Séance du 10 Décembre 2005.

0. Préliminaires, notations.

À toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ (**on écrira** $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$) on associe la suite de ses coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

où « réels »

$$a_0(f) = 2c_0(f),\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt,\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

Pour tout entier naturel N et tout $x \in \mathbb{R}$ on désignera par

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\big(a_k(f)cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big)$$

les N-ièmes sommes partielles de Fourier au point x. On dira que f est développable en série de Fourier au point $x \in \mathbb{R}$ si la suite $(S_N(f)(x))_N$ converge **vers** $f(x)$ ou de manière équivalente si la série de Fourier de f au point x converge et admet pour somme $f(x)$ i.e.

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^\star}\left(a_k(f)cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right).$$

1. Convergence et régularité

1. (cours) On suppose f 2π-périodique et seulement continue par morceaux.
   a) Si f est de plus $\mathcal{C}^1$ par morceaux, que peut-on dire de la convergence de la suite $(S_n(f))_n$? (soyez précis : convergence simple, normale, uniforme, sur quelle partie de $\mathbb{R}$ et vers quoi ?....)
   b) La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?
2. (cours) On suppose maintenant $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; que peut-on dire ?
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. On suppose qu'il existe une série trigonométrique $\sum_{\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$. Montrer que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
4. (cours) Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, montrer que f est identiquement nulle.

5. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. On suppose que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ (ou même sur un intervalle de longueur supérieure ou égale à 2π...) montrer qu'elle admet pour limite f.

2. Aux frontières de Dirichlet : deux exemples

Voici deux exemples de fonction continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

6. **Exemple 1 :** On considère l'application g, 2π-périodique paire et définie pour $x \in [0, \pi]$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

   a) Existe-t-il un théorème du cours permettant d'affirmer que g est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$? (justifiez votre réponse)

   b) Montrer que
$$\int_0^x \sin(t^2)dt = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt, \quad \forall\, x > 0.$$

   c) En déduire que $t \mapsto \sin(t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'intégrale strictement positive.

   d) Montrer que $\quad a_n(g) \underset{n\to\infty}{\sim} O(n^{-3/2})$.

   e) Montrer que g est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

7. **Exemple 2 :** Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

   a) Montrer que $f \in \mathcal{C}_0^{2\pi}$.

   b) Montrer que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

   c) On va montrer que f n'est pas dérivable à l'origine.

   - Montrer que $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$, $\forall\, x \in [0, \pi/2]$.
   - Soit $x \in]0, \pi/2[$, pour $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ (E est la partie entière...) montrer que
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2} \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2} := \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + R_N(x).\end{aligned}$$
   - Montrer que $R_N(x) = \displaystyle\sum_{k\geq N+1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ où $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
   - Montrer que pour $x \in]0, \pi/2[$:
$$|\varphi_n(x)| \leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$
   - En déduire que pour $x \in]0, \pi/2[$ et $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$:
$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}.$$
   - En déduire que f n'est pas dérivable à l'origine.

3. Le théorème de Fejér

8. **(Cesàro)** Si une suite de nombres complexes $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{C}$ vers l (convergence usuelle), montrer qu'il en est de même pour la suite $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}\right)_n$ (convergence au sens de Cesàro).
9. La réciproque est-elle vraie ?
10. Pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et tout entier naturel non nul on définit la n-ième somme de Fejér de f (notée $\sigma_n(f)$) comme la moyenne de Césaro des sommes partielles de Fourier de f :

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}$$

On se propose d'établir le **théorème de Fejér :**

« *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.* »

Autrement dit, pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, la suite $(S_n(f))_n$ converge simplement au sens de Césaro vers f sur $\mathbb{R}$.

Quelques notations : On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ le noyau de Fejér d'indice n par

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}$$

où $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(1 + 2\cos(x) + \cdots + n\cos(nx)\right) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left((n+1/2)x\right)}{\sin(x/2)}$ si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $D_0(x) = 1/2\pi$ est le noyau de Dirichlet (c.f. seconde année) d'indice n. On rappelle que D_n est une fonction paire 2π périodique, indéfiniment dérivable verifiant

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1, \quad S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)dt = \sigma_n(f)(x).$$

b) On admet (calcul élémentaire sans grand intéret) que $F_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx/2)}{2\pi n \sin^2(x/2)}$, $\forall\, n \geq 1$. (avec le prolongement évident en $x = 0$, F_n est donc une application continue et **positive**).

En déduire que pour tout $0 < \delta < \pi/2$ et tout $x \in [\delta, \pi - \delta]$

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi n \sin^2(\delta/2)}$$

puis que la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[\delta, \pi-\delta]$ quand $n \to +\infty$.

c) Montrer que $\sigma_n(f)(x) - f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big) F_n(t)dt$.

d) Soit $0 < \delta < \pi/2$. En écrivant l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}$ sous la forme $\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \int_{-\pi+\delta}^{-\delta} + \int_{-\pi}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi}$, montrer que la suite $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (on pourra, aprés l'avoir justifiée utiliser l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$ de toute application $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$).

11. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Si la série de Fourier de f converge en un point $x \in \mathbb{R}$, montrer que cette limite est $f(x)$.
12. Donner une nouvelle démonstration du fait que la fonction g de la question 6 est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

4. Aux frontières de Fejér : une fonction continue admettant une série de Fourier divergente en un point.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[\left(2^{n^3} + 1\right)\frac{x}{2}\right].$$

13. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On désigne alors par f la fonction paire, continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

14. Montrer que $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.
15. On pose pour $p, k \in \mathbb{N}$, $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(pt) \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) dt$, et pour tout entier $q \in \mathbb{N}$: $T_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k}$.
    (a) Calculer, pour p, k entiers naturels l'intégrale $I_{p,k}$.
    (b) Pour $q, k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \displaystyle\sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$.
    (c) En déduire que $T_{q,k} \geq 0$ pour tout couple (q, k) d'entiers.
    (d) Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1}$ au voisinage de $+\infty$.
    (e) En déduire que $T_{k,k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\log(k)}{2}$.
16. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} I_{p,2^{n^3-1}}$.
17. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geq -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}}$ (on pourra remarquer que $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{l=1}^{N} a_l(f) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{l=0}^{N} a_l(f)...$).
18. En déduire que la suite $(S_n(f)(0))_n$ diverge.

5. Fonctions à variations bornées, le théorème de Jordan.

Pour deux réels $a < b$ on désigne par $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in S_{[a,b]}$ on note

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)|.$$

On dira que f est **à variations bornées** si

$$\sup_{\sigma \in S_{[a,b]}} V(\sigma, f) < +\infty$$

et on appelle **variation totale de** f sur $[a,b]$ le réel positif

$$V([a,b], f) := \sup_{\sigma \in S_{[a,b]}} V(\sigma, f).$$

19. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right), & x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est continue mais n'est pas à variations bornées sur $[0,1]$. On pourra à cet effet considérer la subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n+1}$ de $[0,1]$ définie par

$$x_0 = 0, \ x_{n+1} = 1 \text{ et pour tout } \ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \quad x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}.$$

20. Quelques exemples :
    (a) Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est monotone est à variations bornées sur $[a,b]$ et préciser $V([a,b], f)$.
    (b) Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variations bornées sur $[a,b]$
    (c) Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ qui est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est à variations bornées sur $[a,b]$.
21. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est à variations bornées.

    Soit $(n, N) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star$ et $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le |n|N}$ la subdivision de $[0, 2\pi]$ définie pour tout entier $0 \le k \le |n|N$ par $x_k = \dfrac{2\pi k}{|n|N}$. Enfin pour tout $1 \le k \le N$ on désignera par $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

    (a) Vérifier que $\displaystyle \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-int} dt \right| \le \sum_{k=1}^{|n|N} (x_k - x_{k-1}) V_k(f).$

    (b) Montrer que $\displaystyle \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \le \frac{2}{|n|} V([0, 2\pi], f).$

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $\quad |c_n(f)| \leq \dfrac{(1+2\pi)V([0,2\pi],f)}{|n|}$.

22. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}}{\mathrm{n+1}}.$$

On suppose que la suite $(\sigma_n)_n$ converge vers un nombre complexe L et qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;:\quad |u_k| \leq \frac{A}{k+1}.$$

(a) Pour $n, k \in \mathbb{N}^\star$, exprimer, à l'aide des termes de la suite $(u_i)_i$ l'expression

$$k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L).$$

(b) Soit $(d_n)_n$ une suite décroissante de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sigma_n - L| \leq d_n$ (inutile d'en justifier l'existence). Montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^\star$

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A\frac{k+1}{2(n+2)}.$$

(c) Étant donné $n \in \mathbb{N}^\star$, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$). Montrer que

$$|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}} + \frac{A}{n+2}.$$

(d) Que peut-on en déduire ?

23. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ une fonction à variations bornées sur $[0, 2\pi]$. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

24. Montrer que la série de Fourier de la fonction g de la question 4 converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g (troisième preuve).

25. Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

CORRIGÉ

Première partie

1. a) Le théorème de Dirichlet (seconde année) assure que la série de Fourier f est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$ si f est continue en ce point et vers $\frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-))$ sinon.
   b) Si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, la limite sera continue sur $\mathbb{R}$: il est donc sans espoir de l'espérer si f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, un résultat de seconde année (corollaire de Dirichlet) assure la convergence normale (donc uniforme) sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f vers f.
3. Nous avons donc $f(x) = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}$, il s'agit donc de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z} : \alpha_k = c_k(f)$.

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l e^{ilt}e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t}dt = \alpha_k \end{aligned}$$

   où l'inversion $\int\sum = \sum\int$ est justifiée par l'uniforme convergence de la série sur $[0,2\pi]$.
4. $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ n'a pas de raison d'être développable en série de Fourier, toutefois on peut lui appliquer la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = 0$$

   soit $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$ qui, par continuité de f implique $f \equiv 0$.
5. Soit $S_f(x) := \sum_{\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$, il s'agit de montrer que $S_f = f$. Vu les hypothèses, $S_f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et la question 3 implique que $\sum_{\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$ est la série de Fourier de S_f. Les coefficients de Fourier de la fonction continue 2π-périodique $g := S_f - f$ sont tous nuls et (question 4) $g \equiv 0$ soit $f = S_f$.

Seconde partie

6. a) Le théorème de Dirichlet ici ne s'applique pas, car g est continue et 2π-périodique mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : en effet par exemple $g(0_+)$ n'existe pas puisque $\lim_{x\to 0_+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0_+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
   b) C'est une banale intégration par parties (l'intégrale dans le second membre étant bien convergence à l'origine (faire un DL...)).
   c) Dans le coté droit de la formule de la précédente question, nous avons pour le premier terme

$$\left(\left|\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right| \leq \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right| = 0\right).$$

Pour le second terme, la majoration

$$\left|\frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

assure la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$. Ainsi l'intégrale impropre $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ converge et

$$\int_0^\infty \sin(t^2)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin(t^2)dt := \lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt = C > 0.$$

d) On a pour tout $n \in N^\star$

$$\begin{aligned}
a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{t}\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{u}{\sqrt{n}}\cos(u^2)\frac{2u\,du}{n} \\
\underset{u=\sqrt{nt}}{=} \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} u^2\cos(u^2)du \\
= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\left(\left[\frac{u\sin^2(u)}{2}\right]_0^{\sqrt{n\pi}} - \int_0^{\sqrt{n\pi}}\frac{\sin(u^2)}{2}du\right) \\
= -\frac{2}{\pi n^{3/2}}G(\sqrt{n\pi}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2C}{\pi n^{3/2}} \quad \text{(d'après 6-c).}
\end{aligned}$$

e) La question précédente implique que la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$, avec la question 5, sa limite est g.

7. a) Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\sin(nx)/n^2| = 1/n^2$ la série converge normalement sur $\mathbb{R}$: f est donc continue sur $\mathbb{R}$, elle bien entendu 2π-périodique.

   b) La série définissant f est une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$: c'est donc (question 3) la série de Fourier de f.

   c) • C'est une inégalité classique (inégalité de Jordan) souvent fort utile. Pour la démontrer on peut étudier la fonction ou mieux, invoquer la concavité de $h : x \mapsto \sin(x)$ sur $[0,\pi/2]$ qui implique que h est au dessus de la corde reliant $(0,0)$ et $(\pi/2,1)$ i.e. la droite d'équation $y = 2x/\pi$.

   • Soit $x \in]0,\pi/2[$, pour $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$

$$(\ 1 \leq k \leq N\ ) \quad \Longrightarrow \quad \left(0 < kx \leq \mathrm{E}(\pi/2x)x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

on peut donc appliquer l'inégalité de Jordan

$$\frac{\sin(kx)}{kx} \geq \frac{2kx}{\pi kx} = \frac{2}{\pi}, \quad \forall\, k \in \{1,\dots,N\},$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^N \frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2}.
\end{aligned}$$

- C'est une « banale » transformation d'Abel.
- Pour $x \in]0, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x)| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{ikx}}\right)\right| &\leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \\
&= \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}\right| \\
&\leq \frac{2}{|2i\sin(x/2)|} \\
&\leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}
\end{aligned}$$

où l'on a appliqué encore une fois l'inégalité de Jordan dans la dernière inégalité.
- D'où

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + R_n(x) \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - |R_n(x)| \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}|\varphi_n(x)|\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\pi}{x}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}
\end{aligned}$$

.

- Si x tends vers zéro, $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ tends vers $+\infty$ et N^2x^2/π tends vers $4/\pi$ de telle sorte que dans l'inégalité précédente le terme de droite tends vers l'infini avec N qui implique à son tour $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = +\infty$: f n'est pas dérivable à l'origine.

Troisième partie

8. « La convergence usuelle implique la convergence au sens de Cesàro » est un exercice archi-classique (et important) de première année : je ne le démontre pas, consultez votre manuel favori si vous avez des trous de mémoire (il est **essentiel** de comprendre cette démonstration...).
9. Elle est fausse. On peut considérer par exemple la suite divergente de terme général $u_n = (-1)^n$ pour laquelle il est immédiat de vérifier $|\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}| \leq n^{-1}$ assurant la convergence vers zéro des moyennes de Cesàro.
10. a) Les deux formules proposées sont des conséquences immédiates des propriétés du noyau de Dirichlet rappelées dans l'énoncé.

b)Sur $[\delta, \pi-\delta]$ nous avons $\sin(x/2) \geq \sin(\delta/2)$. L'inégalité désiré résulte alors de la formule admise.
On en déduit immédiatement que

$$\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]} |F_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi n \sin^2(\delta/2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(F_n)_n$ converge bien uniformément sur $[\delta, \pi-\delta]$ vers la fonction nulle.
c) L'égalité résulte de la formule $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$.
d) « Toute fonction continue et 2π-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ », c'est un résultat classique je ne le démontre pas.
Soit $\varepsilon > 0$, f étant uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $0 < \delta < \pi$ tel que

$$(|x-y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{1}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big) F_n(t)dt \right| \quad (10-c) \\
&\leq \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \right) \left| \big(f(x-t) - f(x)\big) F_n(t) \right| dt \\
&+ \left(\int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{-\pi+\delta}^{-\delta} \right) \left| \big(f(x-t) - f(x)\big) F_n(t) \right| dt \\
&\leq \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \right) |f(x-t) - f(x)| \, F_n(t)dt \\
&\quad + \left(\int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{-\pi+\delta}^{-\delta} \right) |f(x-t) - f(x)| \, F_n(t)dt \qquad (\text{car } F_n \geq 0) \\
&\leq 3\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt \quad (\text{c'est l'uniforme continuité de} f..) \\
&\quad + \left(\int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{-\pi+\delta}^{-\delta} \right) |f(x-t) - f(x)| \, F_n(t)dt \\
&\leq 3\varepsilon + 4\|f\|_\infty \frac{(\pi - 2\delta)}{2n\pi \sin^2(\delta/2)} \quad \text{avec (10-a) et (10-b)} \\
&\leq 4\varepsilon \qquad \text{si} \quad n \geq n_\varepsilon.
\end{aligned}$$

n_ε ne dépendant pas de x la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut aussi remarquer que pour une fonction continue par morceaux 2π-périodique cette preuve assure la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ sur lequel f est continue.

11. Avec la question précédente, la série de Fourier de f converge au sens de Cesàro vers $f(x)$; par hypothèse elle converge au sens classique vers une limite $l \in \mathbb{C}$. La convergence usuelle impliquant (question 8) la convergence au sens de Cesàro vers la même limite, on a assurément $l = f(x)$ CQFD.
12. Avec (6-d) la série de Fourier de g converge simplement sur $\mathbb{R}$; g étant continue sur $\mathbb{R}$, cette limite est f d'aprés la question précédente.

Quatrième partie

13. La convergence normale est évidente ($\|f_n\|_\infty = 1/n^2$) la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc une fonction continue sur $[0, \pi]$.
14. Par parité et prologement 2π-périodique, $\lim_{x\to -\pi_+} f(x) = \lim_{x\to \pi_+} f(x) = \lim_{x\to \pi_-} f(x)$: f est donc bien continue en les points $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ce qui était le seul point douteux.
15. a) De la formule $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ on tire

$$\begin{aligned}
I_{p,k} &= \int_0^\pi \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)+\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}-p\right)t\right)\right]dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2}+p}+\frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2}+p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2}-p}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2(k+p)+1}+\frac{1}{2(k-p)+1}
\end{aligned}$$

b) On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
T_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k} &= \sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k+p)+1}+\sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k-p)+1} \\
&= \sum_{j=k}^{k+q}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=k-q}^{k}\frac{1}{2j+1} \\
&= \frac{1}{2k+1}+\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1} \\
&= c_k+\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}
\end{aligned}$$

avec $c_k = \dfrac{1}{2k+1} > 0$.

c) Si $k \geq q$ il est évident que $T_{q,k} \geq 0$.

Maintenant, si $k < q$ il suffit de remarquer que

$$\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1} = \sum_{j=k-q}^{q-k}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=q-k+1}^{k+q}\frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2(q-k)+1}+\sum_{j=q-k+1}^{k+q}\frac{1}{2j+1} \geq 0$$

puisque $q-k+1 \geq 0$.

d) Par décroissance de $x \mapsto (2x+1)^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$

$$\int_1^N \frac{dt}{2t+1} \leq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1} \leq \int_0^N \frac{dt}{2t+1},$$

soit
$$\frac{\log(2N+1)-\log(3)}{2} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\log(2N+1)}{2}$$
qui implique $\displaystyle \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{\log(N)}{2}.$

e) Avec (15-b) et (15-d)
$$T_{k,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\log(2k)}{2} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\log(k)}{2}.$$

16. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$
$$\begin{aligned}
a_p(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(pt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n\geq 1} f_n(t)\cos(pt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos(pt)dt \qquad \text{(par NCV (question 13) sur } [0,\pi]) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\int_0^{\pi} \frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{t}{2}\right]\cos(pt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} I_{p,2^{n^3-1}}.
\end{aligned}$$

17. De l'égalité précédente et sachant que (15-c) les quantités $T_{p,k}$ sont toujours positives, on a pour tout $p \geq 1$
$$a_p(f) \geq \frac{2}{\pi n^2} I_{p,2^{n^3-1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
S_{2^{N^3-1}}(f)(0) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{2^{N^3-1}} a_n(f) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=0}^{2^{N^3-1}} a_n(f) \\
&\geq -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=0}^{2^{N^3-1}} \frac{2}{\pi N^2} I_{n,2^{N^3-1}} \\
&= -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi N^2} T_{2^{N^3-1},2^{N^3-1}}
\end{aligned}$$

18. L'équivalent obtenu en (15-e) nous donne
$$\frac{2}{\pi N^2} T_{2^{N^3-1},2^{N^3-1}} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi N^2}\frac{\log(2^{N^3-1})}{2} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{N^3\log(2)}{\pi N^2} = \frac{N\log(2)}{\pi}.$$
Cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ avec N, on a avec la question (17)
$$\lim_{N\to\infty} S_{2^{N^3-1}}(f)(0) = +\infty.$$
La suite $(S_n(f)(0))_n$ est donc divergente : f n'est pas développable en série de Fourier à l'origine.

Cinquième partie

19. La continuité est immédiate. On a

$$\begin{aligned}
V(\sigma, f) &= \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \\
&= \left|\frac{\cos(\pi(n+1))}{2(n+1)}\right| + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\cos(\pi(n-i))}{2(n-i)} - \frac{\cos(\pi(n+1-i))}{2(n+1-i)}\right| + \left|\frac{\cos(\pi)}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{(-1)^{n-i}}{2(n-i)} - \frac{(-1)^{n-i-1})}{2(n-i-k)}\right| + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(n-i)} + \frac{1}{2(n+1-i)}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

f n'est donc pas à variations bornées sur $[0, 1]$.

20. a) Quitte à considérer $-f$, supposons f croissante, alors pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_0^n$ de $[a, b]$

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(b) - f(a)$$

soit $V([a, b], f) = \sup_\sigma V(\sigma, f) = f(b) - f(a)$: f est bien à variations bornées. sur $[a, b]$.

Remarque : On peut démontrer que toute fonction à variations bornées est la différence de deux fonctions croissantes, plus précisément, si f est à variations bornées on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[V([a, x], f) + f(x) - f(a)\right] - \frac{1}{2}\left[V([a, x], f) - f(x) + f(a)\right] := p(x) - q(x)$$

et on peut montrer que les fonctions p et q sont croissantes sur $[a, b]$.

b) Si $f = g + h$ avec g et h monotones, alors pour $\sigma \in S_{[a,b]}$

$$\begin{aligned}
V(\sigma, f) &= \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |g(x_{i+1}) - g(x_i) + h(x_{i+1}) - h(x_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + \sum_{i=0}^{n} |h(x_{i+1}) - h(x_i)| \\
&\leq V(\sigma, g) + V(\sigma, h) \leq V([a, b], g) + V([a, b], h) < +\infty
\end{aligned}$$

vu la question précédente.
c) Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il existe une subdivision $(y_i)_0^d$ de $[a,b]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[y_i, y_{i+1}],\ 0 \leq i \leq n-1$. Comme de manière évidente (voyez vous pourquoi ?)

$$V([a,b],f) = \sum_{i=1}^{n-1} V([y_i, y_{i+1}], f)$$

il est suffisant de considérer que $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Dans ce cas, f' continue sur $[a,b]$ y est bornée et pour $\sigma \in S_{[a,b]}$ l'inégalité des accroissements finis implique que

$$V(\sigma,f) = \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n} \|f'\| |x_{i+1} - x_i| = \|f'\|_\infty (b-a)$$

i.e. $V([a,b],f) \leq \|f'\|_\infty (b-a) < \infty$, CQFD.
Remarque : Par contre une fonction f qui est seulement dérivable n'est pas forcément à variations bornées. Vous pouvez par exemple démontrer que la fonction $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

est dérivable sur $[0,1]$ mais n'est pas à variations bornées sur $[0,1]$. Remarquez que dans cet exemple, f' n'est pas bornée sur $[0,1]$.

21. a) Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-int} dt \right| &\leq \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)|\, dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} V_k(f) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{|n|N} (x_k - x_{k-1}) V_k(f). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \frac{i}{n} \left[e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}} \right] \right| \\ &= \frac{1}{|n|} \left| -f(x_1) e^{-inx_0} + f(x_{|n|N}) e^{-inx_{|n|N}} + \sum_{k=1}^{|n|N-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) e^{-inx_k} \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|} \left(|f(x_1) - f(x_{|n|N})| + \sum_{k=1}^{|n|N-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \right) \\ &\leq \frac{2V([0,2\pi],f)}{|n|} \end{aligned}$$

c) Avec les deux questions précédentes nous avons pour $\sigma = (x_i)_0^{|n|N} \in S_{[a,b]}$:

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt + \int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| + \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{|n|}V([0,2\pi],f) + \sum_{k=1}^{|n|N}(x_k-x_{k-1})V_k(f)\right) \quad \text{avec} \quad (21-a)\ \&\ (21-b) \\
&\leq \frac{1}{|n|\pi}V([0,2\pi],f) + \frac{2\pi}{|n|N}\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f) \quad \text{si on choisit } \sigma \text{ telle que } |x_k - x_{k-1}| \leq 2\pi/|n|N \\
&\leq \frac{1}{|n|\pi}V([0,2\pi],f) + \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f) \quad \text{car} \quad \sum_k V_k(f) \leq V([0,2\pi],f) \\
&\leq \frac{(1+2\pi)V([0,2\pi],f)}{|n|}.
\end{aligned}$$

22. a) Nous avons

$$\begin{aligned}
k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L) &= kS_n - (S_0 + \cdots + S_{n+k}) + (S_0 + \cdots + S_n) \\
&= kS_n - (S_{n+1} + \cdots + S_{n+k}) \\
&= -\{ku_{n+1} + (k-1)u_{n+2} + \cdots + 2u_{n+k-1} + u_{n+k}\} \\
&= -\sum_{j=1}^{k} ju_{n+k-j+1}
\end{aligned}$$

b) On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
|k(S_n - L)| &= \left|(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) - n(\sigma_{n-1} - L) - \sum_{j=1}^{k} ju_{n+k-j+1}\right| \\
&\leq |(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L)| + |n(\sigma_{n-1} - L)| + \sum_{j=1}^{k} j\,|u_{n+k-j+1}|
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
|S_n - L| &\leq \frac{1}{k}\left|(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L)\right| + \frac{1}{k}\left|n(\sigma_{n-1} - L)\right| + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} j\,|u_{n+k-j+1}| \\
&\leq \left(1 + \frac{n}{k}\right) d_{n+k-1} + \frac{n}{k} d_{n-1} + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} j \frac{A}{n+k+1} \\
&\leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + \frac{A}{k(n+2)}\sum_{j=1}^{k} j \\
&\leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + \frac{A}{k(n+2)}\frac{k(k+1)}{2} \\
&\leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + \frac{A(k+1)}{2(n+2)}
\end{aligned}$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, et k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$). Avec ce qui précède, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
|S_n - L| &\leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + \frac{A(k+1)}{2(n+2)} \\
&\leq \left(1 + \frac{2n}{2n\sqrt{d_{n-1}}}\right) d_{n-1} + \frac{A(2n\sqrt{d_{n-1}} + 2)}{2(n+2)} \\
&\leq d_{n-1} + \sqrt{d_{n-1}} + A\sqrt{d_{n-1}} + \frac{A}{n+2}.
\end{aligned}$$

d) Comme $(d_n)_n$ converge vers zéro l'inégalité ci-dessus implique que la suite $(S_n)_n$ converge vers l.

23. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ une fonction à variations bornées sur $[0, 2\pi]$. Comme f est continue, le théorème de Fejér implique que la suite $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

    f étant à variations bornées sur $[0, 2\pi]$, l'inégalité obtenue dans la question 21-c assure que la suite $(S_n(f)(x))_n$ satisfait en tout $x \in \mathbb{R}$ aux hypothèses de la question 22 : elle converge donc elle aussi vers $f(x)$ (inégalité 22-c). En outre, dans ce contexte la constante A et la suite $(d_n)_n$ ne dépendant pas de x, l'inégalité 22-c fourni en fait la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $(S_n(f))_n$ vers f, CQFD.

24. La fonction g de la question 4 est à variations bornées sur $[0, 2\pi]$ (elle est monotone sur $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ donc à variations bornées sur ces deux intervalles (question 20-a) donc sur leur réunion $[0, 2\pi]$) : elle satisfait donc aux hypothèses de la question 23. CQFD.

25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et k-lipschitzienne : f est donc continue et pour

toute subdivision $\sigma \in S_{[0,2\pi]}$:

$$\begin{aligned} V(\sigma, f) &= \sum_{j=0}^{n} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} k|x_{j+1} - x_j| = k(x_{n+1} - x_0) = 2k\pi, \end{aligned}$$

f est bien à variations bornées : il ne reste plus qu'à lui appliquer la question 23.

lassere@picard.ups-tlse.fr