AGRÉGATION INTERNE : COMBINATOIRE, DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS

Exercice 1
1) Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1,2,\ldots,n\}$. Vérifier que l'on a : $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. En déduire un équivalent de I_n. Etudier $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} z^n$ et expliciter sa somme.
2) Soit d_n le nombre de dérangements (i.e. sans points fixes) de $\{1,2,\ldots,n\}$, montrer que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Application : *n invités laissent leur chapeau au vestiaire puis repartent les uns aprés les autres en reprenant un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité p_n qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas tends vers e^{-1} lorsque n tends vers $+\infty$.*

Exercice 2 *Soit T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T_k$ puis $\sum_{n\geq 0} \frac{T_n x^n}{n!} = \exp(e^x - 1)$.*

Exercice 3 *Expliciter le nombre a_n de facons de composer une somme de n francs avec des pièces de 1, 2 et 5 francs.*

Exercice 4 *Dénombrer le nombre de manières de distribuer n euros à p personnes (faire un calcul direct ou bien utiliser les séries entières).*

Exercice 5 *Soit G un groupe fini non commutatif. On note $p(G)$ la probabilité pour que deux éléments de G tirés au hasard commutent entre eux. Montrer que $p(G) \leq \frac{5}{8}$ et préciser pour quels groupes cette valeur maximale est atteinte.*

Exercice 6 *Combien d'entiers distincts trouve-t-on dans la suite d'entiers*

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right] \quad ?$$

Exercice 7 *Soit $E = \{1,2,\ldots,n\}$ Montrer que le nombre de couples $(X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ vérifiant $X \subset Y$ vaut 3^n.*

Exercice 8 *Avec la formule de Wallis (1655)*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\cdots = \prod_{n\geq 1} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

montrer que dans le jeu de pile ou face la probabilité p_n lors de $2n$ jets successifs d'obtenir n pile et n face satifait, quand n tends vers l'infini, à l'équivalent

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 9 *On choisit deux points au hasard et de manière indépendante sur un segment I de longueur d. Soit $0 < l < d$, quelle est la probabilité que la distance entre ces deux points soit supérieure ou égale à l ?*

Exercice 10 *Si x et y sont choisis au hasard dans $[0,1]$ (avec une densité uniforme), quelle est la probabilité que l'entier le plus proche de $\frac{x}{y}$ soit pair ?*

Exercice 11
1) Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la variable aléatoire « somme des deux faces » soit uniformément répartie.

2) Est-il toutefois possible de piper les deux dés et que la variable aléatoire « somme des deux faces » continue à suivre la loi usuelle associée à deux dés « normaux » ?

Exercice 12 *Soient* $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *une suite de variable aléatoires indépendantes, de même loi, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs* $a_1, a_2, \dots, a_N$ *où les* a_i *sont des entiers positifs dont le p.g.c.d. est* 1. *On pose* $S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \dots + X_n$ *et on définit pour* $k \in \mathbb{N}$ *l'événement*

$$A_k = \{\exists\, n \in \mathbb{N} \ :\ S_n = k\}.$$

Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} p(A_k) = \dfrac{1}{E(X_1)}$.
Méthode : *Si* $f(s) := E(s^{X_1})$, *montrer que*

$$\sum_{k\geq 0} p(A_k)s^k = \frac{1}{1-f(s)}, \quad |s| < 1.$$

Montrer ensuite que le polynôme $\dfrac{1-f(s)}{1-s}$ *n'a que des racines de module* ≤ 1 *et en déduire que les coefficients* b_n *du développement en série entière de la fonction* $\dfrac{1}{1-f(s)} - \dfrac{1}{(1-s)E(X_1)}$ *tendent vers zéro si* n *tends vers l'infini.*

Exercice 13 *Soient* $X_1, \dots, X_n, \dots$ *des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur* $[0,1]$. *Le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum_{n\geq 1} z^n X_1 \dots X_n$ *est une variable aléatoire, quelle est sa loi ?*

Exercice 14 ***(probabilité qu'un entier soit « sans facteurs carrés »)*** *On se propose de démontrer que la probabilité* r_n *que deux entiers pris au hasard dans* $\{1,\dots,n\}$ *soient premiers entre-eux verifie*

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d\geq 1}\mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \quad et \quad \lim_n r_n = \frac{6}{\pi^2}$$

où l'application (c'est la ***« fonction de möebius »****)* $\mu\ :\ \mathbb{N}^\star \to \{-1,0,1\}$ *est définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n\ possède\ au\ moins\ un\ facteur\ carré, \\ (-1)^k & si\ n = p_1 \dots p_k où\ les\ p_i\ sont\ des\ nombres\ premiers\ distincts. \end{cases}$$

soient $p_1, \dots, p_k$ *les nombres premiers* $\leq n$ *et pour* $1 \leq i \leq k$ *:*

$$V_i := \left\{(a,b) \in \{1,\dots,n\}^2\ :\ p_i\ divise\ a\ et\ b\right\}.$$

1. *Montrer que*

$$\begin{aligned} card\left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) &= \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+card(I)} card\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) \\ &= -\sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{card(I)} E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2 \\ &= -\sum_{d=2}^n \mu(d)E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

   Et en déduire r_n.
2. *Montrer que* $\left| r_n - \sum\limits_{d=1}^n \dfrac{\mu(d)}{d^2}\right| = 0\left(\dfrac{\log(n)}{n}\right)$.
3. *Montrer que* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{d\geq 1}\dfrac{\mu(d)}{d^2} = \sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{l\ divise\ i}\dfrac{\mu(l)}{i^2} = 1.$
4. *Conclure.*