} est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-10x + 3y = -13x$ et est de base $(1, -1)$. Une base orthonormale de E_{-13} est donc $f_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Comme a est symétrique, ses espaces propres sont orthogonaux (cours) et donc $f = (f_1, f_2)$ est une bon de diagonalisation de a. On a donc $[a]_f^f = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} = D$. De plus $[a]_e^e = [\mathrm{id}]_f^e [a]_f^f [\mathrm{id}]_e^f$ où $U = [\mathrm{id}]_f^e$ est la matrice du changement de l'ancienne base e vers la nouvelle base f. Il suffit pour calculer U d'écrire en colonnes les composantes des vecteurs de f dans la base e. On obtient

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Comme U est la matrice de changement d'une bon vers une autre bon, c'est une matrice orthogonale, cad que

$$U^{-1} = U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

On a bien $A = UDU^{-1}$ ou

$$\begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Deug 2 ième année, UF3. Examen d'ANALYSE du 13 octobre 2003.

Durée 2h. Aucun document. Seules les calculatrices UPS sont autorisées. Affichage des résultats le Vendredi 25 octobre à 16 h.

Question de cours. Soit f une fonction continue complexe sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq \infty$. Que signifie la phrase " l'intégrale impropre $I = \int_a^b f(t)dt$ converge" ? En cas de convergence, qu'appelle-t-on valeur de I? Si de plus $f \geq 0$, donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de I.

Problème A. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ $b = (b_n)_{n\geq 0}$ et $c = (c_n)_{n\geq 0}$ les trois suites de réels définies respectivement par $a_0 = 1$ et $a_n = n-1$ si $n \geq 1$, par $b_0 = 0$ et $b_n = n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)b_k$ si $n \geq 1$, et par $c_n = n$ pour tout $n \geq 0$. Soit $A(z), B(z), C(z)$ les sommes des trois séries entières correspondantes à l'intérieur de leurs disques de convergence de rayons respectifs R_a, R_b, R_c.

1. Donner $C(z), R_c, A(z), R_a$. Méthode : rappeler d'abord les rayons de convergence et les sommes des deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$.
2. Montrer que c est le produit de Cauchy de a et b et en déduire $B(z)$ à l'aide du 1) (On admet sans démonstration que R_b est non nul).
3. En admettant la décomposition en éléments simples complexes

$$\frac{z}{1-2z+2z^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-(1+i)z} - \frac{1}{1-(1-i)z}\right],$$

développer $\frac{z}{1-2z+2z^2}$ en série entière. Pourquoi son rayon de convergence est il $\geq 1/\sqrt{2}$? Calculer b_n pour tout n. Mettre $b_n 2^{-n/2}$ sous la forme la plus simple possible.

Problème B. Soit a un réel non nul. On notera $A = e^{a\pi}$.

1. Soit n un entier ≥ 0. Calculer l' intégrale $I_n = \int_0^{\pi} e^{(a+in)x}dx$ (Rappel : $\frac{d}{dx}e^{zx} = ze^{zx}$pour z complexe). Donner les parties réelle et imaginaire du nombre complexe I_n. En déduire $\int_0^{\pi} e^{ax}\cos(nx)dx$ et $\int_0^{\pi} e^{ax}\sin(nx)dx$.
2. On considère ensuite les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ de période 2π telles que $f(x) = g(x) = e^{ax}$ si $0 < x < \pi$, telles que $f(0) = 1,\ f(\pi) = e^{a\pi},\ g(0) = g(\pi) = 0$, et telles que f soit *paire* et g soit *impaire*. Dessiner les graphes de f et g sur $[-\pi, 3\pi]$ dans le cas particulier $a = 1/2$ (un système d'axes pour chaque graphe. Comme $e^{\pi/2} = 4,105 = 3,06(\pi/2)$, l'unité d'axes 1 cm $= \pi/2$ est recommandée).
3. Rappeler la définition des coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction de période 2π quelconque et calculer $a_n(f)$ et $a_n(g)$ pour $n = 0$ puis pour $n \geq 1$. Calculer ensuite $b_n(f)$ et $b_n(g)$ pour $n \geq 1$. Les séries de Fourier de f et g convergent elles en tout point x vers $f(x)$ et $g(x)$? Convergent elles normalement ?

Barême indicatif : QC=2 ; A1=3, A2=2, A3=4 ; B1=2, B2=1, B3=6.

Deug 2 ième année, UF3. Corrigé de l'examen d'ANALYSE du 13 octobre 2003.

QC. Pour $a \leq X < b$ notons $F(X) = \int_a^X f(x)dx$. Dire que $I = \int_a^b f(t)dt$ converge est dire que $\lim_{X\to b} F(X)$ existe et est finie. La valeur de cette limite est appelée la valeur de I. Si de plus $f \geq 0$ une condition nécessaire et suffisante de convergence de I est que la fonction F soit bornée sur $[a, b[$.

A1. D'après le cours, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1-z}$, et $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$, étant la série dérivée de la première, a même rayon de convergence 1 et pour somme la dérivée $\frac{1}{(1-z)^2}$. Par conséquent pour $|z| < 1$ on a par le th. de la somme de deux séries convergentes

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Ceci montre déjà que $R_c \geq 1$. Pour voir qu'en fait $R_c = 1$ on applique D'Alembert à $u_n = n|z|^n$. Ensuite

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= 1 + (\frac{1}{(1-z)^2} - 1) - \frac{2z}{1-z} = \frac{1-2z+2z^2}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

De même ceci est vrai pour $|z| < 1$ et donc $R_a \geq 1$, mais D'Alembert montre que $R_a = 1$.

A2. On a $c_0 = 0 = a_0b_0$ et pour $n \geq 1$ la définition de b_n entraine $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$. Donc c est le produit de Cauchy de a et b. D'après le cours, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a $C(z) = A(z)B(z)$ et donc $B(z) = \frac{z}{1-2z+2z^2}$.

A3. En utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et en y remplacant z par $(1+i)z$ ou $(1-i)z$ on obtient

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\left((1+i)^n - (1-i)^n\right) z^n.$$

Comme les rayons de convergence respectifs de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}(1+i)^n z^n$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}(1-i)^n z^n$ sont $1/|1+i| = 1/\sqrt{2}$ et $1/|1-i| = 1/\sqrt{2}$ le rayon de convergence R_b est $\geq 1/\sqrt{2}$ par le th. du rayon de convergence de la somme de deux séries entières. On a

$$b_n = \frac{1}{2i}\left((1+i)^n - (1-i)^n\right).$$

Une forme plus simple s'obtient en écrivant

$$2^{-n/2}b_n = \frac{1}{2i}\left((\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n - (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2i}(e^{ni\frac{\pi}{4}} - e^{-ni\frac{\pi}{4}}) = \sin n\frac{\pi}{4}.$$

Sous cette forme $b_n = 2^{n/2}\sin n\frac{\pi}{4}$ on voit clairement que $R_b = 1/\sqrt{2}$ car $2^{-n/2}b_n = \sin n\frac{\pi}{4}$ ne tendant pas vers 0 la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2}b_n$ diverge grossièrement, ce qui empêche $R_b > 1/\sqrt{2}$.

B1. En appliquant à $z = a+in \neq 0$ la formule rappelée, qui montre qu'une primitive de $x \mapsto e^{zx}$ est e^{zx}/z, et avec $e^{in\pi} = (-1)^n$ on a

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{(a+in)x}dx = [\frac{1}{a+in}e^{(a+in)x}]_0^{\pi} = \frac{(-1)^nA - 1}{a+in} = ((-1)^nA - 1)\frac{a-in}{a^2+n^2}.$$

Comme $e^{(a+in)x} = e^{ax}(\cos nx + i\sin nx)$, en prenant parties réelle et imaginaire de I_n on obtient

$$\int_0^\pi e^{ax}\cos(nx)dx = \frac{((-1)^n A - 1)a}{a^2+n^2}, \quad \int_0^\pi e^{ax}\sin(nx)dx = \frac{(1-(-1)^n A)n}{a^2+n^2}.$$

B2. Pour f on obtient une sorte de frise de mains en coupe, pour g des filaments isolés...
B3. En général $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et, pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$. Dans le cas de la fonction f de l'énoncé on obtient grâce au B1 et le fait que f est paire

$$a_0(f) = \frac{A-1}{\pi a},\ a_n(f) = \frac{2a((-1)^n A - 1)}{\pi(a^2+n^2)},\ b_n(f) = 0.$$

De même, pour g, qui est impaire :

$$a_0(g) = 0,\ a_n(g) = 0,\ b_n(g) = \frac{2n(1-(-1)^n A)}{\pi(a^2+n^2)}.$$

Les deux fonctions f et g sont C_1 par morceaux. De plus, f est continue, et g en ses points de discontinuité $k\pi$ (k entier) satisfait $0 = g(k\pi) = \frac{1}{2}(g(k\pi - 0) + g(k\pi + 0))$. On est donc pour f et pour g dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet et leurs séries de Fourier respectives en x convergent vers les sommes $f(x)$ et $g(x)$. Examinons enfin la convergence normale. Soit $m_n(f) = \max_x |a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx|$. Alors

$$m_n(f) = \frac{|((-1)^n A - 1)a|}{\pi(a^2+n^2)} \leq \frac{(A+1)|a|}{\pi(a^2+n^2)} \sim \frac{C}{n^2}.$$

D'après le critère de Riemann appliqué à $\alpha = 2 > 1$ et le théorème de comparaison la série $\sum m_n(f)$ converge et donc la série de Fourier de f converge normalement. Quant à g qui est discontinue, il est impossible que sa série de Fourier converge normalement. En effet, si elle convergeait normalement, alors elle convergerait uniformément (d'après un résultat du cours). Or le terme général $a_n(g)\cos nx + b_n(g)\sin nx$ de la série de Fourier est une fonction continue, et convergence uniforme de la série entraînerait continuité de la somme (résultat du cours). Comme cette somme est $g(x)$ et que g n'est pas continue, on a la contradiction. Une autre méthode consiste à calculer $m_n(g) = \max_x |a_n(g)\cos nx + b_n(g)\sin nx|$. C'est plus pénible, car il faut distinguer le cas $n = 2p$ pair et le cas $n = 2p+1$ impair :

$$m_{2p}(g) = \frac{|A-1|2p}{\pi(a^2+4p^2)} \sim \frac{C}{p},\quad m_{2p+1}(g) = \frac{(A+1)(2p+1)}{\pi(a^2+(2p+1)^2)} \sim \frac{C_1}{p},$$

deux séries divergentes d'après Riemann.