ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. LEDOUX

L'algèbre de Lie des gradients itérés d'un générateur markovien — développements de moyennes et entropies

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 28, nº 4 (1995), p. 435-460.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1995_4_28_4_435_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 28, 1995, p. 435 à 460.

L'ALGÈBRE DE LIE DES GRADIENTS ITÉRÉS D'UN GÉNÉRATEUR MARKOVIEN – DÉVELOPPEMENTS DE MOYENNES ET ENTROPIES

PAR M. LEDOUX

ABSTRACT. – We define a natural Lie algebra structure associated to a Markov generator which extends the "carré du champ" operator and its iterated gradients. While the iterated gradients may be used in expansions of the variance of a function of the domain, this more general structure is needed in formal expansions of the entropy of a function.

1. Introduction

Dans un article récent, C. Houdré et A. Kagan [H-K] (*voir* aussi [H-PA]) établissent des inégalités sur la variance gaussienne d'une fonction régulière à l'aide des moments de ses dérivées successives, inégalités qui étendent l'inégalité de trou spectral (ou de Poincaré). Présentées dans un cadre de semigroupe, ces inégalités admettent des démonstrations simples et rapides avec lesquelles nous voudrions introduire notre travail.

Soit μ la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^N$ de densité $(2\pi)^{-N/2}\exp(-|x|^2/2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue; nous désignerons par $\langle f\rangle$ l'intégrale d'une fonction (intégrable) f sur $\mathbb{R}^N$ par rapport à μ, et indifféremment par $\langle f, g\rangle$ ou $\langle fg\rangle$ l'intégrale du produit fg de deux fonctions (éventuellement du produit scalaire de deux fonctions à valeurs vectorielles). Le semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$ d'Hermite ou d'Ornstein-Uhlenbeck par rapport à μ admet la représentation intégrale (noyau de Mehler)

$$(1.1)\qquad P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f\big(\mathrm{e}^{-t}x + (1-\mathrm{e}^{-2t})^{1/2}y\big)\,d\mu(y),\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t\geq 0,$$

pour toute fonction f, disons intégrable par rapport à μ. Son générateur L agit sur toute fonction f de classe C^2 par $\mathrm{L}f(x) = \Delta f(x) - x\cdot\nabla f(x)$, où Δ est le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^N$. En particulier, on dispose de la formule d'intégration par parties $\langle f, -\mathrm{L}g\rangle = \langle \nabla f, \nabla g\rangle$, f, g suffisamment régulières.

Soit alors une fonction régulière f sur $\mathbb{R}^N$ (un polynôme si l'on veut pour commencer); en suivant la méthode de D. Bakry et M. Émery dans leur étude des diffusions hypercontractives ([B-É], [Ba2]), on peut écrire, puisque $P_t f$ tend vers $\langle f\rangle$ lorsque t

tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}\langle f\rangle^2 &= \langle f^2\rangle + \int_0^\infty \frac{d}{dt}\,\langle (P_tf)^2\rangle\,dt\\ &= \langle f^2\rangle + 2\int_0^\infty \langle P_tf, \mathrm{L}P_tf\rangle\,dt\\ &= \langle f^2\rangle - 2\int_0^\infty \langle |\nabla P_tf|^2\rangle\,dt.\end{aligned}$$

Or, d'après la représentation (1.1), $\nabla P_tf = \mathrm{e}^{-t}P_t(\nabla f)$ de sorte que

$$\langle f\rangle^2 = \langle f^2\rangle - 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\langle |P_t(\nabla f)|^2\rangle\,dt.$$

En intégrant par parties en t,

$$2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\langle |P_t(\nabla f)|^2\rangle\,dt = \langle |\nabla f|^2\rangle + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\frac{d}{dt}\,\langle |P_t(\nabla f)|^2\rangle\,dt.$$

Mais par la formule d'intégration par parties pour L, et une nouvelle fois (1.1),

$$\frac{d}{dt}\,\langle |P_t(\nabla f)|^2\rangle = 2\langle P_t(\nabla f), \mathrm{L}P_t(\nabla f)\rangle = -2\mathrm{e}^{-2t}\langle |P_t(\nabla^2 f)|^2\rangle$$

où $\nabla^2 f$ est la matrice des dérivées secondes de f (et $|\nabla^2 f|$ sa norme euclidienne). On démontre ainsi, par une simple itération de la méthode, la proposition suivante (*voir* [H-PA], [H]) qui exprime une sorte de formule de Taylor pour (le carré de) la moyenne de f.

PROPOSITION 1.1. – *Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}^N$, de carré intégrable par rapport à μ ainsi que toutes ses dérivées; alors,*

$$\langle f\rangle^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,\langle |\nabla^k f|^2\rangle - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-2nt}\langle |P_t(\nabla^n f)|^2\rangle\,dt.$$

Compte tenu du signe alterné du dernier terme de cette identité, on déduit immédiatement de la proposition les inégalités de C. Houdré et A. Kagan [H-K] exprimées sur la variance d'une fonction (suffisamment régulière) f: pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\langle |\nabla^k f|^2\rangle \leq \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2 \leq \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\langle |\nabla^k f|^2\rangle. \tag{1.2}$$

Si $n = 1$, l'inégalité de droite est simplement l'inégalité de trou spectral, évidente sur un développement en polynômes d'Hermite (et qu'il convient de faire remonter aux années trente, voire à Hermite lui-même). Les inégalités (1.2) sont d'ailleurs établies à l'aide de ce développement dans [H-K]. Comme il est noté en [H-K], si f est indéfiniment dérivable et si toutes ses dérivées sont de carré intégrables,

$$\langle f\rangle^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,\langle |\nabla^k f|^2\rangle \tag{1.3}$$

si et seulement si $\lim_{k\to\infty} \langle |\nabla^k f|^2\rangle / k! = 0$. C'est en particulier le cas si f est un polynôme, et la formule (1.3) paraît spécialement intéressante si f est de moyenne nulle. En présence d'une identité telle que (1.3), ou seulement de la forme de la proposition, nous parlerons parfois plus loin de développement formel de la moyenne ou de la variance d'une fonction.

Dans la première partie de cet article, nous généraliserons la proposition 1.1 en élaborant la méthode de démonstration dans un cadre abstrait de semigroupe markovien. En particulier, nous obtiendrons des développements formels de moyennes et variances à partir des gradients itérés issus de l'opérateur carré du champ. Ces développements ont un vaste champ d'applications et sont étroitement liés à la suite des valeurs propres du générateur associé. Le corollaire 2.2 étend en particulier les inégalités (1.2) à un cadre très général. Divers exemples seront aussi examinés, comme l'espace à deux points, l'espace de Poisson ou l'espace $[-1, +1]$ pour les mesures ultrasphériques.

Par les travaux de D. Bakry et M. Émery [B-É] sur l'hypercontractivité et les inégalités de Sobolev logarithmiques, la méthode de démonstration précédente est aussi adaptée à des développements de l'entropie d'une fonction. On désigne toujours par μ la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^N$. Pour une fonction strictement positive f sur $\mathbb{R}^N$ suffisamment intégrable par rapport à μ, considérons l'entropie de f (pour μ),

$$E(f) = \langle f \log f\rangle - \langle f\rangle \log\langle f\rangle.$$

Introduisons comme précédemment le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t\geq 0}$; en supposant f suffisamment régulière, et, pour plus de simplicité, comprise entre deux constantes strictement positives, il vient, à l'image de la démonstration de la proposition 1.1,

$$\begin{aligned} 2E(f) &= -2\int_0^\infty \frac{d}{dt}\langle P_t f \log P_t f\rangle\, dt \\ &= 2\int_0^\infty \langle \log P_t f, \mathrm{L} P_t f\rangle\, dt \\ &= 2\int_0^\infty \langle (P_t f)^{-1} |\nabla P_t f|^2\rangle\, dt. \end{aligned}$$

À nouveau, $\nabla P_t f = \mathrm{e}^{-t} P_t(\nabla f)$, et, par une intégration par parties en t,

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty \langle (P_t f)^{-1} |P_t(\nabla f)|^2\rangle\, dt &= \int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-2t} \langle (P_t f)^{-1} |P_t(\nabla f)|^2\rangle\, dt \\ &= \langle f^{-1}|\nabla f|^2\rangle + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t} \frac{d}{dt}\langle (P_t f)^{-1} |P_t(\nabla f)|^2\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Posons $h_t = P_t(\nabla f)/P_t f$; il est aisé de vérifier, grâce à la formule d'intégration par parties pour l'opérateur L, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle (P_t f)^{-1} |P_t(\nabla f)|^2\rangle &= -\langle |h_t|^2, \mathrm{L} P_t f\rangle + 2\langle h_t, \mathrm{L} P_t(\nabla f)\rangle \\ &= 2\langle \nabla h_t, \nabla P_t f\, {}^{\mathrm{t}} h_t\rangle - 2\langle \nabla h_t, \nabla (P_t \nabla f)\rangle \\ &= 2\mathrm{e}^{-t}\langle \nabla h_t, P_t(\nabla f)\, {}^{\mathrm{t}} h_t - P_t(\nabla^2 f)\rangle \\ &= 2\mathrm{e}^{-t}\langle \nabla h_t, P_t f\, h_t {}^{\mathrm{t}} h_t - P_t(\nabla^2 f)\rangle. \end{aligned}$$

Or, $\nabla h_t = \mathrm{e}^{-t}[(P_t f)^{-1} P_t(\nabla^2 f) - h_t{}^{\mathrm{t}} h_t]$ de sorte que

$$\frac{d}{dt}\langle (P_t f)^{-1} |\nabla P_t f|^2 \rangle = -2\mathrm{e}^{-2t}\langle k_t \rangle$$

où $k_t = (P_t f)^{-3} |P_t(\nabla f)\,{}^{\mathrm{t}} P_t(\nabla f) - P_t f P_t(\nabla^2 f)|^2$. Ainsi,

$$2E(f) = \langle f^{-1}|\nabla f|^2\rangle - \int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-4t}\langle k_t\rangle\, dt.$$

En particulier, la positivité de k_t donne lieu à l'inégalité de Sobolev logarithmique (pour μ) $2E(f) \leq \langle f^{-1}|\nabla f|^2\rangle$ et à la connaissance de ses fonctions extrémales (les fonctions exponentielles) (*cf.* [B-É], [L1]).

Par analogie avec les formules sur la moyenne ou la variance, il est alors tentant de recommencer l'opération d'intégration par parties en la variable temporelle. Cependant, les dérivations deviennent à chaque pas de plus en plus lourdes et l'on ne peut guère espérer une conclusion aussi simple que celle de la proposition 1.1. Si l'on pose $u = \log f$,

$$f^{-1}|\nabla f|^2 = f|\nabla u|^2 \quad \text{et} \quad k_0 = f^{-3}\left|\nabla f\,{}^{\mathrm{t}}\nabla f - f\nabla^2 f\right|^2 = f|\nabla^2 u|^2.$$

Cependant, la suite des $f|\nabla^n u|^2$ ne peut représenter à elle seule le développement de l'entropie de f. En poursuivant en effet le développement jusqu'au troisième terme, on voit que

$$2E(f) = \langle f, |\nabla u|^2\rangle - \frac{1}{2!}\langle f, |\nabla^2 u|^2\rangle + \frac{1}{3!}\langle f, |\nabla^3 u|^2 - 2|\nabla^2 u|^3\rangle - \dots.$$

Le terme cubique est quelque peu surprenant. L'un des objectifs premiers de ce travail va être en fait d'essayer d'apporter une réponse "algébrique" à ce phénomène. La solution va nous être fournie par le cadre abstrait et les gradients itérés du générateur, ici celui d'Ornstein-Uhlenbeck.

À titre d'introduction aux paragraphes ultérieurs, décrivons en quelques mots la suite de notre étude, motivée donc par ces développements de l'entropie. Étant donné un générateur markovien L agissant sur une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions dans le domaine de L, on définit l'opérateur bilinéaire symétrique Γ, appelé opérateur carré du champ, par

$$2\Gamma(f,g) = \mathrm{L}(fg) - f\mathrm{L}g - g\mathrm{L}f, \quad f,g \in \mathcal{A}.$$

Se définissent également les gradients itérés successifs Γ_n, $n \geq 1$, par récurrence à partir de la formule précédente et de l'application bilinéaire canonique Γ_0 produit de deux fonctions ($\Gamma_1 = \Gamma$). L'élaboration abstraite de l'exemple gaussien nous permettra, tout d'abord, d'obtenir des développements de moyennes ou variances en termes de la suite de ces gradients itérés. En revanche, les développements formels de l'entropie d'une fonction vont exiger d'élargir le cadre algébrique des gradients itérés pour se situer dans une algèbre de Lie naturellement engendrée par L et Γ. Cette algèbre va permettre ainsi de décrire complètement les développements de l'entropie d'une fonction dans ce cadre (et aussi d'aborder plus confortablement l'exemple gaussien). Plus précisément, la suite des gradients itérés sera remplacée par une suite d'applications multilinéaires symétriques $\widetilde{\Gamma}_n$ définies par récurrence à partir de l'"opérateur" $\mathrm{L} + \Gamma$ et du crochet de Lie $[\mathrm{L}+\Gamma, \widetilde{\Gamma}_{n-1}]$. La propriété de crochet de Lie montre en particulier que $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2$ (alors que cette égalité est perdue aux ordres supérieurs) et justifie ainsi le rôle privilégié de l'opérateur Γ_2 dans les inégalités de Sobolev logarithmiques ([B-É], [Ba2]) à l'origine de ce travail.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans la note [L2].

2. Les gradients itérés et les développements de la variance

Sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$, considérons un semigroupe markovien $(P_t)_{t\geq 0}$, continu sur $\mathrm{L}^2(\mu)$, de générateur L. L'un des objets essentiels entrant dans notre étude est l'opérateur "carré du champ" introduit par P.-A. Meyer ([B-É], [D-M-M], [B-H]...) qui s'interprète naturellement comme un crochet de martingales. La définition de l'opérateur carré du champ sous-entend la donnée d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions réelles sur E sur laquelle opère le générateur L. Dans la pratique, le choix de cette algèbre $\mathcal{A}$ et de ses propriétés est relativement important. Dans ce travail, nous laisserons cet aspect quelque peu de côté en postulant sur $\mathcal{A}$ toutes les hypothèses nécessaires à notre étude formelle (hypothèses parfois déraisonnables dans la pratique). Nous mentionnerons toutefois un certain nombre d'exemples naturels.

Pour l'instant, supposons $\mathcal{A}$ dans le domaine de L, et stable par celui-ci; introduisons l'opérateur bilinéaire symétrique carré du champ en posant, pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{A}$,

$$2\Gamma(f,g) = \mathrm{L}(fg) - f\mathrm{L}g - g\mathrm{L}f. \tag{2.1}$$

Si L est un opérateur différentiel du second ordre, Γ mesure ce qui fait défaut à L pour être une dérivation. Le facteur 2 est là pour que dans le cas du laplacien Δ sur $\mathbb{R}^N$, $\Gamma(f,g) = \nabla f \cdot \nabla g$ (f et g appartenant à une classe de fonctions suffisamment régulières). Si L est le générateur d'un processus de Markov $X = (X_t)_{t\geq 0}$, l'opérateur carré du champ $\Gamma(f,g)$ s'interprète comme le crochet des semimartingales $f(X)$ et $g(X)$ (*voir* [B-É]).

Le procédé qui définit Γ à partir du produit permet de définir par récurrence les "gradients itérés". Désignons par Γ_0 l'application bilinéaire canonique produit de deux fonctions : $\Gamma_0(f,g) = fg$; alors, pour tout $n \geq 1$, et toutes f, g dans $\mathcal{A}$, posons

$$2\Gamma_n(f,g) = \mathrm{L}\Gamma_{n-1}(f,g) - \Gamma_{n-1}(f, \mathrm{L}g) - \Gamma_{n-1}(g, \mathrm{L}f)$$

(avec $\Gamma_1 = \Gamma$). Les gradients itérés Γ_n définissent ainsi des applications bilinéaires symétriques de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. Dans la suite, nous userons de la notation quelque peu abusive $\Gamma_n f = \Gamma_n(f) = \Gamma_n(f,f)$ si $f \in \mathcal{A}$ (et de même, par extension, pour toutes les applications bilinéaires ou multilinéaires).

Dans le cas du laplacien Δ sur $\mathbb{R}^N$, il est immédiat que pour tout entier n et toutes fonctions suffisamment régulières f et g,

$$\Gamma_n(f,g) = \nabla^n f \cdot \nabla^n g$$

où $\nabla^n f = (\partial^n f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n})_{1\leq i_1, \ldots i_n \leq N}$ (et où le produit scalaire prend effet dans $\mathbb{R}^{nN}$).

Le calcul des gradients itérés pour le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck $\mathrm{L}f(x) = \Delta f(x) - x \cdot \nabla f(x)$ sur $\mathbb{R}^N$ demande un peu plus d'efforts (on pourra commencer ci-dessous avec $N = 1$). Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de fonctions régulières sur $\mathbb{R}^N$; étendons pour commencer L à $\mathcal{A}^k$ pour tout k (par $\mathrm{L}(f_1, \ldots, f_k) = (\mathrm{L}f_1, \ldots, \mathrm{L}f_k)$). L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck vérifie

$$[\mathrm{L}, \nabla] = \mathrm{L}\nabla - \nabla\mathrm{L} = \nabla. \tag{2.2}$$

Il est immédiat que $\Gamma f = \Gamma_1 f = |\nabla f|^2$. Postulant l'hypothèse de récurrence

$$\Gamma_n f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n |\nabla^i f|^2, \quad f \in \mathcal{A},$$

on peut écrire ($n \geq 2$),

$$\Gamma_n f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \mathrm{L}\big(|\nabla^i f|^2\big) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \nabla^i f \cdot \nabla^i(\mathrm{L} f).$$

Or, d'après (2.2), $\nabla^i(\mathrm{L}f) = \mathrm{L}(\nabla^i f) - i\,\nabla^i f$ de sorte que

$$\begin{aligned}\Gamma_n f &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \mathrm{L}\big(|\nabla^i f|^2\big) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \nabla^i f \cdot \mathrm{L}(\nabla^i f) + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i^{n-1} |\nabla^i f|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} \Gamma\big(\nabla^i f\big) + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i^{n-1} |\nabla^i f|^2\end{aligned}$$

où nous conservons la lettre Γ pour désigner l'opérateur carré du champ de L étendu à $\mathcal{A}^k$, $k \geq 1$. Comme plus haut, $\Gamma(\nabla^i f) = |\nabla^{i+1} f|^2$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi finalement, et par polarisation, $\Gamma_n(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \nabla^i f \cdot \nabla^i g$ avec les relations, pour tout $n \geq 1$,

(2.3) $$\alpha_i^n = \alpha_{i-1}^{n-1} + i\alpha_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\alpha_0^{n-1} = \alpha_n^{n-1} = 0,\ \alpha_n^n = 1).$$

Ces relations peuvent également se lire "à l'envers". Désignons par $Q_n(X)$, $n \geq 1$, le polynôme de degré n de la variable réelle X défini par $Q_n(X) = \prod_{i=0}^{n-1} (X - i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} Q_n^{(i)}(0) X^i$. Posons, avec abus, $Q_n(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} Q_n^{(i)}(0) \Gamma_i$. On a alors, pour tout $n \geq 1$ et toutes f, g suffisamment régulières,

(2.4) $$Q_n(\Gamma)(f,g) = \nabla^n f \cdot \nabla^n g.$$

(Dans ces notations, le cas du laplacien Δ sur $\mathbb{R}^n$ correspond aux polynômes $Q_n(X) = X^n$.) En particulier, $Q_n(\Gamma) f = |\nabla^n f|^2 \geq 0$. Ces relations découlent de (2.3) et du fait que

(2.5) $$Q_n^{(i)}(0) = -(n-1) Q_{n-1}^{(i)}(0) + i Q_{n-1}^{(i-1)}(0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour la démonstration, il suffit de noter que

$$Q_n(\Gamma) f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} Q_n^{(i)}(0) \Gamma_i f = \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell^n |\nabla^\ell f|^2$$

où $A_\ell^n = \sum_{i=\ell}^n \frac{1}{i!} Q_n^{(i)}(0)\alpha_\ell^i$. Or, en utilisant successivement (2.5) et (2.3) il vient que $A_\ell^n = A_{\ell-1}^{n-1} + \big[\ell - (n-1)\big]A_\ell^{n-1}$, de sorte que (par récurrence), $A_\ell^n = 1$ si $\ell = n$ et 0 sinon, et ainsi $Q_n(\Gamma)f = |\nabla^n f|^2$. Les identités (2.4) peuvent bien sûr s'établir aussi directement en observant par exemple que

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{L}\big(f^{(n)}g^{(n)}\big) - f^{(n)}(\mathrm{L}g)^{(n)} - g^{(n)}(\mathrm{L}f)^{(n)}\right] = f^{(n+1)}g^{(n+1)} + nf^{(n)}g^{(n)}$$

et en faisant usage de (2.5). Elles permettent de retrouver inversement (2.3).

Le calcul des gradients itérés Γ_n dans des situations spécifiques présente un intérêt en soi. Sur l'espace à deux points $\{-1,+1\}$ avec $\mathrm{L}f(x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x))$, on constate que $\Gamma_2 = 2\Gamma$ $(= 2(\mathrm{L})^2)$ de sorte que, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_n = 2^{n-1}\Gamma$. Sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$, soit τ_k, $k \geq 1$, le changement de signe sur la k-ième coordonnée d'un point $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$; considérons l'opérateur $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\sum_k D_k$ où $D_k f = f \circ \tau_k - f$, agissant sur l'algèbre des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées. Soit f une telle fonction; il est facile de voir que, pour tout $n \geq 1$,

$$\Gamma_n f = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \big(D_{k_1}\cdots D_{k_n} f\big)^2.$$

Définissons, pour tout $i \geq 1$,

$$C_i f = \frac{1}{2^{2i}} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_i \\ \text{distincts}}} \big(D_{k_1}\cdots D_{k_i} f\big)^2,$$

ainsi que $C_i(f,g)$ par polarisation. À noter que les opérateurs D_k commutent entre eux et que $D_k D_k = -2D_k$. Par récurrence, on vérifie alors que

$$\Gamma_n f = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n C_i f, \quad n \geq 1,$$

pour α_i^n les coefficients des relations (2.3) ci-dessus. En effet, puisque $D_k(f^2) = (D_k f)^2 + 2fD_k f$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_n f &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_k \alpha_i^{n-1}\big(\tfrac{1}{2}D_k(C_i f) - C_i(f, D_k f)\big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^{2i}}\sum_k \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_i \\ \text{distincts}}} \big(D_k D_{k_1}\cdots D_{k_i} f\big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1}\big(C_{i+1}f + iC_i f\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, à l'image de (2.4), $Q_n(\Gamma)f = C_n f \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Les gradients itérés sont également d'un intérêt particulier pour les laplaciens où les opérateurs différentiels du second ordre sur une variété. L'opérateur Γ_2 du laplacien d'une variété riemannienne est un substitut de la courbure et joue, à ce titre, un rôle prépondérant dans ce cadre. Si L est en effet l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur une variété riemannienne E, la formule de Bochner ([B-G-M], [G-H-L]) indique que pour toute fonction f de classe C^2 sur E,

$$\Gamma_2(f,f) = \frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \|\nabla^2 f\|_2^2$$

où Ric est le tenseur de Ricci et $\|\nabla^2 f\|_2$ la norme de Hilbert-Schmidt de la hessienne de f. L'opérateur Γ_2 a été introduit et utilisé par D. Bakry dans l'étude des transformées de Riesz des semigroupes symétriques [Ba1] et dans celle des diffusions hypercontractives par D. Bakry et M. Émery [B-É], [Ba2]. Il peut être considéré comme à l'origine des développements qui suivent. L'identification dans ce cadre des opérateurs Γ_n pour $n \geq 3$ est plus délicate; il serait intéressant de détailler pour commencer des exemples en courbure constante (*voir* [Ba3] pour un exemple).

Nous abordons à présent, dans ce cadre abstrait, les développements formels de moyennes et variances décrits dans l'introduction pour le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck. Afin de ne pas obscurcir l'aspect principal de ce travail, nous imposerons à l'algèbre $\mathcal{A}$ sur laquelle opère le générateur markovien L toutes les hypothèses qui faciliteront notre démarche (en suivant en cela [B-É], [Ba2]). En particulier, nous passerons sous silence, en renvoyant à [Ba2], [D-M-M] ou [B-H], les propriétés et questions de densité permettant de prolonger les identités que nous obtiendrons aux classes de fonctions les plus larges possibles. Signalons simplement quelques choix simples pour $\mathcal{A}$ dans les exemples les plus courants. Dans le cas du laplacien sur $\mathbb{R}^N$, on pourra prendre l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz. Pour le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck, on peut travailler avec la classe des fonctions C^∞ bornées dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide, ou, plus simplement avec les polynômes (qui ne sont néanmoins pas bornés). Pour le laplacien sur une variété riemannienne, on pourra choisir la classe des fonctions C^∞ à support compact (qui toutefois n'est stable par le semigroupe de la chaleur que si la variété est compacte). Sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$, l'algèbre naturelle est celle des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Soit donc, sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$, un semigroupe markovien $(P_t)_{t\geq 0}$, continu sur $\mathrm{L}^2(\mu)$, de générateur L. Nous supposerons la mesure μ σ-finie, et, comme dans l'introduction, nous noterons $\langle f \rangle$ l'intégrale d'une fonction f de $\mathrm{L}^1(\mu)$; on notera également indifféremment $\langle f, g\rangle = \langle fg \rangle$ le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mu)$. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de fonctions sur E dans le domaine de L (au sens de $\mathrm{L}^2(\mu)$), stable par $(P_t)_{t\geq 0}$ et L et contenant les constantes si μ est finie. Nous supposerons que la mesure μ est invariante pour $(P_t)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire que pour toute f dans $\mathrm{L}^1(\mu)$, $P_t f$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mu)$ et $\langle P_t f\rangle = \langle f \rangle$ pour tout $t \geq 0$; de façon essentiellement équivalente (aux questions de densité près...), $\langle \mathrm{L} f\rangle = 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$. Cette hypothèse d'invariance, qui lie la mesure au semigroupe, nous permet de disposer d'une formule d'intégration par parties pour L : quelle que soit $f \in \mathcal{A}$,

$$\langle \Gamma f \rangle = \langle f, -\mathrm{L} f\rangle. \tag{2.6}$$

Soit à présent $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels non nuls, et $\lambda_0 = 0$. (Le plus souvent, il s'agira de réels positifs, facilitant ainsi le lien avec la suite des valeurs propres de $-\mathrm{L}$.) Soit également $\pi_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $n \geq 1$, et $\pi_0 = 1$. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des entiers, $\pi_n = n!$. À une telle suite, associons (à l'image de ce que nous avons fait plus haut dans le cadre du générateur d'Ornstein-Uhlenbeck), pour tout $n \geq 1$, $Q_n(X)$ le polynôme de degré n en la variable réelle X de racines $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ défini par

$$Q_n(X) = \prod_{i=0}^{n-1}(X - \lambda_i) \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\, Q_n^{(i)}(0) X^i\right)$$

$(Q_0 \equiv 1)$. Compte tenu de ce que $Q_{n+1}(X) = Q_n(X)(X - \lambda_n)$, on a,

$$Q_{n+1}^{(i)}(0) = -\lambda_n Q_n^{(i)}(0) + iQ_n^{(i-1)}(0), \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{2.7}$$

À la suite des gradients itérés Γ_n, $Q_n(\Gamma)$, $n \geq 1$, désignera très formellement l'application bilinéaire symétrique sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$

$$Q_n(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\, Q_n^{(i)}(0)\Gamma_i.$$

(Nous verrons plus loin une écriture algébrique plus naturelle des $Q_n(\Gamma)$.) On notera que les relations (2.7) entraînent que, pour $f \in \mathcal{A}$, et $n \geq 0$,

$$Q_{n+1}(\Gamma)f = -\lambda_n Q_n(\Gamma)f + \frac{1}{2}\mathrm{L}Q_n(\Gamma)f - Q_n(\Gamma)(f, \mathrm{L}f). \tag{2.8}$$

En particulier, par intégration (et invariance),

$$\langle Q_{n+1}(\Gamma)f\rangle = -\lambda_n \langle Q_n(\Gamma)f\rangle - \langle Q_n(\Gamma)(f, \mathrm{L}f)\rangle. \tag{2.9}$$

Moins formellement,

$$Q_n(-\mathrm{L}) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(\mathrm{L} + \lambda_i \mathrm{I}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\, Q_n^{(i)}(0)(-\mathrm{L})^i.$$

La formule d'intégration par parties (2.7) se complétant par les égalités $\langle f, (-\mathrm{L})^i f\rangle = \langle \Gamma_i f\rangle$, $i \geq 1$, il s'ensuit que, pour tout $n \geq 1$ et toute f de $\mathcal{A}$,

$$\langle Q_n(\Gamma)f\rangle = \langle f, Q_n(-\mathrm{L})f\rangle.$$

Pour les développements de variance (ou moyenne) d'une fonction, nous aurons besoin de propriétés d'ergodicité. Sans essayer de raffiner celles-ci, nous supposerons simplement que pour toute fonction f de l'algèbre $\mathcal{A}$, la limite $\lim_{t\to\infty} \langle (P_t f)^2\rangle$ existe (notée alors $m(f)^2$) et que, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{t\to\infty} \langle \Gamma_n(P_t f)\rangle = 0$. Ce cadre inclut les exemples décrits précédemment. Ces propriétés d'ergodicité sont aussi immédiatement satisfaites lorsque, par exemple, μ est une mesure de probabilité et L est ergodique ($\mathrm{L}f = 0$ ne peut avoir lieu que si f est constante), auquel cas $m(f) = \langle f \rangle$.

Le théorème suivant est le résultat principal sur les développements de variance; il exprime une sorte de formule de Taylor (avec reste intégral) pour la "variance" $\langle f^2 \rangle - m(f)^2$. Il suppose les hypothèses que nous venons de présenter, notamment celles d'ergodicité.

THÉORÈME 2.1. – *Pour toute suite* $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *comme précédemment, toute fonction* f *de* $\mathcal{A}$ *et tout* $n \geq 1$,

$$\langle f^2 \rangle - m(f)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle Q_k(\Gamma) f \rangle - \frac{(-1)^n}{\pi_{n-1}} \int_0^\infty 2\langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle \, dt.$$

Si $(P_t)_{t \geq 0}$ est ergodique (pour μ de probabilité), $m(f) = \langle f \rangle$ et le théorème exprime indifféremment un développement de la variance ou de la moyenne d'une fonction. En appliquant le théorème à $f + g$, on obtient également des identités sur les covariances. Par intégration par parties, les facteurs $\langle Q_n(\Gamma) f \rangle$ de l'énoncé peuvent être remplacés par $\langle f, Q_n(-\mathrm{L}) f \rangle$.

Démonstration. – Elle s'effectue par simple récurrence. Le point essentiel en est la relation, pour $f \in \mathcal{A}$ et $n \geq 0$,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Gamma_n P_t f \rangle = \langle \Gamma_{n+1} P_t f \rangle. \tag{2.10}$$

En effet,

$$\frac{d}{dt} \langle \Gamma_n(P_t f, P_t f)) \rangle = 2\langle \Gamma_n(P_t f, \mathrm{L} P_t f) \rangle = -2\langle \Gamma_{n+1}(P_t f, P_t f) \rangle$$

par définition des gradients itérés et invariance de μ. Joint aux relations (2.7), il s'ensuit que, pour toute f de $\mathcal{A}$ et tout $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle = \lambda_n \langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle + \langle Q_{n+1}(\Gamma) P_t f \rangle. \tag{2.11}$$

Soit $f \in \mathcal{A}$; pour tout $T \geq 0$,

$$\langle f^2 \rangle - \langle (P_T f)^2 \rangle = -\int_0^T \frac{d}{dt} \langle (P_t f)^2 \rangle \, dt = \int_0^T 2\langle \Gamma P_t f \rangle \, dt$$

et le cas $n = 1$ s'ensuit lorsque $T \to \infty$. Pour $n \geq 1$, en vertu de (2.11), pour tout $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T 2\langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle \, dt &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \frac{d}{dt} \langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle \, dt - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T 2\langle Q_{n+1}(\Gamma) P_t f \rangle \, dt \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \langle Q_n(\Gamma) f \rangle - \frac{1}{\lambda_n} \langle Q_n(\Gamma) P_T f \rangle - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T 2\langle Q_{n+1}(\Gamma) P_t f \rangle \, dt \end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit par les hypothèses d'ergodicité. Le théorème est établi.

En multipliant l'identité du théorème par λ_1 et en faisant tendre celui-ci vers 0, on obtient de la même façon un développement de $\langle \Gamma f \rangle$, et par suite de tous les $\langle \Gamma_i f \rangle$; de manière plus précise, pour tout $i \geq 1$, toute $f \in \mathcal{A}$ et tout $n \geq 1$,

$$\langle \Gamma_i f \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle Q_k(\Gamma_{i+1}) f \rangle - \frac{(-1)^n}{\pi_{n-1}} \int_0^\infty 2 \langle Q_n(\Gamma) P_t f \rangle \, dt$$

où, dans la définition des π_k et des polynômes Q_k, la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est remplacée par la suite $(\lambda_{n+i})_{n \geq 1}$ $(\lambda_i = 0)$.

Le théorème 2.1 présente bien sûr un intérêt particulier lorsque que l'on peut trouver des réels λ_n tels que pour un, ou tout n, $Q_n(\Gamma) f \geq 0$, ou seulement $\langle Q_n(\Gamma) f \rangle \geq 0$, pour toute fonction f de $\mathcal{A}$, comme c'est le cas dans l'exemple du générateur d'Ornstein-Uhlenbeck traité dans l'introduction (avec pour $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des entiers). Comme nous l'avons vu, c'est aussi le cas sur l'espace $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ où l'on dispose donc d'inégalités sur les moyennes ou variances du type de celles de la proposition 1.1. Dans ces exemples, la suite optimale $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (à savoir celle qui assure la positivité des $\langle Q_n(\Gamma) f \rangle$) est à chaque fois la suite des valeurs propres de l'opérateur $-\mathrm{L}$. Ce choix n'est évidemment pas un hasard. Le corollaire suivant illustre et explique ce phénomène; il justifie également notre choix de notation pour la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La démonstration de ce corollaire nous a été aimablement communiquée par D. Bakry. On dit que le générateur L est symétrique pour la mesure μ si $\langle f, \mathrm{L} g \rangle = \langle \mathrm{L} f, g \rangle$ pour toutes fonctions f, g de $\mathcal{A}$.

COROLLAIRE 2.2. – *Supposons, outre les hypothèses du théorème 2.1, que* $-\mathrm{L}$ *a un spectre discret de valeurs propres* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ *et que* L *est symétrique pour* μ; *alors, si les* π_k *et les* Q_k *sont définis à partir de cette suite* $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *pour tout entier* $n \geq 1$ *et toute fonction* f *de* $\mathcal{A}$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle Q_k(\Gamma) f \rangle \leq \langle f^2 \rangle - m(f)^2 \leq \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle Q_k(\Gamma) f \rangle .$$

Démonstration. – En vertu du théorème 2.1, il suffit de vérifier que $\langle f, Q_n(-\mathrm{L}) f \rangle \geq 0$ pour toute fonction f de $\mathcal{A}$ et tout $n \geq 1$. Notons d'abord que si g et g' sont deux fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes λ et λ', alors $\langle g, g' \rangle = 0$. En effet, par symétrie,

$$\lambda \langle g, g' \rangle = \langle -\mathrm{L} g, g' \rangle = \langle g, -\mathrm{L} g' \rangle = \lambda' \langle g, g' \rangle .$$

Soit alors $f = \sum_{p=0}^{\infty} f_p$ une décomposition de f suivant une base de vecteurs propres de $-\mathrm{L}$ dans $\mathrm{L}^2(\mu)$; il vient

$$\langle f, Q_n(-\mathrm{L}) f \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \langle f_p^2 \rangle Q_n(\lambda_p) = \sum_{p=n}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda_p - \lambda_i)$$

et la conclusion s'ensuit puisque les λ_n sont rangés en ordre croissant.

Dans la pratique, il peut être intéressant d'avoir une écriture plus explicite des $\langle Q_n(\Gamma)f\rangle$ dans le théorème 2.1 ou le corollaire 2.2, comme c'est le cas dans les exemples de l'espace gaussien et du cube. D'autres exemples peuvent être étudiés dans ce cadre. Soit, sur l'intervalle $[-1,+1]$, la famille des mesures ultrasphériques normalisées pour en faire des mesures de probabilités $\mu(dx) = c(\nu)(1-x^2)^{\nu/2-1}$, $\nu > 0$, et les opérateurs

$$\mathrm{L}f(x) = \mathrm{L}_\nu f(x) = (1-x^2)f''(x) - \nu x f'(x).$$

Le carré du champ Γ s'exprime par $\Gamma f(x) = (1-x^2){f'}^2(x)$, pour une classe de fonctions régulières f sur $[-1,+1]$. Soit $\nu > 0$ fixé; désignons par $\lambda_n = n(n+\nu-1)$, $n \geq 0$, la suite des valeurs propres de l'opérateur $-\mathrm{L}$ et par Q_n, $n \geq 0$, la suite de polynômes associés. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\langle Q_n(\Gamma)f\rangle = \langle (1-x^2)^n {f^{(n)}}^2\rangle, \tag{2.12}$$

les intégrales étant prises par rapport à μ. La conjonction de (2.12) et du corollaire permet de retrouver alors le résultat de [Be]. La vérification de (2.12) se fait comme toujours par récurrence. Le cas $n=1$ se réduit à la définition de Γ. À l'image de l'exemple gaussien, on observe aisément que pour f et g régulières, et tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\mathrm{L}\big(f^{(n)}g^{(n)}\big) - f^{(n)}(\mathrm{L}g)^{(n)} - g^{(n)}(\mathrm{L}f)^{(n)}\right]&\\ = (1-x^2)f^{(n+1)}g^{(n+1)} + nx\big[f^{(n)}g^{(n)}\big]' + \lambda_n f^{(n)}g^{(n)}&\end{aligned}$$

(en un point x de $[-1,+1]$) où l'on a utilisé que $(\mathrm{L}_\nu f)' = \mathrm{L}_{\nu+2}f' - \nu f'$ et donc $(\mathrm{L}_\nu f)^{(n)} = \mathrm{L}_{\nu+2n}f^{(n)} - \lambda_\nu f^{(n)}$. Or, par une simple intégration par parties,

$$\frac{1}{2}\langle (1-x^2)^n \mathrm{L}\big(f^{(n)}g^{(n)}\big)\rangle = n\langle x(1-x^2)^n\big(f^{(n)}g^{(n)}\big)'\rangle.$$

Ainsi,

$$\langle (1-x^2)^{n+1}{f^{(n+1)}}^2\rangle = -\lambda_n\langle (1-x^2)^n {f^{(n)}}^2\rangle - \langle (1-x^2)^n\big(f^{(n)}(\mathrm{L}f)^{(n)}\big)\rangle,$$

soit les relations de récurrence satisfaites par les $\langle Q_n(\Gamma)f\rangle$ (*cf.* (2.9)), ce qui démontre (2.12). On notera que la relation (2.12) n'est pas satisfaite ponctuellement et que le calcul des gradients itérés eux-mêmes dans cet exemple se révèle assez lourd (*cf.* [Ba3]).

Un autre exemple est celui du développement de la moyenne d'une fonction sur l'espace de Poisson. Soit μ une loi de Poisson sur $\mathbb{N}$ de paramètre θ; pour une fonction f sur $\mathbb{N}$, disons à support fini pour simplifier, soit Df la fonction définie par $Df(k) = f(k) - f(k-1)$ pour tout entier k ($f(k) = 0$ si $k < 0$). L'opérateur de Poisson L associé peut alors se définir comme

$$\mathrm{L}f(k) = \theta Df(k+1) - kDf(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Le carré du champ est décrit par $2\Gamma f(k) = \theta Df(k+1)^2 + kDf(k)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Pour $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers, et toute fonction f sur $\mathbb{N}$ à support fini,

$$\langle Q_n(\Gamma)f\rangle = \theta^n\langle (D^n f_n)^2\rangle \tag{2.13}$$

pour tout $n \geq 1$, où f_n est la translatée de f par n: $f_n(k) = f(k+n)$. La démonstration de (2.13) s'effectue par récurrence et se réduit, suivant toujours le même schéma basé sur les relations (2.9), à vérifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$\theta^{n+1}\langle (D^{n+1} f_{n+1})^2 \rangle = -n\theta^n \langle (D^n f_n)^2 \rangle - \theta^n \langle D^n f_n, D^n(\mathrm{L}f)_n \rangle. \tag{2.14}$$

Or, cette égalité s'établit aisément en notant que

$$D^n \mathrm{L} f(k) = \mathrm{L} D^n f(k) - n D^n f(k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Cette propriété permet en effet de montrer que le membre de droite de (2.14) est égal à

$$-n\langle (D^n f_n)^2 \rangle - \langle D^n f_n, (\mathrm{L}D^n f)_n \rangle + n \langle D^n f_n, D^n f_{n-1} \rangle.$$

Puis, en utilisant l'identité

$$\langle g, (\mathrm{L}h)_n \rangle = \theta \langle g - g_1, Dh_{n+1} \rangle - n \langle g, Dh_n \rangle$$

pour $g = D^n f_n$ et $h = D^n f$, l'expression précédente s'écrit

$$-n\langle (D^n f_n)^2 \rangle - \langle D^n f_n, D^{n+1} f_n + D^n f_{n-1} \rangle + \theta \langle D^n f_{n+1} - D^n f_n, D^{n+1} f_{n-1} \rangle.$$

Comme $D^{n+1} f_m = D^n f_m - D^n f_{m-1}$ pour tout m, la conclusion s'ensuit. Ces observations permettent donc de retrouver, au moins en dimension 1, les inégalités sur l'espace de Poisson obtenues par C. Houdré et V. Perez-Abreu [H-PA].

Le corollaire suivant est un court complément au corollaire 2.2 qui souligne à nouveau le rôle privilégié de la suite des valeurs propres dans les développements décrits par le théorème 2.1.

COROLLAIRE 2.3. – *S'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ tels que $\langle Q_{n+1}(\Gamma) f \rangle \geq 0$ pour toute f de $\mathcal{A}$, et si λ est un réel tel que $-\mathrm{L}f = \lambda f$ pour une fonction non constante f de $\mathcal{A}$, alors*

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \geq 0.$$

On notera en particulier de ce corollaire que si $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ sont valeurs propres de $-\mathrm{L}$, et si $\lambda_n > 0$ est tel que $\langle Q_{n+1}(\Gamma) f \rangle \geq 0$ pour toute f de $\mathcal{A}$, alors la n-ième valeur propre de $-\mathrm{L}$ est plus grande que λ_n.

Démonstration. – Elle repose sur le lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.3. – *Pour toute suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls (avec $\lambda_0 = 0$), tout entier $n \geq 1$ et tout réel X,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\pi_k} Q_k(X) = \frac{(-1)^n}{\pi_n} \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

Démonstration. – Posons, pour tout $k \geq 1$,

$$R_k(X) = \frac{(-1)^k}{\pi_k} \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i), \quad X \in \mathbb{R},$$

et $R_0 \equiv 1$, $R_{-1} \equiv 0$. Il est immédiat que

$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^k}{\pi_k} Q_k$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\pi_k} Q_k = \sum_{k=0}^{n} (R_k - R_{k-1}) = R_n.$$

Le lemme est établi.

En vertu du théorème 2.1 et des hypothèses,

$$(-1)^n \left(\langle f^2 \rangle - m(f)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle f, Q_k(-\mathrm{L})f \rangle \right) \geq 0.$$

Pour conclure au corollaire, il suffit de remplacer $-\mathrm{L}f$ par λf dans cette inégalité. Comme $m(-\mathrm{L}f)^2 = \lim_{t \to \infty} \langle (P_t \mathrm{L} f)^2 \rangle = \lim_{t \to \infty} \langle \Gamma_2 P_t f \rangle = 0$, il ne reste plus alors qu'à faire usage de l'identité du lemme.

Dans la pratique, pour vérifier que $\langle Q_n(\Gamma) f \rangle \geq 0$ pour toute f de $\mathcal{A}$, on peut utiliser des inégalités ponctuelles sur les gradients itérés qui généralisent l'inégalité de courbure-dimension de D. Bakry et M. Émery [B-É], [Ba2]. Supposons que pour des réels $a_1, \ldots, b_1, \ldots$, on ait, ponctuellement,

$$\Gamma_n f \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Gamma_i f + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Gamma_{i-1}(\mathrm{L}f) \tag{2.15}$$

pour toute fonction f de $\mathcal{A}$. Ce choix de second membre étend la situation gaussienne mais se révèle peut-être assez arbitraire pour d'autres exemples (*cf.* [Ba3]). Après intégration, et comme $\langle \Gamma_i(\mathrm{L}f) \rangle = \langle \Gamma_{i+2} f \rangle$, $i \geq 0$,

$$(1 - b_{n-1}) \langle \Gamma_n f \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + b_{i-1}) \langle \Gamma_i f \rangle \geq 0$$

(avec $a_n = b_0 = 0$). En supposant $1 - b_{n-1} > 0$,

$$\left\langle \Gamma_n f - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i + b_{i-1}}{1 - b_{n-1}} \Gamma_i f \right\rangle \geq 0.$$

S'il y a donc coïncidence entre les coefficients de ce "polynôme" en les $\Gamma_i f$ et les coefficients de $Q_n(\Gamma)f$, il s'ensuivra que $\langle Q_n(\Gamma)f\rangle \geq 0$ et ainsi, suivant la parité de n, que

$$\langle f^2\rangle - \mu(f)^2 \leq \quad \text{ou} \quad \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle Q_k(\Gamma)f\rangle.$$

Lorsque $n = 2$, l'inégalité (2.15) correspond à l'inégalité courbure-dimension de [B-É] (*voir* aussi [Ba2])

$$\Gamma_2 f \geq a_1\Gamma_1 f + b_1(\mathrm{L}f)^2$$

qui donne lieu à l'inégalité de trou spectral (μ de probabilité)

$$\lambda_1\left[\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2\right] \leq \langle \Gamma f\rangle$$

avec $\lambda_1 = a_1/1 - b_1$ ($a_1 > 0$, $b_1 < 1$). Déjà pour $n = 3$ cependant, l'identification pratique des coefficients a_i, b_i, ainsi que leur coïncidence avec des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, s'avère assez délicate.

3. L'algèbre de Lie des gradients itérés et les développements de l'entropie

Sur la base des développements de moyennes et variances, et suite à l'exemple gaussien de l'introduction, il est naturel de s'interroger sur des développements analogues de l'entropie d'une fonction. Reprenons en fait l'exemple de la mesure gaussienne canonique μ sur $\mathbb{R}^N$ avec le formalisme du paragraphe précédent. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, l'entropie $E(f) = \langle f \log f\rangle - \langle f\rangle \log\langle f\rangle$ d'une "bonne" fonction f ne peut se développer sous la forme

$$2E(f) = \langle f, Q_1(\Gamma)u\rangle - \frac{1}{2!}\langle f, Q_2(\Gamma)u\rangle + \frac{1}{3!}\langle f, Q_3(\Gamma)u\rangle - \ldots$$

(où $u = \log f$), le troisième terme n'étant déjà plus celui qui est espéré. En outre, cette formule montrerait que

$$2E(f) \geq \langle f, Q_1(\Gamma)u\rangle - \frac{1}{2!}\langle f, Q_2(\Gamma)u\rangle$$

ce qui n'est pas le cas comme le prouve l'exemple (sur $\mathbb{R}$) des fonctions $f(x) = \exp(\alpha x^2)$, $\alpha < 1/2$. En fait, même dans cet exemple simple, le procédé de développement précédemment mis en évidence montre que les seuls gradients itérés Γ_n, $n \geq 1$, sont insuffisants à décrire l'entropie d'une fonction et qu'une structure plus large est exigée. Notre tâche première dans cette partie va d'abord être de décrire cette structure algébrique, qui sera celle d'une algèbre de Lie naturellement associée à un générateur markovien; nous étudierons ensuite, sous des hypothèses appropriées, la possibilité de développer l'entropie d'une fonction avec ce nouvel outil.

Afin d'introduire cette algèbre des gradients itérés sur laquelle nos développements seront basés, plaçons-nous pour commencer dans un cadre plus général. Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$); si A est une application n-linéaire symétrique sur $\mathcal{X}^n$ à valeurs dans $\mathcal{X}$ et B une application k-linéaire symétrique sur $\mathcal{X}^k$ dans $\mathcal{X}$, on définit une nouvelle application $(n+k-1)$-linéaire symétrique de $\mathcal{X}^{n+k-1}$ dans $\mathcal{X}$ notée $[A, B]$ en posant : si $N = n + k - 1$, et $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{X}^N$,

$$2[A,B](x) = \frac{1}{N!} \sum_\sigma \big[nA\big(B(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}), x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}\big) - kB\big(A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), x_{\sigma(n+1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}\big)\big]$$

où la somme porte sur toutes les permutations σ de $\{1, \ldots, N\}$. Patr symétrie, il aurait suffi de décrire $[A, B](x)$ pour des vecteurs x dont toutes les composantes sont égales. L'intérêt de cette définition réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. – *L'application* $[\cdot, \cdot]$ *définit un crochet de Lie sur les applications multilinéaires symétriques de* $\mathcal{X}^{(\mathbb{N})}$ *à valeurs dans* $\mathcal{X}$.

Démonstration. – Il est clair que le crochet est antisymétrique. Vérifions l'identité de Jacobi

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$$

où A, B, C sont des applications respectivement n, k, ℓ-linéaires de $\mathcal{X}^n$, $\mathcal{X}^k$, $\mathcal{X}^\ell$ dans $\mathcal{X}$. Posons $N = n + k + \ell - 2$. Par symétrie, il suffit de vérifier l'identité de Jacobi sur les vecteurs x de $\mathcal{X}^N$ dont toutes les composantes sont égales, disons à $v \in \mathcal{X}$. Le premier des deux termes définissant $[A, [B, C]](x)$ est égal à

$$\frac{n}{2} A\big([B,C](v, \ldots, v), v, \ldots, v\big)$$

qui est lui-même une différence de deux termes dont le premier est

$$\frac{nk}{4} A\big(B\big(C(v, \ldots, v), v, \ldots, v\big), v, \ldots, v\big). \tag{3.1}$$

Ce terme se retrouve dans la deuxième partie de $[C, [A, B]](x)$, c'est-à-dire (précédée d'un signe négatif)

$$\frac{n+k-1}{2} [A,B]\big(C(v, \ldots, v), v, \ldots, v\big).$$

Cette expression se décompose en effet en une différence dont le premier membre s'écrit

$$\frac{n+k-1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{(n+k-1)!} \sum_\sigma A\big(B(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}), y_{\sigma(k+1)}, \ldots, y_{\sigma(n+k-1)}\big)$$

où la somme porte sur les permutations σ de $\{1, \ldots, n+k-1\}$ et où $y_1 = C(v, \ldots, v)$, $y_i = v$, $i = 2, \ldots, n+k-1$. Il est aisé de constater que cette somme est égale au terme (3.1) complété par

$$\frac{n(n-1)}{4} A\big(B(v, \ldots, v), C(v, \ldots, v), v, \ldots v\big).$$

Or, ce terme se retrouve, avec le signe opposé, exactement de la même façon, dans le crochet $[B, [C, A]](x)$. La conclusion de la proposition s'ensuit alors en répétant le raisonnement sur les termes restants.

L'opération $[\cdot, \cdot]$ définit ainsi un crochet de Lie sur les opérateurs multilinéaires symétriques et donc une structure d'algèbre de Lie sur la somme directe $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{X})$ des espaces $\mathcal{L}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X})$ des applications n-linéaires symétriques de $\mathcal{X}^n$ dans $\mathcal{X}$.

Lorsque l'espace $\mathcal{X}$ est de dimension finie ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$), l'algèbre $\mathcal{M}$ est bien connue : $\mathcal{L}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X})$ s'identifie en effet aux champs de vecteurs polynômiaux homogènes de degré n sur $\mathcal{X}$. L'identification s'effectue en associant à tout élément A de $\mathcal{L}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X})$ le champ

$$\sum_{i=1}^{N} a^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $A(x, \dots, x) = a(x) = (a^1(x), \dots, a^N(x)))$. En effet, si $A \in \mathcal{L}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{X}^n, \mathcal{X})$ et $B \in \mathcal{L}^{\mathrm{sym}}(\mathcal{X}^k, \mathcal{X})$, le crochet des champs de vecteurs associés a et b est égal, en $x \in \mathcal{X}$, à

$$[a, b](x) = a(x) D_x b - b(x) D_x a,$$

yD_x désignant la dérivation par rapport à $x \in \mathcal{X}$ dans la direction $y \in T_x(\mathcal{X})$. Mais,

$$a(x) D_x b = \sum_{\ell=1}^{k} B(x, \dots, x, a(x), x, \dots, x) = kB\big(a(x), x, \dots, x\big)$$

(où $a(x)$ apparaît à la ℓ-ième place dans la sommation) et donc

$$[a, b](x) = kB\big(a(x), x, \dots, x\big) - nA\big(b(x), x, \dots, x\big).$$

Au coefficient $-\dfrac{1}{2}$ près, l'algèbre définie par la proposition 3.1 est donc la transposition à un cadre de dimension quelconque (infinie) de la structure d'algèbre de Lie des champs de vecteurs à coefficients polynômiaux homogènes.

En fait, cette interprétation peut être poussée un peu plus loin. Si Φ, $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sont "suffisamment régulières" (en un sens à préciser), on peut définir une dérivation de Φ dans la direction Ψ en posant

$$\frac{d}{dt} \Phi\big(x + t\Psi(x)\big) = (\Phi \cdot \Psi)(x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Si A et B sont des applications multilinéaires symétriques de $\mathcal{X}^n$, respectivement $\mathcal{X}^k$, dans $\mathcal{X}$, posons comme plus haut $a(x) = A(x, \dots, x)$, $b(x) = B(x, \dots, x)$, $x \in \mathcal{X}$. Il est aisé de vérifier alors que le crochet des "champs de vecteurs" a et b, $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, est égal à $-2[A, B]$.

Lorsque que l'on travaille avec les applications multilinéaires antisymétriques, ou sans conditions de symétrie, on obtient une algèbre de Lie graduée (le crochet est symétrique ou antisymétrique suivant les degrés) du type de Nijenhuis-Richardson [N-R] (*voir* aussi [Ge]). L'algèbre $\mathcal{M}$ peut donc être considérée comme une version symétrique (et donc plus simple) de ces algèbres graduées.

Revenons à présent à notre cadre markovien et considérons, comme espace vectoriel $\mathcal{X}$ de référence, une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions sur E dans le domaine du générateur L, et stable par celui-ci. La première observation est bien sûr que les gradients itérés Γ_n s'interprètent simplement dans ce contexte comme les crochets de Lie $[\mathrm{L}, \Gamma_{n-1}]$ définis par récurrence à partir de l'application bilinéaire produit Γ_0. On peut aussi noter, à la suite de (2.8), que

$$Q_{n+1}(\Gamma) = -\lambda_n Q_n(\Gamma) + [\mathrm{L}, Q_n(\Gamma)].$$

Le cadre algébrique précédent permet également une écriture plus naturelle des opérateurs $Q_n(\Gamma)$ comme des polynômes de l'endomorphisme ad_{L} sur $\mathcal{M}$ appliqués à Γ_0. Soit $\mathrm{ad}_{\mathrm{L}}(A) = [\mathrm{L}, A]$ pour tout $A \in \mathcal{M}$; alors, pour tout entier n,

$$\Gamma_n = \mathrm{ad}_{\mathrm{L}}^n(\Gamma_0)$$

et

$$Q_n(\Gamma) = Q_n(\mathrm{ad}_{\mathrm{L}})(\Gamma_0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}\, Q_n^{(i)}(0)\mathrm{ad}_{\mathrm{L}}^i(\Gamma_0).$$

Notre projet (*voir* le théorème 3.2 ci-dessous) va consister à démontrer qu'un développement de l'entropie d'une fonction de $\mathcal{A}$ ne peut s'effectuer à partir des seuls gradients itérés Γ_n mais prend place au contraire dans la sous-algèbre $\mathcal{L}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{M}$ engendrée par L et l'opérateur carré du champ Γ, constituée donc de L, Γ et des crochets construits à partir d'eux. Plus précisément, une suite particulière d'éléments de $\mathcal{L}$ sera utilisée dans ce but : définissons par récurrence des éléments $\widetilde{\Gamma}_n$, $n \geq 1$, de $\mathcal{L}$ en posant $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 = \Gamma$ et, si $n \geq 2$,

$$\widetilde{\Gamma}_n = [\mathrm{L} + \Gamma, \widetilde{\Gamma}_{n-1}] \quad \big(= [\mathrm{L}, \widetilde{\Gamma}_{n-1}] + [\Gamma, \widetilde{\Gamma}_{n-1}]\big).$$

Notons que, outre $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_2 &= \Gamma_2,\\
\widetilde{\Gamma}_3 &= \Gamma_3 + [\Gamma_1, \Gamma_2],\\
\widetilde{\Gamma}_4 &= \Gamma_4 + 2[\Gamma_1, \Gamma_3] + [\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_2]],\\
\widetilde{\Gamma}_5 &= \Gamma_5 + 3[\Gamma_1, \Gamma_4] + 2[\Gamma_2, \Gamma_3] + 3[\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_3]]\\
&\qquad + [\Gamma_2, [\Gamma_1, \Gamma_2]] + [\Gamma_1, [\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_2]]],\\
&\dots
\end{aligned}$$

En fait, les propriétés de crochet de Lie permettent de vérifier, de façon classique, que, pour tout $n \geq 2$,

$$\widetilde{\Gamma}_n = \sum [A_1, [A_2, [\dots, [A_{n-2}, [\mathrm{L}, \Gamma]] \dots], \tag{3.2}$$

la somme portant sur $A_1, \dots, A_{n-2} \in \{\mathrm{L}, \Gamma\}$.

La description de l'algèbre $\mathcal{L}$, ou seulement de la suite des $\widetilde{\Gamma}_n$, ne se révèle cependant pas aisée, même pour des exemples simples comme le laplacien sur $\mathbb{R}^N$. En prenant

$N = 1$ pour simplifier, la suite des $\Gamma_n f$, $n \geq 1$, $f \in C^\infty$, est formée des polynômes différentiels ${f^{(n)}}^2$ et constitue la famille des applications bilinéaires symétriques de $\mathcal{L}$. Les applications trilinéaires de $\mathcal{L}$ sont représentées par les crochets $[\Gamma_n, \Gamma_k]f$, $n, k \geq 1$, dont les expressions explicites sont déjà plus lourdes:

$$[\Gamma_n, \Gamma_k]f = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} f^{(n)} f^{(k+i)} f^{(k+n-i)} - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} f^{(k)} f^{(n+j)} f^{(n+k-j)}.$$

Notre connaissance de l'algèbre $\mathcal{L}$ est donc à ce stade relativement fragmentaire. Formellement, $\mathcal{L}$ est au moins décrite, par l'identification avec l'algèbre des champs formels, sur $\{-1, +1\}^N$, $\mathcal{A}$ étant alors de dimension finie. Nous n'avons pas su néanmoins exploiter cette information afin de décrire $\mathcal{L}$ dans ce cas. Compte tenu du théorème 3.2 ci-dessous, on peut espérer que la description complète de l'algèbre $\mathcal{L}$ puisse permettre une meilleure compréhension des inégalités de Sobolev logarithmiques ou des inégalités énergie-entropie (liant $\langle \Gamma f \rangle$ et $E(f^2)$).

Nous abordons donc à présent, avec ce nouvel outil algébrique, la question du développement de l'entropie d'une fonction. Par rapport au deuxième paragraphe, et ainsi qu'il est classique dans les travaux sur l'hypercontractivité et les inégalités de Sobolev logarithmiques, cette étude requiert plusieurs renforcements des hypothèses sous lesquelles nous travaillons. Bien que les résultats qui suivent puissent aussi s'énoncer, dans une certaine mesure, lorsque μ n'est pas finie, nous supposerons, afin de ne pas alourdir la rédaction, que μ est une mesure de probabilité. (Nous laissons le soin au lecteur de suppléer les détails nécessaires pour le cas général.) Outre l'invariance de μ, nous supposerons le semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$ symétrique par rapport à μ, c'est-à-dire telle que $\langle f, P_t g\rangle = \langle P_t f, g\rangle$ pour toutes fonctions f et g de $\mathrm{L}^2(\mu)$. De façon équivalente (sous réserve de la densité de $\mathcal{A}$), $\langle f, \mathrm{L}g\rangle = \langle \mathrm{L}f, g\rangle$ pour $f, g \in \mathcal{A}$. L'algèbre $\mathcal{A}$ sera supposée formée de fonctions bornées (pour simplifier), stable comme précédemment par L et $(P_t)_{t\geq 0}$, et aussi par la composition avec les fonctions de classe C^∞ (de classe C^∞ et nulles en 0 si μ n'est pas une probabilité). L'hypothèse principale sera en fait celle de diffusion: pour toute fonction C^∞ φ sur $\mathbb{R}^k$, et toute famille finie $F = (f_1, \ldots, f_k)$ de $\mathcal{A}$,

$$\mathrm{L}\varphi(F) = \nabla\varphi(F) \cdot \mathrm{L}F + \nabla^2\varphi(F) \cdot \Gamma(F, F). \tag{3.3}$$

Cette formule de changement de variables exprime essentiellement que L est un opérateur différentiel du second ordre sans terme constant. Elle revient aussi à dire que l'opérateur carré du champ Γ est un dérivation (*cf.* [B-É])) et que l'on a en particulier

$$\Gamma(\varphi(f), g) = \varphi'(f)\Gamma(f, g)$$

pour $f, g \in \mathcal{A}$ et φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Enfin, nous supposerons le générateur, ou le semigroupe, ergodique, c'est-à-dire tel que l'équation $\mathrm{L}f = 0$ n'a que les constantes comme solution ou, autrement dit, que $P_t f$ tend μ-presque partout vers $\langle f \rangle$ lorsque t tend vers l'infini.

L'entropie $E(f)$ d'une fonction à valeurs strictement positives f (de $\mathcal{A}$) sur E est définie par

$$E(f) = \langle f \log f \rangle - \langle f \rangle \log\langle f \rangle.$$

Les travaux sur les inégalités de Sobolev logarithmiques utilisent parfois de façon équivalente $E(f^2)$. Précisément, une inégalité de Sobolev logarithmique dans ce cadre revient à supposer l'existence d'une constante $\rho > 0$ telle que, pour toute fonction f de $\mathcal{A}$,

$$\rho E(f^2) \leq 2\langle f, -\mathrm{L}f\rangle = 2\langle \Gamma f\rangle.$$

De façon équivalente, par la formule de changement de variables et la propriété de diffusion, pour toute fonction $f > 0$ de $\mathcal{A}$,

$$2\rho E(f) \leq \langle f^{-1}\Gamma f\rangle = \langle f, \Gamma u\rangle \tag{3.4}$$

où l'on a posé $u = \log f$. Rappelons l'équivalence, d'après les travaux de L. Gross [Gr], de cette inégalité de Sobolev logarithmique pour L avec l'hypercontractivité du semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Le théorème suivant est le résultat principal concernant les développements d'entropies, qui vont donc s'effectuer à l'aide des applications multilinéaires $\widetilde{\Gamma}_n$ de l'algèbre $\mathcal{L}$. Les notations sont les mêmes que dans le théorème 2.1 et les hypothèses sont celles qui viennent d'être décrites. On conviendra en particulier d'écrire comme précédemment $Q_n(\widetilde{\Gamma})$ pour $Q_n(\widetilde{\Gamma}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} Q_n^{(i)}(0)\widetilde{\Gamma}_i$. Notons, à l'image des $Q_n(\Gamma)$, que

$$Q_{n+1}(\widetilde{\Gamma}) = -\lambda_n Q_n(\widetilde{\Gamma}) + [\mathrm{L} + \Gamma, Q_n(\widetilde{\Gamma})].$$

THÉORÈME 3.2. – *Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ à valeurs strictement positives et soit $u = \log f$; pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls avec $\lambda_0 = 0$, et tout $n \geq 1$,*

$$2E(f) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \langle f, Q_k(\widetilde{\Gamma})u\rangle - \frac{(-1)^n}{\pi_{n-1}} \int_0^\infty 2\langle P_t f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle \, dt.$$

Démonstration. – Soit $f > 0$ (ou mieux $f \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) fixée; à l'image du point (2.10) de la démonstration du théorème 2.1, la clef de la démonstration réside dans la propriété suivante : pour tout élément A de $\mathcal{L}$,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle P_t f, A(\log P_t f)\rangle = \langle P_t f, [\mathrm{L} + \Gamma, A](\log P_t f)\rangle. \tag{3.5}$$

Supposons pour la démonstration que A est une application n-linéaire symétrique de $\mathcal{A}^n$ dans $\mathcal{A}$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle P_t f, A(\log P_t f)\rangle \\
&\quad = \langle \mathrm{L}P_t f, A(\log P_t f)\rangle + n\langle P_t f, A\big((P_t f)^{-1}\mathrm{L}P_t f, \log P_t f, \ldots, \log P_t f\big)\rangle.
\end{aligned}$$

En écrivant plus simplement f pour $P_t f$ et u pour $\log P_t f$ pour tout t, l'hypothèse de diffusion sur L entraîne que $f^{-1}\mathrm{L}f = \mathrm{L}u + \Gamma u$. Le membre de droite de l'égalité précédente est alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{L}f, Au\rangle &+ n\langle f, A(\mathrm{L}u, u, \ldots, u)\rangle + n\langle f, A(\Gamma u, u, \ldots, u)\rangle \\
&= 2\langle \mathrm{L}f, Au\rangle - 2\langle f, [\mathrm{L}, A]u\rangle + n\langle f, A(\Gamma u, u, \ldots, u)\rangle \\
&= -2\langle f, \Gamma(Au, u)\rangle - 2\langle f, [\mathrm{L}, A]u\rangle + n\langle f, A(\Gamma u, u, \ldots, u)\rangle
\end{aligned}$$

où nous avons intégré par parties dans la dernière égalité. (3.5) s'ensuit par définition du crochet $[\Gamma, A]$. Par définition des opérateurs $\widetilde{\Gamma}_n$, nous avons donc que, pour tout $n \geq 1$ (*cf.* (2.10)),

$$(3.6)\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle P_t f, \widetilde{\Gamma}_n(\log P_t f)\rangle = \langle P_t f, [\mathrm{L}+\Gamma, \widetilde{\Gamma}_n](\log P_t f)\rangle = \langle P_t f, \widetilde{\Gamma}_{n+1}(\log P_t f)\rangle.$$

Le reste de la démonstration est très semblable à la fin de la démonstration du théorème 2.1. En vertu de (3.6) et des relations (2.7) sur les polynômes Q_n, pour tout $n \geq 1$,

$$(3.7)\quad \begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle P_t f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle =& \lambda_n \langle P_t f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle \\ &+ \langle P_t f, Q_{n+1}(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle. \end{aligned}$$

Pour tout $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} 2E(f) - 2E(P_T f) &= -2\int_0^T \frac{d}{dt}\langle P_t f \log P_t f\rangle\, dt \\ &= -2\int_0^T \langle \log P_t f, \mathrm{L} P_t f\rangle\, dt \\ &= \int_0^T 2\langle (P_t f)^{-1}\Gamma P_t f\rangle\, dt = \int_0^T 2\langle P_t f, \Gamma(\log P_t f)\rangle\, dt \end{aligned}$$

où nous avons fait usage à la fois des propriétés d'intégration par parties et de diffusion de l'opérateur L. Puisque $(P_t)_{t\geq 0}$ est ergodique, $E(P_T f)$ tend vers $\langle f\rangle \log\langle f\rangle$ quand T tend vers l'infini. Le cas $n = 1$ s'ensuit. Lorsque $n \geq 1$, en vertu de (3.7), pour tout $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T 2\langle P_t f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle\, dt \\ &\quad = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \frac{d}{dt}\langle P_t f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle\, dt - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T 2\langle P_t f, Q_{n+1}(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle\, dt \\ &\quad = \frac{1}{\lambda_n}\langle f, Q_n(\widetilde{\Gamma})u\rangle - \frac{1}{\lambda_n}\langle P_T f, Q_n(\widetilde{\Gamma})(\log P_T f)\rangle \\ &\qquad - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T 2\langle P_t f, Q_{n+1}(\widetilde{\Gamma})(\log P_t f)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

On conclut aisément grâce à l'hypothèse d'ergodicité. Le théorème 3.2 est démontré.

Le théorème 3.2 est donc l'analogue pour l'entropie du théorème 2.1. Comme dans ce dernier, on peut développer non seulement l'entropie, mais chacun des termes du développement en fonction des suivants. Le théorème 3.2 permet de "lire" les inégalités de Sobolev logarithmiques que l'on peut établir avec des hypothèses sur l'opérateur Γ_2. Rappelons tout d'abord que $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 = \Gamma$ et que $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2$. En choisissant alors $n = 2$ dans le théorème, on voit que si, pour un $\lambda_1 > 0$,

$$(3.8)\quad \langle f, \Gamma_2 u - \lambda_1 \Gamma u\rangle \geq 0$$

pour toute $f > 0$ de $\mathcal{A}$, on a alors une inégalité de Sobolev logarithmique (3.3) avec $\rho = \lambda_1$. La propriété (3.8) est la version intégrale du critère sur Γ_2 de D. Bakry et M. Émery [B-É]. La question de déterminer si, en retour, (3.4) entraîne (3.8) avec $\lambda_1 = \rho$ est toujours ouverte. Ce critère (3.8) s'exprime simplement en termes de Γ $(= \Gamma_1)$ et Γ_2 car $\widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2$, le crochet $[\Gamma, \Gamma]$ étant nul. Aux ordres supérieurs, les divers termes du développement de l'entropie de f ne peuvent plus, en revanche, se passer de ces crochets. On peut se demander néanmoins si ces termes conservent un signe constant (par exemple sous des hypothèses raisonnables de type courbure-dimension, comme (2.15)). Ceci n'est malheureusement pas le cas comme l'étude du cas gaussien va nous l'apprendre.

Nous reprenons ici le cadre du générateur d'Ornstein-Uhlenbeck décrit dans l'introduction, avec toutefois $N = 1$ pour simplifier. Cet exemple répond à toutes les hypothèses requises dans l'énoncé du théorème 3.2, avec pour algèbre $\mathcal{A}$ celle des fonctions bornées de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (ou celle des polynômes, quitte à contourner l'hypothèse de bornitude). Alors que la tentative de développement "à la main" entreprise dans l'introduction s'avère rapidement inextricable, le concept de crochet de Lie permet un calcul mécanique rapide et élémentaire de chacun des termes du développement. Soit u une fonction réelle suffisamment régulière; les gradients itérés $\Gamma_n u$, $n \geq 1$, sont décrits par les relations (2.3). Le calcul des premiers crochets pour u fournit quant à lui:

$$\begin{aligned}
[\Gamma_1, \Gamma_2]u &= \Gamma(u, \Gamma_2 u) - \Gamma_2(u, \Gamma u) = -2u''^3, \\
[\Gamma_1, \Gamma_3]u &= -6\big(u''^3 + u''u'''^2\big), \\
[\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_2]]u &= 6u''^4, \\
[\Gamma_1, \Gamma_4]u &= -14u''^3 - 36u''u'''^2 - 6u'''^2u^{(4)} - 8u''{u^{(4)}}^2, \\
[\Gamma_2, \Gamma_3]u &= 2u''{u^{(4)}}^2 - 4u''^3 - 6u'''^2u^{(4)} - 6u''u'''^2, \\
[\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_3]]u &= 6\big(3u''^4 + 7u''^2u'''^2\big), \\
[\Gamma_2, [\Gamma_1, \Gamma_2]]u &= 6u''^4 - 6u''^2u'''^2, \\
[\Gamma_1, [\Gamma_1, [\Gamma_1, \Gamma_2]]]u &= -24u''^5.
\end{aligned}$$

En rappelant la définition des opérateurs $\widetilde{\Gamma}_n$ (notamment grâce à la formule (3.2)), ainsi que l'expression des $Q_n(\widetilde{\Gamma})$ (avec pour $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers), on constate que

$$\begin{aligned}
Q_1(\widetilde{\Gamma})u &= \widetilde{\Gamma}_1 u = \Gamma_1 u = \Gamma u = u'^2, \\
Q_2(\widetilde{\Gamma})u &= \widetilde{\Gamma}_2 u - \widetilde{\Gamma}_1 u = \Gamma_2 u - \Gamma_1 u = u''^2, \\
Q_3(\widetilde{\Gamma})u &= \widetilde{\Gamma}_3 u - 3\widetilde{\Gamma}_2 u + 2\widetilde{\Gamma}_1 u = Q_3(\Gamma)u + [\Gamma_1, \Gamma_2]u = u'''^2 - 2u''^3,
\end{aligned}$$

et puis,

$$\begin{aligned}
Q_4(\widetilde{\Gamma})u &= {u^{(4)}}^2 - 12u''u'''^2 + 6u''^4, \\
Q_5(\widetilde{\Gamma})u &= {u^{(5)}}^2 - 30u'''^2u^{(4)} - 20u''{u^{(4)}}^2 + 120u''^2u'''^2 - 24u''^5, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Les premiers termes du développement de l'entropie d'une fonction positive régulière f par rapport à la mesure gaussienne μ sont alors

$$\begin{aligned} 2E(f) =& \langle f, u'^2 \rangle - \frac{1}{2!} \langle f, u''^2 \rangle + \frac{1}{3!} \langle f, u'''^2 - 2u''^3 \rangle - \frac{1}{4!} \langle f, u^{(4)^2} - 12u''u'''^2 + 6u''^4 \rangle \\ &+ \frac{1}{5!} \langle f, u^{(5)^2} - 30u'''^2 u^{(4)} - 20u''u^{(4)^2} + 120u''^2 u'''^2 - 24u''^5 \rangle - \cdots \end{aligned}$$

Comme annoncé, le terme $\langle f, u'''^2 - 2u''^3 \rangle$ (par exemple) n'est pas toujours de signe constant (considérer $f(x) = \exp(\alpha x^2)$, $\alpha < 1/2$). En fait, en fixant $\lambda_1 = 1$, il est facile de constater qu'il n'existe aucun $\lambda_2 > 0$ tel que $\langle f, Q_3(\widetilde{\Gamma}) f \rangle$ ait un signe constant. On ne peut donc espérer des inégalités analogues à (1.2) pour l'entropie.

Nous n'avons pas réussi à trouver à une formule simple de récurrence pour la suite de polynômes différentiels apparaissant dans le développement précédent. L'expression la plus simple reste finalement celle en termes des crochets de Lie des gradients itérés (3.2). Cette question est bien entendu liée à la recherche d'une bonne description de l'algèbre $\mathcal{L}$ dans les exemples simples. Il est curieux de noter sur le développement précédent que, si f est une fonction positive régulière telle que $(\log P_t f)''(x) \leq 0$ presque partout en t et x, alors

$$\langle f, u'^2 \rangle - \frac{1}{2!} \langle f, u''^2 \rangle \leq 2E(f) \leq \langle f, u'^2 \rangle - \frac{1}{2!} \langle f, u''^2 \rangle + \frac{1}{3!} \langle f, u'''^2 - 2u''^3 \rangle$$

et si $(\log P_t f)''(x) \geq 0$ les inégalités sont renversées. (Il est possile qu'un tel phénomène se reproduise à des ordres supérieurs.) Ces inégalités précisent l'inégalité de Sobolev logarithmique, mais pour des classes de fonctions difficiles à caractériser simplement. Les fonctions exponentielles, qui vérifient $(\log P_t f)''(x) = 0$, réalisent l'égalité $2E(f) = \langle f, u'^2 \rangle$ dans l'inégalité de Sobolev logarithmique (*cf.* [L1]). Les fonctions exponentielles annulent tous les termes du développement au delà du premier.

Les commentaires de conclusion qui suivent, et que nous laissons sous une forme assez formelle, nous ont été communiqués par P. Lecomte que nous remercions bien vivement.

Rappelons l'opérateur de dérivation de $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dans la direction de L :

$$\frac{d}{dt} \Phi(P_t f) \Big|_{t=0} = (\mathrm{L} \cdot \Phi)(f), \quad f \in \mathcal{A}.$$

Pour une application Φ, régulière en un sens convenable, les démonstrations par récurrence des théorèmes 2.1 et 3.2 permettent de montrer de la même façon, et avec des notations et hypothèses identiques (par exemple celles du théorème 3.2) que, pour toute f de $\mathcal{A}$,

$$\text{(3.9)} \quad \Phi(f) - \Phi\big(\langle f \rangle\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi_k} \big(Q_k(\mathrm{L}) \cdot \Phi\big)(f) - \frac{(-1)^n}{\pi_{n-1}} \int_0^\infty \big(Q_n(\mathrm{L}) \cdot \Phi\big)(P_t f)\, dt.$$

Il est intéressant de noter que le domaine d'applicabilité d'une telle formule paraît assez vaste, et que celle-ci contient en particulier les formules de Taylor habituelles (justifiant ainsi quelques commentaires précédents dans cette direction). En effet, pour tout u réel fixé, considérons le générateur L agissant sur toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable par

$$\mathrm{L} f(x) = (u - x) f'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

associé donc au semigroupe des translations. Il est facile de vérifier que pour $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers négatifs, $Q_n(\mathrm{L})(f)(x) = (u-x)^n f^{(n)}(x)$. Considérons alors, dans (3.9), Φ l'évaluation en un point x; on a donc, pour f de classe C^n,

$$f(x) - f(u) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)}{k!}(u-x)^k f^{(k)}(x) - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty (u-x)^n (P_t f)^{(n)}(x)dt,$$

soit, pour $u = x + h$, la formule de Taylor avec reste intégral. Pour $u = 0$, il s'agit d'une formule appelée formule de Bernoulli. D'autres choix des λ_n fourniraient des généralisations de ces deux formules.

Dans un autre registre, supposons Φ de la forme $\Phi(f) = \langle\varphi(f)\rangle$, $f \in \mathcal{A}$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors, sous réserve de propriétés de stabilité de $\mathcal{A}$ et de régularité de φ, on peut considérer l'application $\widehat{\varphi}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ définie par $\widehat{\varphi}(f) = \varphi(f)$. Par invariance, on vérifie immédiatement que pour toute f de $\mathcal{A}$,

$$(\mathrm{L}\cdot\Phi)(f) = \langle[\mathrm{L},\widehat{\varphi}](f)\rangle,$$

où $[\mathrm{L},\widehat{\varphi}] = \mathrm{L}\cdot\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}\cdot\mathrm{L}$ est le crochet des "champs de vecteurs" L et $\widehat{\varphi}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\big(Q_n(\mathrm{L})\cdot\Phi\big)(f) = \big\langle Q_n(\mathrm{ad}_{\mathrm{L}}(\widehat{\varphi})(f)\big\rangle$$

(où $\mathrm{ad}_{\mathrm{L}} = [\mathrm{L},\cdot]$). Le développement (3.9) montre donc dans ce cas que la différence $\langle\varphi(f)\rangle - \varphi(\langle f\rangle)$ se représente dans l'algèbre de Lie (des "champs de vecteurs") engendrée par L et $\widehat{\varphi}$. Le fait que cette différence puisse se développer, dans les théorèmes 2.1 et 3.2, dans l'algèbre engendrée par L et Γ plutôt que celle engendrée par L et $\widehat{\varphi}$ tient à la nature particulière de la fonction φ dans ces deux théorèmes. Supposons en effet, en suivant [L1], que φ soit de la forme $\varphi''(u) = u^r$, $u > 0$, pour un réel r. Alors, pour $f \in \mathcal{A}$ à valeurs positives, et sous les hypothèses du théorème 3.2 par exemple,

$$\langle\varphi(f)\rangle - \varphi(\langle f\rangle) = \int_0^\infty F(t)\,dt$$

avec $F(t) = \langle(P_t f)^r\Gamma(P_t f)\rangle$, $t \geq 0$. Posons $s = -r/r+2$. On vérifie que (*cf.* [L1])

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F(t) = (1+s)^2\big[\langle\Gamma_2\big(\theta(f)\big)\rangle + \langle\theta(f)^{-1}\mathrm{L}\big(\theta(f)\big)\Gamma\big(\theta(f)\big)\rangle\big]$$

où $\theta(f) = f^{r+2/2} = f^{1/1+s}$. Or, la formule du changement de variables sur Γ_2 [B-É] montre que si ψ est telle que $\psi'(u) = u^{-s}$, $u > 0$,

$$\langle f^{2s}\Gamma_2\big(\psi(f)\big)\rangle = \langle\Gamma_2 f\rangle + s\langle f^{-1}\mathrm{L}f\Gamma f\rangle - s(1-s)\langle f^{-2}(\Gamma f)^2\rangle.$$

Ainsi, en substituant $\theta(f)$ à f,

$$\begin{aligned}&\langle\theta(f)^{2s}\Gamma_2\big(\psi\circ\theta(f)\big)\rangle \\ &\qquad= \langle\Gamma_2\big(\theta(f)\big)\rangle + s\langle\theta(f)^{-1}\mathrm{L}\big(\theta(f)\big)\Gamma\big(\theta(f)\big)\rangle - s(1-s)\langle\theta(f)^{-2}\big(\Gamma\big(\theta(f)\big)\big)^2\rangle.\end{aligned}$$

C'est donc seulement pour $s = 0$ ou $s = 1$ que $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F(t)$ s'exprime uniquement en terme de l'opérateur Γ_2, ces deux cas correspondant respectivement à variance et entropie ($r = 0$ et $r = 1$). Cette observation justifie ainsi l'intérêt particulier accordé ici aux développements de la variance et de l'entropie. La situation générale demanderait d'inclure des termes de la forme$\langle\theta(f)^{-2}(\Gamma(\theta(f)))^2\rangle$. En fait, une inégalité sur Γ_2 et $\Gamma_1 = \Gamma$ seuls ne saurait entraîner par exemple des inégalités de Sobolev (au delà de l'exposant 2) (*cf.* l'exemple gaussien). Les gradients Γ et Γ_2 doivent pour cela être complétés par des termes $(\mathrm{L}f)^2$ dimensionels qui sortent de l'algèbre $\mathcal{L}$ engendrée par L et Γ (cf. [Ba2], [L1]). Il est possible qu'il faille inclure dans ce but l'opérateur Γ_0 produit de deux fonctions. Cette question est étroitement liée aux formules de changement de variables dans les gradients itérés Γ_n. Nous n'avons pas poursuivi dans cette direction.

Je remercie vivement D. Bakry de toutes ses remarques et commentaires, tant à l'origine de ce travail que durant son élaboration. Avec beaucoup d'intérêt, P. Lecomte a commenté et interprété du point de vue algébrique l'algèbre $\mathcal{L}$ et les développements associés. Il est l'auteur des commentaires de conclusion et je le remercie bien vivement de m'autoriser à inclure ici ces remarques. Je remercie C. Houdré de m'avoir communiqué ses articles [H-K] et [H-PA], C. Roger pour ses commentaires "algébriques" et ses références bibliographiques et D. Michel et M. Émery pour leur intérêt.

RÉFÉRENCES

[Ba1] D. Bakry, *Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques. Séminaire de Probabilités XIX* (*Lecture Notes in Math.*, Vol. 1123. 1985, p. 130-174, Springer-Verlag).

[Ba2] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. École d'Été de Probabilités de St-Flour 1992* (*Lecture Notes in Math.*, Vol. 1581, 1994, p. 1-114, Springer-Verlag).

[Ba3] D. Bakry, *Une suite d'inégalités remarquables pour les opérateurs ultrasphériques* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 318, 1994, p. 161-164).

[B-É] D. Bakry et M. Émery, *Diffusions hypercontractives. Séminaire de Probabilités XIX* (*Lecture Notes in Math.*, Vol. 1123, 1985, p. 179-206, Springer-Verlag).

[Be] A. Bentaleb, *Développement de la moyenne d'une fonction pour la mesure ultrasphérique* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 317, 1993, p. 781-784).

[B-G-M] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne* (*Lecture Notes in Math.*, Vol. 194, 1971, Springer-Verlag).

[B-H] N. Bouleau et F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space.* de Gruyter, 1991.

[D-M-M] C. Dellacherie, B. Maisonneuve et P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel. Chapitres XVII à XXIV : Processus de Markov (fin), Compléments de calcul stochastique.* Herman, 1992.

[G-H-L] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian geometry.* Springer Verlag, 1987.

[Ge] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras, III* (*Ann. Math.*, Vol. 88, 1968, p. 1-34).

[Gr] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities* (*Amer. J. Math.*, Vol. 97, 1975, p. 1061-1083).

[H-K] C. Houdré et A. Kagan, *Variances inequalities for functions of Gaussian variables* (*J. Theoretical Prob.*, Vol. 8, 1995, p. 23-30).

[H-PA] C. Houdré et V. Perez-Abreu, *Covariance identities and inequalities for functionals on Wiener and Poisson spaces* (*Ann. Probability*, 1993, à paraître).

[H] Y. Hu, *Itô-Wiener chaos expansion with exact residual and correlation, variance inequalities.* Prépublication, 1993.

[L1] M. LEDOUX, *On an integral criterion for hypercontractivity of diffusion semigroups and extremal functions* (*J. Funct. Anal.*, Vol. 105, 1992, p. 444-465).

[L2] M. LEDOUX, *L'algèbre de Lie des gradients itérés d'un générateur markovien* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 317, 1993, p. 1049-1052).

N-R A. NIJENHUIS et R. RICHARDSON, *Deformation of Lie algebra structures* (*J. Math. Mech.*, Vol. 17, 1967, p. 89-105).

(Manuscrit reçu le 4 octobre 1993;
révisé le 17 février 1994.)

M. LEDOUX
Département de Mathématiques,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul-Sabatier,
31062 Toulouse, France.