☢ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES • 23 Juin 2007. ☢

TOPOLOGIE[1] 1.

1. GÉNÉRALITÉS : OUVERTS, FERMÉS...

Exercice 1. *Soient E un espace métrique, $A, B \subset E$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que $A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$ et $A^\circ \subset B^\circ$ puis $\overline{E \setminus A} = E \setminus (A^\circ)$. Enfin, montrer les inclusions*

$$\overline{\cap_{i\in I} A_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i},\ \cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I} A_i},\ \Big(\cap_{i\in I} A_i\Big)^\circ \subset \cap_{i\in I} A_i{}^\circ,\ \cup_{i\in I} A_i^\circ \subset \Big(\cup_{i\in I} A_i\Big)^\circ.$$

Étudier les cas d'égalité lorsque I est fini et dans le cas général montrer que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 2. *Soient E un espace métrique, A une partie de E. On désigne par A' l'ensemble des points d'accumulation de A c'est à dire les points adhérents à A mais non isolés. Montrer que A' est fermé dans E ; en est-il de même pour l'ensemble des points isolés de A ?*
Soit B une autre partie de E, montrer que $(A \cup B)' = A' \cup B'$ et $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. Montrer que cette dernière inclusion peut etre stricte.

Exercice 3. *Soient E un espace métrique, A une partie de E, on appelle frontière de A l'ensemble* $\mathrm{fr(A)} := \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})}$.
- *Montrer que A ouvert implique* $\mathrm{fr(A)}^\circ = \emptyset$. *Ce résultat subsiste-t'il si A est fermé ? quelqonque ?*
- *Montrer que A ouvert $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{fr(A)} = \emptyset$.*
- *Montrer que A fermé $\Leftrightarrow \mathrm{fr(A)} \subset \mathrm{A}$.*
- *Montrer que A ouvert et fermé $\Leftrightarrow \mathrm{fr(A)} = \emptyset$.*
- *Montrer que* $\mathrm{fr}(\overline{\mathrm{A}}) \subset \mathrm{fr(A)},\ \mathrm{fr(A^\circ)} \subset \mathrm{fr(A)}$ *et montrer sur des exemples que ces inclusions peuvent etre strictes.*

Exercice 4. *Soient E un espace vectoriel normé, A, B deux parties de E.*
- *Si A est ouvert, montrer que $A + B$ l'est aussi.*
- *Si A et B sont compacts, montrer que $A + B$ est aussi compact.*
- *Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé.*
- *Si A et B sont fermés, $A + B$ est-il fermé ?*

Exercice 5. *Si Ω est un ouvert d'un espace topologique E, montrer que $\Omega \cup (E \setminus \overline{\Omega})$ est dense dans E.*

2. ESPACES NORMÉS, ESPACES MÉTRIQUES.

Exercice 6. *Soit $Z = (z_0, \dots, z_n), \in \mathbb{C}^{n+1}$ (les nombres complexes z_j étant deux à deux distincts) ; si $P \in \mathbb{C}[x]$, on pose $\|P\|_Z := \sum_{j=0}^n |P(z_j)|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{C}_n[x]$ et à l'aide des polynômes de Lagrange ($L_i(z) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^n (z - z_j)(z_i - z_j)^{-1}$) montrer que toutes ces normes sont équivalentes.*

Exercice 7. *Soient $E := \big\{ f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \ :\ f(0) = 0 \big\}$. On définit :*

$$n(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)| \qquad \text{et} \qquad N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

montrer que n et N sont deux normes équivalentes sur E et que (E, N) est complet.

Exercice 8. *Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.*
1) À quelle condition l'application $N_A \ :\ \sum_{k=0}^d b_k X^k \in \mathbb{C}[X] \mapsto N_A(P) = \sum_{k=0}^d |a_k b_k|$ est elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?
2) À quelle condition N_A et N_B sont elles équivalentes ?
3) Existe-t-il une suite A telle que la dérivation $P \mapsto P'$ soit continue dans $(\mathbb{C}[X], N_A)$?

[1] 28 février 2008– Lassère Patrice, Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE

Exercice 9. *Soient* $d \in \mathbb{N}^\star,\ I := [0,1]$. *Pour* $f \in \mathscr{C}^d(I)$ *posons :*

$$N_1(f) \ = \sup_{x\in I,\ 0\le k\le d} |f^{(k)}(x)|, \quad N_2(f) \ = \ \max\left\{ |f(0)|, |f'(0)|, \dots, |f^{(d-1)}(0)|, \sup_{x\in I} |f^{(d)}(x)| \right\}.$$

Montrer que N_1 *et* N_2 *sont deux normes équivalentes sur* $\mathscr{C}^d(I)$ *(on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange...).*

Exercice 10. *Pour* $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *on pose*

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 {f'}^2(t)dt \right)^{1/2}.$$

1) Montrer que N *est une norme sur* $\mathscr{C}^1([0,1])$.
2) Montrer que $\|f\|_\infty \le \sqrt{2}N(f),\ \forall\, f \in \mathscr{C}^1([0,1])$.
3) $\|\cdot\|_\infty$ *et* N *sont-elles équivalentes sur* $\mathscr{C}^1([0,1])$ *?*

Exercice 11. *Soient* E *un espace vectoriel normé,* F *un sous espace vectoriel de* E. *Montrer que l'adhérence de* F *est encore un sev de* E. *Montrer que* F *est soit d'intérieur vide soit égal à* E. *Donner l'exemple d'un espace vectoriel normé qui admet un sous espace strict dense.*

Exercice 12. *Soit* E *un espace vectoriel normé et* C *une partie convexe de* E. *Montrer que* $\overline{C}$ *et* C^o *sont convexes.*

3. CONTINUITÉ.

Exercice 13. *Soient* E, F *deux espaces métriques et* $f\ :\ E \to F$. *Montrer l'équivalence entre*
1) $f \in \mathscr{C}(E,F)$.
2) $\forall\, A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 14. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Si l'image réciproque par* f *de tout compact est un compact, montrer que* f *est fermée.*

Exercice 15. *On considère les deux normes sur* $\mathbb{R}[X]$ *définies pour* $P = \sum_k a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ *par*

$$N_1(P) = \sum_k |a_k|, \qquad N_2(P) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P(x)e^{-|x|} \right|.$$

Dans les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}[X], N_1)$, $(\mathbb{R}[X], N_1)$ *étudier la continuité des applications*

$$T \ :\ \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto T(P) = P(X+1) \end{cases} \qquad L_Q \ :\ \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto L(P) = PQ \end{cases}$$

Exercice 16. *Soit* E *un espace vectoriel normé.*
1) Soit T *une forme linéaire sur* E, *montrer que* T *est continue si, et seulement si* $\ker(T)$ *est fermé.*
2) Soient E *un espace vectoriel normé,* $T \in E' \setminus \{0\}$. *Montrer que pour tout* $a \in E\ :\ dist(a, KerT) = \dfrac{|T(a)|}{\|T\|}$.
3) Dans l'espace de Banach $c_0(\mathbb{N})$ *des suites réelles convergeant vers* 0 *(muni de la norme "sup") on considère l'hyperplan fermé (pourquoi ?)* $H = \{x \in c_0(\mathbb{N})\ :\ \sum_{n\ge1} \frac{x_n}{2^n} = 0\}$. *Si* $a \notin H$, *montrer qu'il n'existe pas* $b \in E$ *tel que* $dist(a, H) = d(a,b)$.

Exercice 17. *Soit* H *un espace de Hilbert, montrer que l'ensemble des couples de vecteur* $(x,y) \in H \times H$ *libres dans* H *est un ouvert de* $H \times H$.

Exercice 18. *Soient* I, J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$, $g\ :\ I \to J$ *une application continue et* $f\ :\ J \to \mathbb{R}$ *une application. Si* $f \circ g$ *est continue sur* I, *montrer que* f *l'est sur* $g(I)$.

4. TOPOLOGIE DANS $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

Exercice 19. *Soit* $\mathscr{H} = \left\{ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+k} \ \ :\ \ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^\star \right\}$. *Montrer que* $\mathscr{H}$ *est une partie dense dans* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose*

$$\omega_n := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n^2} \right\}.$$

Trouver une condition nécéssaire et suffisante pour que $\Omega := \cup_{n \geq 1} \omega_n$ soit fermé.

Exercice 21. *Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.*

1) Si G' est non vide, montrer que $0 \in G'$. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Si G' est vide montrer qu'il existe $a \in G \setminus \{0\}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in]0, 2\pi[$ tel que $x_n \equiv n\alpha(2\pi)$. Montrer que $X = \{x_n, \ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$ et $Y = \{cos(n\alpha), \ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'ensemble $P(f)$ de ses périodes est un sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$. Si 1 et $\sqrt{2} \in P(f)$, que dire de $(1 - \sqrt{2})^n$? puis de f ?

Exercice 22. *On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien ; montrer que $F := \{ (A, B, C) \in \mathscr{P}^3$ tels que A, B, C soient alignés $\}$ est une partie fermée. Soient K_1, K_2, K_3 trois compacts de $\mathscr{P}$ tels qu'aucune droite ne rencontre simultanément ces trois compacts. Montrer que parmi les cercles rencontrant à la fois K_1, K_2, K_3 il y en a un de rayon maximum et un de rayon minimum.*

Exercice 23. *Pour $A \subset \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ on pose $A_\delta = \cup_{x \in A}]x - \delta, x + \delta[$. Montrer que A_δ est un ouvert contenant A, que $\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^\star} A_{\frac{1}{n}}$; en déduire que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'intersection dénombrable d'une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Enoncer une propriété analogue pour les ouverts.*

Exercice 24. *Soit $v \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathscr{O}_3^+(\mathbb{R})$. Préciser l'adhérence dans $\mathbb{R}^3$ de l'ensemble $\{ A^n v, \ n \in \mathbb{Z}\}$.*

5. TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25. *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 26. *Soit F un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ possédant au moins une matrice inversible, montrer que $F \cap M_n(\mathbb{R})$ est dense dans F.*

Exercice 27. *Dans $M_n(\mathbb{R})$ montrer que l'adhérence des matrices diagonales $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices triangularisables. Même question dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 28. *Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$; montrer que l'intérieur de $\mathscr{D}_n$ est l'ensemble $\mathscr{D}'_n$ des matrices admettant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que $\mathscr{D}_n$ et $\mathscr{D}'_n$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 29. *Déduire le théorème de Cayley-Hamilton de la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 30. *Montrer que l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[x]$ qui à $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\varphi(A) := \pi_A$ son polynôme minimal, n'est pas continue, les deux espaces étant munis de leur topologie usuelle d'espace vectoriel normé (prendre $A = I_n$ et utiliser la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ vue plus bas...).*

Exercice 31. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, un polynôme non constant. L'objectif est de déterminer les points isolés de $\mathscr{E} := \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ P(A) = 0 \}$*

1) Soit $A \in \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$, montrer qu'il existe un voisinage V de l'origine dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V$.

2) Montrer que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, en déduire que $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) Soit λ une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2 ; à l'aide des matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1} E_{12}$, montrer que $\lambda I_n \notin \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$.

4) Montrer que $\mathrm{Iso}(\mathscr{E})$ est l'ensemble (éventuellement vide) des matrices scalaires λI_n où λ est racine de P de multiplicité 1.

Exercice 32. *Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{C})$.*

- *Montrer que $\mathscr{N}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.*
- *Quel est son intérieur ?*
- *Si $n \geq 2$, montrer que $\mathscr{N}$ est sans points isolés.*

Exercice 33. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$ et $\mathscr{C}_A = \{ P^{-1}AP \, ; \, P \in GL_n(\mathbb{C}) \}$*

– *Si A est nilpotente, montrer que $0 \in \overline{\mathscr{C}_A}$.*
– *Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathscr{C}_A$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 34. *Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$ l'adhérence des ensembles*

$$\mathscr{A} = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \exists p \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } A^p = I_n \,\}$$
$$\mathscr{B} = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisables à valeurs propres de module } 1 \,\}$$

est l'ensemble des matrices à valeurs propres de module 1 (quelle relation y a t'il entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$?).

Exercice 35. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (même conclusion dans $GL_n(\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$).*

Exercice 36. *Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive. Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et la décomposition est unique. Montrer qu'alors la bijection ainsi définie entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme topologique.*

Exercice 37. *Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que les valeurs propres des éléments de G sont de module 1. Si $O_n(\mathbb{R}) < G$ et $GL_n(\mathbb{R})$ montrer qu'alors $G = GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. $O_n(\mathbb{R})$ est maximal)(on pourra utiliser l'exercice précédent). Même remarque que dans l'exercice précédent.*

Exercice 38. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ une partie fermée et $\mathcal{F} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ sp(M) \subset F\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 39. *Soit $K \subset M_n(\mathbb{C})$ une partie compacte et $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes valeur propre d'au moins un élément de K. Montrer que $\mathscr{K}$ est compact.*

Exercice 40. *Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}_n$ des projecteurs orthogonaux est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 41. *Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ ensemble des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$ est soit vide soit dense dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$.*

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr` & `lassere@wanadoo.fr`