Séries de Fourier

G.Letac*

5 décembre 2002

I Définitions.

Fonctions continues par morceaux. Adoptons la notation suivante : si c est un point de discontinuité d'une fonction f définie sur un intervalle, on note $f(c^+)$ sa limite à droite, c'est à dire
$$f(c^+) = \lim_{h>0, h\to 0} f(c+h). \tag{1.1}$$
On note de même par
$$f(c^-) = \lim_{h<0, h\to 0} f(c+h) \tag{1.2}$$
sa limite à gauche.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes est dite continue par morceaux si

– Pour tout intervalle borné $[a,b]$ la fonction f n'a qu'un nombre fini de discontinuités.

– Si $c \in \mathbb{R}$ est un point de discontinuité de f alors $f(c^+)$ et $f(c^-)$ existent et sont finies.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux forment un espace vectoriel, et même un anneau pour la multiplication ordinaire des fonctions. Notez aussi que la valeur de f aux points de discontinuité n'est pas imposée. Enfin, une fonction continue par morceaux est toujours *bornée sur un intervalle borné.* Cela se voit ainsi : puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur l'intervalle borné $[a,b]$ notons les $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ et convenons $c_0 = a$ et $c_{n+1} = b$. Pour $i = 0, \ldots, n$ notons par f_i la fonction définie sur $[c_i, c_{i+1}]$ par $f_i(c_i) = f(c_i^+)$, $f_i(c_{i+1}) = f(c_{i+1}^-)$ et $f_i(x) = f(x)$ si $c_i < x < c_{i+1}$. Il est clair que f_i est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$ et d'après le théorème de Weierstrass il existe M_i tel que $|f_i(x)| \leq M_i$ si $x \in [c_i, c_{i+1}]$. Donc $|f(x)| \leq M = \max\{M_0, \ldots, M_n, f(c_0), \ldots, f(c_{n+1}\}$ pour tout $x \in [a,b]$ et f est bien bornée sur $[a,b]$.

Fonctions de période T. Soit $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbf{C}$ est dite de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$. L'ensemble des fonctions de période T forme un espace vectoriel, qui est somme directe des deux sous espaces des fonctions de période T respectivement PAIRES et IMPAIRES (en effet si $P(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $I(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ on a $f = P + I$.) L'espace vectoriel des fonctions *de période T et continues par morceaux* est très important et sera noté dans la suite par $CM(T)$. On remarque que $f \in CM(T)$ n'a qu'un nombre fini de points de discontinuités dans $[0, T[$

*Université Paul Sabatier, cours de deug 2 ème année, 2002

Proposition 1.1. Soit $f \in CM(T)$. Alors $a \mapsto \int_a^{a+T} f(x)dx$ est une fonction constante. En d'autres termes, l'intégrale sur un intervalle ayant la longueur de la période ne dépend pas de l'intervalle.

Démonstration. Pour des fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Riemann a un sens et on applique la relation de Chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 + \int_0^T + \int_0^a f(x)dx$$

oà la dernière intégrale a été transformée par le changement de variable $x = x' - T$. D'où

$$\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_0^a = \int_0^T .$$

Séries doubles. Soit $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Une application $k \mapsto c_k$ de $\mathbf{Z}$ dans les complexes est appelée une suite double. On dit que la série double $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k$ *converge* et a pour somme S si

- La série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. converge.
- La série $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}$ converge.
- Si S_+ et S_- sont les sommes des séries précédentes, alors $S = S_+ + S_-$.

Polynômes et séries trigonométriques. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites complexes et soit $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite double. Les fonctions de période 2π suivantes

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

sont appelées des polynômes trigonométriques. On précise parfois de degré n si de plus $|a_n|^2 + |b_n|^2 \neq 0$ ou $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 \neq 0$. L'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ est noté $\mathcal{T}_n$. Remarquons que, par les formules d'Euler, les présentations par fonctions circulaires et par exponentielles complexes coincident si on a

$$a_0 = c_0, \ a_k = c_k + c_{-k}, \ b_k = ic_k - ic_{-k}, \ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \ (k > 0) \qquad (1.3)$$

La forme exponentielle est plus compacte, mais moins bien adaptée au cas des fonctions réelles. On peut constater que si $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = 0$ pour tout x alors $c_k = 0$ pour tout $k = -n, \ldots, n$. En effet, s'il en est ainsi le polynôme P défini par $P(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$ a une infinité de zéros $z = e^{ikx}$ et ses coefficients sont nuls. Par les formules 1.3 il en va de même pour un polynôme trigonométrique de la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. S'il est nul pour tout x alors $a_0 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_n = 0$.

La série $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ est appelée une série trigonométrique, la série double $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$ est appelée une série trigonométrique exponentielle.

Coefficients et série de Fourier d'une fonction. Soit $f \in CM(2\pi)$. On définit les trois suites suivantes $(a_k(f))_{k\geq 0}$, $(b_k(f))_{k\geq 1}$ et $(c_k(f))_{k\in\mathbf{Z}}$ par

$$
\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx && (1.4)\\
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad k>0 && (1.5)\\
b_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad k>0 && (1.6)\\
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad k\in\mathbf{Z} && (1.7)
\end{aligned}
$$

Insistons sur le fait que le coefficient devant l'intégrale de 1.4 est différent des deux suivants, et sur le $-ikx$ dans 1.7. Notons aussi le fait important dans les calculs : $a_k(f)=0$ si f est impaire et $b_k(f)=0$ si f est paire. La série $a_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx))$ est appelée la série de Fourier *trigonométrique* de f, la série double $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)e^{ikx}$ est appelée la série de Fourier *exponentielle* de f. Le polynôme trigonométrique

$$S_n(f)=a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx))=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} \tag{1.8}$$

est appelé somme partielle de la série de Fourier de f. L'égalité se justifie car les relations 1.3 sont vérifiées.

II L'aspect hermitien : Bessel

On munit l'espace vectoriel $CM(2\pi)$ de la forme hermitienne suivante

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)dx \tag{2.9}$$

Puisque les fonctions de $CM(2\pi)$ sont bornées, cette intégrale a du sens. On note $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$ et on a trivialement

$$\|f\|_2\le\|f\|_\infty \tag{2.10}$$

où $\|f\|_\infty=\sup|f(x)|$. Cette forme a toutes les propriétés de positivité et de sesquilinéarité d'un produit scalaire hermitien à l'exception du fait que si $\langle f,f\rangle=0$, c'est à dire si $\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=0$ on ne peut garantir que $f=0$ si f n'est pas continue. En fait f n'est pas nulle seulement aux points de discontinuité de f, qui sont en nombre fini. On contourne l'obstacle en déclarant que deux fonctions f et g de $CM(2\pi)$ sont *équivalentes* si $f-g$ est nul sauf peut être en un nombre fini de points. C'est noté $f\sim g$. . On quotiente $CM(2\pi)$ par $\sim$ et l'espace $CM(2\pi)/\sim$ est préhilbertien complexe. En particulier l'espace des fonctions continues de période 2π est un espace préhilbertien complexe pour le produit scalaire hermitien ci dessus, l'espace $\mathcal{T}_n$ des polynômes trigonométriques de degré $\le n$ est un espace hermitien de dimension $2n+1$. Voici des bases orthogonales remarquables de cet espace :

Théorème 2.1. Pour le produit scalaire hermitien 2.9 l'espace $\mathcal{T}_n$ admet les deux familles suivantes de bases orthonormales

$$e^{-inx}, e^{-i(n-1)x},\dots,e^{-ix},1,e^{ix},\dots,e^{-inx}. \tag{2.11}$$

$$1,\sqrt{2}\cos x,\dots,\sqrt{2}\cos(nx),\sqrt{2}\sin x,\dots,\sqrt{2}\sin(nx). \tag{2.12}$$

Démonstration. C'est un calcul basé sur le fait suivant : si w est complexe, alors la dérivée de la fonction complexe de variable réelle $t \mapsto e^{wt}$ est we^{wt} et donc si $w \neq 0$ sa primitive est $w^{-1}e^{wt}$. Appliquant cela à $w = ik$ on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt &= 0, k \neq 0 \\ &= 1, k = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ceci montre immédiatement que le premier système est une base orthogonale de $\mathcal{T}_n$. Pour le deuxième système, il faut un peu plus de patience, mais c'est facile.

Remarque. Le coefficient exponentiel de Fourier $c_k(f)$ est le produit scalaire de la fonction $x \mapsto e^{ikx}$ et de f, et pour $k > 0$ $\frac{1}{\sqrt{2}}a_k(f)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}b_k(f)$ sont les produits scalaires des fonctions $\sqrt{2}\cos(kx)$ ou $\sqrt{2}\sin(kx)$ avec f.

Corollaire 2.2. La série de Fourier d'un polynôme trigonométrique est égale au polynôme lui même.

Démonstration. C'est clair avec la forme exponentielle du polynôme trigonométrique.

Corollaire 2.3. Si $f \in CM(2\pi)$, la projection orthogonale de f sur $\mathcal{T}_n$ est égale à la somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de f. En particulier

- Pour tout $T \in \mathcal{T}_n$ on a
$$\|f - T\|^2 \geq \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2 \tag{2.14}$$
- (Inégalité de Bessel)
$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{-n}^{n} |c_k(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq \|f\|^2 \tag{2.15}$$
avec égalité si et seulement si f est équivalent à un élément de $\mathcal{T}_n$.

Démonstration. La seule chose à prouver est que $f - S_n(f)$ est orthogonal à $\mathcal{T}_n$. On le vérifie en montrant son orthogonalité à chacun des éléments de la base exponentielle 2.11, ce qui est vite fait à l'aide de la remarque ci dessus. Après cela il suffit d'appliquer le théorème de projection orthogonale du cours d'algèbre linéaire, chapitre 3 (espaces hermitiens).

III Convergence simple : Dirichlet

Proposition 3.1. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) Si $f \in CM(2\pi)$ alors $c_n(f)$ tend vers 0 si n tend vers $\pm\infty$. De plus

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx = 0.$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Bessel 2.15 on a

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

et donc la série à termes positifs $\sum_{k=1}^{\infty}(|c_k|^2+|c_{-k}|^2)$ converge puisque ses sommes partielles sont majorées par $\|f\|_2^2$. Donc son terme général tend vers 0, ce qui entraine le résultat voulu. Par les formules 1.3 on a les deux résultats suivants. Enfin, puisque $\sin(n+\frac{1}{2})x = \sin(\frac{1}{2}x)\cos(nx) + \cos(\frac{1}{2}x)\sin(nx)$, on considère sur $[0, 2\pi[$ les fonctions $f_1(x) = f(x)\cos(\frac{1}{2}x)$ et$f_2(x) = f(x)\sin(\frac{1}{2}x)$ et on les prolonge par périodicité en des éléments f_1 et f_2 de $CM(2\pi)$ (en effet $x \mapsto f(x)\cos(\frac{1}{2}x)$ définissait une fonction de période 4π seulement). Alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx = a_n(f_2) + b_n(f_1)$$

qui tend vers 0 par la première partie appliquée à f_1 et f_2 respectivement.

Proposition 3.2. (*Noyau de Dirichlet*) Soit

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt).$$

Alors $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$ et pour $t \not\equiv 0$ modulo 2π on a

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

De plus, si $f \in CM(2\pi)$ alors

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Démonstration. On s'appuie sur la somme partielle d'une série géométrique : si $r \neq 1$ alors

$$1 + r + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

et on applique cela à $2n$ et à $r = e^{it}$ qui est $\neq 1$ si $t \not\equiv 0$ modulo π. Alors

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{-int}}{2} \times \frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{2(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Pour montrer la fin, on présente différemment l'intégrale $I_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos(kt)dt$ en faisant le changement de variable $t' = t + x$ pour x fixé. On obtient $I_0 = 2a_0(f)$ et pour $k > 0$ on obtient $I_k = a_k(f)\cos x + b_k(f)\sin x$ ce qui conduit en sommant $\frac{1}{2}I_0 + I_1 + \ldots + I_n$ au résultat voulu $S_n(f)(x)$. On pouvait faire la même chose avec la série de Fourier exponentielle plutôt que trigonométrique.

Le résultat suivant est plus difficile que les précédents. Il est très utile et donne une condition suffisante pour qu'une série de Fourier converge en un point donné. Les nombres $f(c^{\pm})$ ont été définis en 1.1 et 1.2.

Théorème 3.3. Soit $f \in CM(2\pi)$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que les dérivées à droite et à gauche en c , c'est à dire les deux limites $f'(c^+)$ et $f'(c^-)$ définies par

$$\begin{aligned} f'(c^+) &= \lim_{h>0, h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(c^+)) \qquad (3.16) \\ f'(c^-) &= \lim_{h<0, h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(c^-)) \end{aligned}$$

existent et sont finies. Alors

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(c) = \frac{1}{2}(f(c^+) + f(c^-)).$$

Démonstration. Multiplions l'égalité suivante obtenue à la Proposition 3.2

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

par $\frac{1}{\pi}f(c^+)$ de chaque coté et intégrons le tout sur $[0,\pi]$. On fait de même avec $\frac{1}{\pi}f(c^-)$ sur $[-\pi,0]$. Puisque $\int_0^\pi \cos(kt)dt = 0$ si $k>0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(c^+) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(c^+)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,\\
\frac{1}{2}f(c^-) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 f(c^-)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\\
S_n(f)(c) - \frac{1}{2}(f(c^+)+f(c^-)) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 \frac{f(c+t)-f(c^-)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt \qquad (3.17)\\
&+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(c+t)-f(c^+)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Introduisons alors la fonction $F_+ \in CM(2\pi)$ par

$$\begin{aligned}
F_+(t) &= \frac{f(c+t)-f(c^+)}{2\sin\frac{t}{2}} & t\in]0,\pi]\\
F_+(0) &= f'(c^+) &\\
F_+(t) &= 0 & t\in]-\pi,0[.
\end{aligned}$$

A cause de l'hypothèse sur la dérivée à droite, F_+ est bien continue par morceaux (Rappel : $\lim_{t\to 0}\frac{2}{t}\sin\frac{t}{2} = 1$).

On est donc en position d'appliquer à F_+ la dernière partie de la Proposition 3.2 et d'en déduire que 3.17 tend vers 0 si n tend vers l'infini. On procède de même pour 3.18 et le théorème est montré.

Pour énoncer un corollaire maniable de ce résultat, nous introduisons une nouvelle définition

Fonctions C_1 par morceaux. Une fonction f complexe sur $\mathbb{R}$ est dite C_1 par morceaux dans les conditions suivantes

- Elle est continue par morceaux.
- Il existe une fonction g continue par morceaux telle qu'en tout point de continuité x de f et de g alors $f'(x)$ existe et égale $g(x)$.

On va noter l'espace des fonctions de période 2π qui sont C_1 par morceaux par $C_1M(2\pi)$. Voici alors le résultat commode promis

Corollaire 3.4. (*Théorème de Dirichlet*) Si $f\in C_1M(2\pi)$ alors pour tout x on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

En particulier, si $f\in C_1M(2\pi)$ et est de plus continue, alors la somme de la série de Fourier de f en x est égale à $f(x)$.

IV Convergence uniforme : Gibbs

Bien entendu, même si $f \in C_1M(2\pi)$ la convergence de la série de Fourier de f n'est pas toujours uniforme : puisque les $S_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques, ils sont donc continus et la convergence uniforme entrainerait la continuité de f. Le physicien britannique Gibbs s'en montrait fort surpris :

Proposition 4.1 (*Phénomène de Gibbs*) Soit $f \in CM(2\pi)$ définie par $f(k\pi) = 0$ pour k entier et par $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ pour $0 < x < 2\pi$. Soit

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

la somme partielle de sa série de Fourier. Alors $\max_x S_n(f)(x) = S_n(f)(\frac{\pi}{n+1})$ et

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(\frac{\pi}{n+1}) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1,857... > f(0^+) = \frac{\pi}{2} = 1,578...$$

Démonstration. Le calcul des coefficients de Fourier se fait facilement en remarquant que f est impaire et par une intégration par parties. On étudie alors les zéros de la dérivée :

$$S_n(f)'(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

calculée à l'aide de la Proposition 3.2 . Pour calculer ces zéros, on rappelle que $\sin a = \sin b$ si et seulement si ou bien $a = b$ ou bien $a + b = \pi$ modulo 2π). L'étude des variations de la fonction montre que le maximum est atteint en $\pi/(n+1)$. Pour calculer la limite de $S_n(f)(\frac{\pi}{n+1})$ on se rappelle que si f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ alors le théorème des sommes de Riemann entraine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Appliquons cela à la fonction $\frac{\sin \pi x}{x}$ en la prolongeant par continuité en 0 par π. On obtient

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(\frac{\pi}{n+1}) = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ensuite l'étude de la fonction $g(t) = \sin t - t + \frac{t^2}{\pi}$ sur $[0, \pi]$ montre sur $]0, \pi[$ que $g(t) > 0$ et que $\frac{\sin t}{t} > 1 - \frac{t}{\pi}$. Donc

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \int_0^{\pi} (1 - \frac{t}{\pi}) dt = \frac{\pi}{2}$$

Le calcul numérique de $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ se fait par `Maple` et la démonstration est complète.

Maintenant, si f est continue et dans $C_1M(2\pi)$, la Proposition 4.2 ci dessous montre qu'on a bien convergence uniforme des sommes partielles vers f. Auparavant, apprivoisons cette notion de fonction continue et C_1 par morceaux.

Proposition 4.2. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe une fonction g continue par morceaux avec la propriété suivante : en tout point de continuité x de g alors $f'(x)$ existe et égale $g(x)$. Dans ces conditions, pour tous $a < b$ on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t)dt. \tag{4.19}$$

Si de plus f est de période 2π alors

$$ka_k(f) = -b_k(g), \quad kb_k(f) = a_k(g), \quad kc_k(f) = -ic_k(g). \tag{4.20}$$

En particulier, $c_0(g) = 0$.

Démonstration. Si $[a, b]$ ne contient pas de point de discontinuité de g, c'est le théorème fondamental du calcul intégral. Si $]a, b[$ ne contient pas de points de discontinuité de g mais si a ou b sont des points de discontinuité de g, on écrit pour $0 < h < (b-a)/2$ que

$$f(b-h) - f(a+h) = \int_{a+h}^{b-h} g(t)dt$$

et on fait tendre h vers 0. La continuité de f entre alors en piste et le membre de gauche tend vers $f(b) - f(a)$. Le membre de droite tend trivialement vers $\int_a^b g(t)dt$, et on a le résultat dans ce cas.

Si $]a, b[$ contient des points de discontinuité de g, notons ceux ci $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ et convenons $c_0 = a$ et $c_{n+1} = b$. Pour $i = 0, \ldots, n$ on a $f(c_{i+1}) - f(c_i) = \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(t)dt$ d'après le début de la démonstration. En sommant ces égalités on a le résultat 4.19.

Pour k entier non nul, appliquons 4.19 à $\frac{1}{2\pi}(g(x) - ikf(x))e^{-ikx}$ plutôt qu'à $g(x)$, et à $\frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}$ plutôt qu'à $f(x)$. Alors

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(x) - ikf(x))e^{-ikx}dx = c_k(g) - ikc_k(f).$$

Les deux autres égalités de 4.20 s'en déduisent par 1.3.

Remarque. La fonction g de la Proposition 4.1 est en général froidement appelée fonction dérivée de f et en conséquence plutôt notée f'. Soit. Mais il faut réaliser que ce n'est pas la dérivée ordinaire aux points de discontinuité de g. L'exemple le plus simple est $f(x) = |x|$. Ce qui joue le rôle de g est ici $g(x) = 1$ pour $x > 0$, $g(x) = -1$ pour $x < 0$ et n'importe quoi pour $g(0)$. Aucun choix de $g(0)$ ne donnera $f'(0)$ qui n'existe pas. Ceci dit, noter $g = f'$ est un abus de langage bien commode. Avec cet abus de langage, les formules 4.20 se lisent

$$ka_k(f) = -b_k(f'), \quad kb_k(f) = a_k(f'), \quad kc_k(f) = -ic_k(f').$$

Théorème 4.3. (*de la convergence uniforme*) Si $f \in C_1M(2\pi)$ et si f est continue alors $m_n = \max|S_n(f)(x) - f(x)| = \|S_n(f) - f\|_\infty$ satisfait $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$.

Démonstration. Nous montrons le résultat en prouvant la convergence normale, c'est à dire en montrant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|$$

converge. Notons par g une fonction continue par morceaux telle qu'en tout point de continuité x de g alors $f'(x)$ existe et égale $g(x)$. On applique alors 4.20 puis l'inégalité de Schwarz pour écrire

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k(f)| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|b_k(g)| \leq (\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2})^{1/2}(\sum_{k=1}^{n}|b_k(g)|^2)^{1/2}.$$

Le membre de droite de l'inégalité est borné en n par l'inégalité de Bessel 2.15 appliquée à g, et par la convergence de la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. On procède de même pour $\sum_{k=1}^{n}|b_k(f)|$ et le théorème est montré.

V Aspect hilbertien : Parseval

Théorème 5.1. Si $f \in CM(2\pi)$ alors $\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_2^2 = 0$.

Démonstration. Nous allons sauter deux aspects fastidieux de la démonstration, correspondant aux deux affirmations suivantes

1. Si $f \in CM(2\pi)$ et si $\epsilon > 0$ il existe g_1 continue de période 2π telle que $\|f - g_1\|_2 \leq \epsilon$ (Méthode : près des points de discontinuité de f, remplacer par une fonction linéaire assez pentue).
2. Si g_1 continue de période 2π et si $\epsilon > 0$ il existe g_2 linéaire par morceaux, continue de période 2π, et telle que $\|g_1 - g_2\|_\infty \leq \epsilon$ (Méthode : appliquer le théorème de Heine sur l'uniforme continuité). Par 2.10 cela entraine $\|g_1 - g_2\|_2 \leq \epsilon$.

On prend donc f, ϵ, g_1, g_2 comme ci dessus, et on applique le théorème de la convergence uniforme 4.3 à g_2 pour garantir l'existence d'un entier $N > 0$ tel que $n \geq N$ entraine $\|S_n(g_2) - g_2\|_\infty \leq \epsilon$. A cause de 2.10 on en déduit $\|S_n(g_2) - g_2\|_2 \leq \epsilon$. En rassemblant cette inégalité avec 1) et 2) on obtient que si $n \geq N$ on a $\|S_n(g_2) - f\|_2 \leq 3\epsilon$, ou $\|S_n(g_2) - f\|_2^2 \leq 9\epsilon^2$. On applique alors 2.14 au polynôme trigonométrique $T = S_n(g_2)$ et on obtient finalement que si $n \geq N$ alors $\|S_n(f) - f\|_2 \leq 3\epsilon$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 5.2. (*Formule de Parseval*) Si f et g sont dans $CM(2\pi)$ alors

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx &= \sum_{-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^2 \\ &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)dx &= \sum_{-\infty}^{\infty}\overline{c_k(f)}c_k(g) \\ &= \overline{a_0(f)}a_0(g) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{a_k(f)}a_k(g) + \overline{b_k(f)}b_k(g)).\end{aligned}$$

Démonstration. On applique 2.14, c'est à dire Pythagore en écrivant $|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2$. D'après le Théorème 5.1 on a donc $\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$. Or d'après le Théorème

2.1 on a

$$\|S_n(f)\|^2 = \sum_{-n}^{n} |c_k(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2,$$

d'où le premier résultat.

Pour avoir le cas général $\langle f, g\rangle$ on utilise l'identité de polarisation des espaces préhilbertiens complexes (voir cours d'algèbre linéaire, Proposition 1.1, chapitre 3) qui permet de retrouver le produit hermitien quand on connait les normes, et on écrit

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^{-m}\|f + i^m g\|^2.$$

Cela conduit à la deuxième formule, car si a et b sont des complexes on a

$$\overline{a}b = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^{-m}|a + i^m b|^2.$$

L'exemple le plus simple et le plus spectaculaire d'application de la formule de Parseval se fait en prenant la fonction f de la Proposition 4.1, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$