AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES

Samedi 20 ctobre 2007, Formules de Taylor, Applications.

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, convexe et majorée : montrer que f est constante.*

Exercice 2. *Avec la formule de Taylor-Lagrange, montrer que le millième chiffre de l'écriture décimale de la racine carrée de $N = 111\dots111 = (10^{1998}-1)/9$ vaut 1.*

Exercice 3. *1) Appliquer convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^x$ pour en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.*

2) En appliquant convenablement la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto e^{-x}$, montrer que pour $n \geq 3$ l'entier le plus proche de $n!/e$ est $n!\sum_0^n (-1)^k/k!$ et est divisible par $n-1$.

Exercice 4. *Soit $f \in \mathscr{C}^2([-a,a])$, si $f(0)=0$ montrer que la suite définie pour $n > a^{-1}$ par*

$$u_n = f(n^{-2}) + f(2n^{-2}) + \dots + f(n^{-1})$$

converge et préciser sa limite.

Exercice 5. $\lim_{n\to\infty} \sin(k/n)\sin(k/n^2) = ?$

Exercice 6. *Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable et telle que $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'''(c) \geq 3$.*

Exercice 7. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{R} \ :\quad |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 8. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^2(I,I)$ admettant un point fixe $\alpha \in I$ tel que $0 < |f'(\alpha)| < 1$. On considère la suite récurrente $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Si la suite $(x_n)_n$ converge vers α, montrer que la convergence est géométrique, i.e. il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x_n - \alpha = af'(\alpha)^n + bf'(\alpha)^{2n} + o(f'(\alpha)^{2n}).$$

Exercice 9. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(]-a,a[)$ telle que $f^{(n)} \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

1) Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(k)}(0)x^k/k!,\ \forall x \in]-a,a[$.

2) Le résultat subsiste-t-il si on a seulement $f^{(2n)} \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$?

Exercice 10. *Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0.$$

Exercice 11. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application n fois dérivable. Fixons $x \in \mathbb{R}$, si $f^{(n+1)}(x)$ existe et est différent de zéro, alors pour $h > 0$ la formule de Taylor-Lagrange assure de l'existence d'un réel $\theta(h)$ tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h)$$

montrer que

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 12. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tous points de $\mathbb{R}^\star$, qu'elle est continue et dérivable à l'origine et nulle part deux fois dérivable. Toutefois montrer que f admet à l'origine un développement limité à tout ordre.

Exercice 13. *Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^2}\right) = \frac{3}{8}.$$

Exercice 14. *1) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

2) Si f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et si f'' est bornée et intégrable sur $[0,1]$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

Exercice 15. *(Exemple d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor en $x=0$ admet un rayon de convergence nul). Soit*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m}\cos(m^2x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x),$$

montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas développable en série entière à l'origine.

Exercice 16. *(Kolmogorov 1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que*

$$M_k := \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad \forall\, k = 0,1,2.$$

1) On suppose que $I = \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \le 2\sqrt{M_0M_1}$.

2) On suppose que $I = [-c,c]$, $c \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{c} + (x^2+c^2)\frac{M_2}{2c}, \quad \forall\, x \in [-c,c].$$

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0M_1} \quad si \quad c \ge \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

3) On suppose que $I = (c,+\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $M_1 \le 2\sqrt{M_0M_1}$.

Exercice 17. *(Kolmogorov 2) Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On propose une preuve assez inhabituelle du résultat suivant :*

« Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $[a,+\infty[$, il en est de même pour les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n)}$. »

1) Soit $\delta > 0$, pour $Q = \sum_{k=0}^{n} c_kx^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$N_1(Q) = \max_{0\le k\le n} |c_k| \quad et \quad N_2(Q) = \sup_{x\in[0,\delta]} |Q(x)|.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\star$ telles que

$$\mu N_2(Q) \le N_1(Q) \le \lambda N_2(Q), \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2) Pour tout $x \ge a$ et $\delta \ge u > 0$ montrer que (utiliser Taylor-Lagrange)

$$\left|f(x) + f'(x)u + \dots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!}\right| \le \|f\|_\infty + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty := M,$$

où $\|g\|_\infty := \sup_{x\ge a} |g(x)|$.

En déduire que pour tout $x \ge a$ (en notant $P_x(X) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}X^k \in \mathbb{R}_n[X]$) on a :

$$N_2(P_x) \le M.$$

3) En déduire la version faible des inégalités de Kolmogorov

$$\forall\, k \in \{0,1,\dots,n\} \ : \ \|f^{(k)}\|_\infty \le k!\lambda M.$$

Exercice 18. *(Un théorème d'Emile Borel) Soit* $(a_n)_n$ *une suite de nombres réels et* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *une application à support compact dans* $]-2,2[$ *égale à* 1 *sur* $[-1,1]$. *Montrer qu'il existe une suite de nombres réels* $(\lambda_n)_n$ *vérifiant*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq 2^{-n}, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n-1.$$

Où $f_n(x) := \dfrac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x)$. *En déduire l'existence d'une fonction* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 19.

Exercice 20.

16 octobre 2007 **Agrégation Interne de Mathématiques.** Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`