AGRÉGATION INTERNE, **SÉRIES ENTIÈRES**, SAMEDI 20 NOVEMBRE 2004

1 Propriétés « Classiques ».

Exercice 1 *On considère la série entière* $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1) Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *et* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *?*
2) En déduire le rayon de convergence R *de* f.
3) Montrer que la série entière n'est pas normalement convergente sur $[-1,1[$.
4) Montrer que $\forall\, x \in [-1,0] \ : \ \left|\sum_{k\geq n} x^k \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
5) En déduire que la série converge uniformément sur $[-1,0]$ *puis sur* $[-1,a],\ 0<a<1$.
6) La série entière converge-t-elle normalement sur $[-1,0]$ *?*
7) Montrer que f *est croissante sur* $[0,1[$.
8) Montrer que $\lim_{x\to 1_-} f(x)$ *existe dans* $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$, *on la note* L.
9) Montrer successivement que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$ *:*

$$L := \lim_{x\to 1_-} f(x) = \sup_{x\in[0,1[} f(x) \geq \sup_{x\in[0,1[} \sum_{n=1}^{N} x^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et en déduire L.
10) La série entière converge-t-elle uniformément sur $[-1,1[$ *?*

Exercice 2 *On considère une fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *vérifiant* $f'(0)=1$ *et*

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'alors $f(x) = \sin(x)$.

1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}$ *est infini. 2) Avec la formule de Taylor-Lagrange (par exemple) montrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad : \quad \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right) = 0.$$

3) En déduire que f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

On considère alors pour tout $k \in \mathbb{N}$***, la fonction*** $g^{(k)} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***égale à*** $f^{(k)}$ ***sur*** $]-\pi,\pi]$ ***et prolongée sur*** $\mathbb{R}$ ***par*** 2π ***périodicité.***

4) Montrer que $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad : \quad c_n(g^{(k)}) := \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^{(k)}(t)e^{-int}dt = (in)^k c_n(g)$.
5) Montrer que $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad : \quad |c_n(g^{(k)})| \leq 1$.
6) Supposons maintenant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\quad |n_0| \geq 2 \quad$ *et* $\quad |c_{n_0}(g)| > 0$.
7) Montrer que $\lim_{k\to+\infty} |c_{n_0}(g^{(k)})| = +\infty$ *et en déduire que* $c_n(g) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$
8) En déduire que la série de Fourier de g *est de la forme* $c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} = a\cos(x) + b\sin(x) + c$ *avec* $a,b,c \in \mathbb{R}$ *et coïncide avec* g *sur* $\mathbb{R}$.
9) En déduire que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c, \quad \forall\, x \in]-\pi,\pi[$.
10) En exploitant les trois dernières hypothèses

$$f'(0) = 1, \quad \|f\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f'\|_\infty \leq 1,$$

montrer que (faire un DL à l'origine)

$$f(x) = \sin(x), \quad \forall\, x \in]-\pi, \pi[.$$

11) Enfin, montrer que $\quad f(x) = \sin(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Exercice 3 *Soit* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *(montrer que le reste dans la formule de Taylor avec reste intégral tens vers zéro avec* n*). Montrer que le résultat subsiste si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)} \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *On admet que* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Calculer* $\int_0^1 \log(t)\log(1-t)dt$.

Exercice 5 *On définit la suite* $(u_n)_n$ *par* $u_0 = u_1 = 1$ *et* $\forall\, n \geq 2\ :\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n$.

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière* $f(z) := \sum_{n\geq 0} u_n z^n$ *est supérieur ou égal à* $1/2$.
2. *Calculer la somme de la série et en déduire une expression de* u_n.

Exercice 6 *On pose* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$.
1) Déterminer le rayon de convergence de la série et montrer que f *vérifie l'équation différentielle* $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.
2) Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^\star$ *(solution :* $y(x) = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$*), utiliser un DL à l'ordre 1 pour fixer la constante et en déduire que*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{4}{3} - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Exercice 7 *Soit* $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Si* $S(0) = 0$ *et* S *n'est pas identiquement nulle, montrer* $z = 0$ *est un zéro isolé de* S.

Exercice 8 *Montrer que la longueur d'une ellipse de demi-axes* a, b *est*

$$L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n} \frac{C_{4n}^{2n} C_{2n}^n}{4^{3n}(1-4n)}.$$

Exercice 9 *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Si* $|a_1| > \sum_{n\geq 2} n|a_n|$, *montrer que* f *est injective sur* $D(0,1)$ *et que la série converge sur* $\overline{D(0,1)}$.

Exercice 10 *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence infini. Calculer* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$ *pour tout* $(r, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ *et en déduire que s'il existe* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^2$ *tels que* $|f(z)| \leq \gamma|z|^\alpha + \beta$ *alors* $f \in \mathbb{C}[z]$.

Exercice 11 *Montrer que* $\forall\, t \in [0, \pi/2]\ :\ \sin(t) \geq t - \frac{t^3}{6}$, *en déduire qu'il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star\ :\ \left|\frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}\right| \leq cn$. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 1} \sin^{-1}(n\pi\sqrt{3})z^n$ *?*

Exercice 12 *Développer en série entière* $f(x) := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.

Exercice 13 *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ *une serie entière. On suppose que son rayon de convergence est strictement positif, que* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ a_n \in \{-1, 1\}$, *et que* $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0\ |f^{(p)}(x)| \leq 1$. *Montrer que* $f(z) = e^{-z}$.

Exercice 14 *Montrer que* $f(x) := \sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}} e^{inx}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et que pour tous* $p, n \in \mathbb{N}$: $|f^{(p)}(0)| \geq n^p e^{-\sqrt{n}}$. f *est elle développable en serie entière à l'origine ?*

Exercice 15 *La* **suite de Fibonacci** *est définie par* $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n \geq 2$.

1. *Montrer que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.
2. *Montrer que le rayon de convergence de* $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ *est supérieur ou égal à* $1/2$ *et inférieur ou égal à* 1.
3. *Montrer que pour* $|x| < 1/2$: $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + x - 1}$.
4. *En déduire l'expression de* a_n.
5. *On pose* $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Montrer que* $r_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{r_n}$, *montrer que la suite* $(r_n)_n$ *converge et préciser sa limite.*
6. *Quel est le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ *et quel est le plus grand disque ouvert sur lequel*
$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}\ ?$$

Exercice 16 *Déterminer le développement en série entière de* $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ *au voisinage de* $\zeta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 *Pour* $A \in M_d(\mathbb{C})$ *quel est le rayon de convergence de* $f(z) := \sum_{n\geq 0} tr(A^n) z^n$ *? Donner une expression de* $f(z)$ *en fonction du polynôme caractéristique de* A *et de sa dérivée.*

Exercice 18 *Développer en série de Fourier la fonction* $\quad f(x) = \dfrac{1 + \cos(x)}{4 - 2\cos(x)}$.

2 Séries entières, Combinatoire et Probabilités.

Exercice 19
1) Soit I_n *le nombre d'involutions de* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Vérifier que l'on a :* $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. *En déduire un équivalent de* I_n. *Etudier* $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ *et expliciter sa somme.*
2) Soit d_n *le nombre de dérangements (i.e. sans points fixes) de* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *montrer que* $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. *Application : n invités laissent leur chapeau au vestiaire puis repartent les uns aprés les autres en reprenant un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité* p_n *qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas tends vers* e^{-1} *lorsque* n *tends vers* $+\infty$.

Exercice 20 *Soit* T_n *le nombre de partitions d'un ensemble à* n *éléments. Montrer que* $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T_k$ *puis* $\sum_{n\geq 0} \frac{T_n x^n}{n!} = \exp(e^x - 1)$.

Exercice 21 *Expliciter le nombre* a_n *de facons de composer une somme de* n *francs avec des pièces de* 1, 2 *et* 5 *francs.*

Exercice 22 *Dénombrer le nombre de manières de distribuer* n *euros à* p *personnes (faire un calcul direct ou bien utiliser les séries entières).*

Exercice 23 *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *une suite de variable aléatoires indépendantes, de même loi, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *où les* a_i *sont des entiers positifs dont le p.g.c.d. est* 1. *On pose* $S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *et on définit pour* $k \in \mathbb{N}$ *l'événement*

$$A_k = \{\exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ S_n = k\}.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} p(A_k) = \frac{1}{E(X_1)}$.

Méthode : *Si* $f(s) := E(s^{X_1})$*, montrer que*

$$\sum_{k\geq 0} p(A_k)s^k = \frac{1}{1-f(s)}, \quad |s|<1.$$

Montrer ensuite que le polynôme $\dfrac{1-f(s)}{1-s}$ *n'a que des racines de module* ≤ 1 *et en déduire que les coefficients* b_n *du développement en série entière de la fonction* $\dfrac{1}{1-f(s)} - \dfrac{1}{(1-s)E(X_1)}$ *tendent vers zéro si* n *tends vers l'infini.*

Exercice 24 *Soient* $X_1,\dots,X_n,\dots$ *des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur* $[0,1]$*. Le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum_{n\geq 1} z^n X_1 \dots X_n$ *est une variable aléatoire, quelle est sa loi ?*

Références

[1] R.P. Boas *A primer of real functions*, The Carus Mathematical Monograph 13, A.M.S. (1981).

[2] H.Queffélec & C.Zuily *Éléments d'Analyse, Agrégation de Mathématiques*, Dunod (2002).

[3] W.J.Kaczor & M.T. Nowak *Problems in Mathematical Analysis* 2 : Continuity and Differentiation, Student Mathematical Library, AMS (2001).

[4] E.Leichtnam *Exercices corrigés de mathématiques(X, E.N.S.) : Analyse*, Ellipses (1999).

[5] G.Letac *Problèmes de Probabilités*, PUF (1970).

[6] R.Remmert *Theory of complex functions*, Graduade Texts in Mathematics 122, Springer (1990).

[7] R.Remmert *Classical Topics in Complex Function Theory*, Graduade Texts in Mathematics 172, Springer (1997).

[8] E.C.Titchmarsh *Theory of Functions*, Oxford University Press (1988).

20 novembre 2004, LASSERE@PICARD.UPS-TLSE.FR & LASSERE@WANADOO.FR