Le théorème de Riemann-Lebesgue.

Definition 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $c \in [a,b]$. La limite supérieure de f en c est

$$\limsup_{x\to c} f(x) = \sup\left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ : \ x_n \to c,\ x_n \neq c \text{ et } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existe} \right\}.$$

La limite inférieure est

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \inf\left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ : \ x_n \to c,\ x_n \neq c \text{ et } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existe} \right\}$$

et l'oscillation de f en c

$$\operatorname{osc}_f(x) = \limsup_{x\to c} f(x) - \liminf_{x\to c} f(x).$$

Par exemple, pour la fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et 0 sinon, on a $\limsup_{x\to 0} f(x) = 1$, $\liminf_{x\to 0} f(x) = -1$ et $\operatorname{osc}_f(x) = 2$. Voici quelques propriétés élémentaires de ces limites.

Proposition 1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*

1. $\liminf_{x\to c} f(x) \leq \limsup_{x\to c} f(x)$,
2. *f est continue en c si et seulement si* $\liminf_{x\to c} f(x) = \limsup_{x\to c} f(x) = f(c)$,
3. *Lorsque f est croissante,* $\liminf_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = \sup_{x<c} f(x)$, $\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x) = \inf_{x>c} f(x)$ *et* $osc_f(c) = \inf_{x>c} f(x) - \sup_{x<c} f(x) = f(c_+) - f(c_-)$.

Démonstration. La première assertion est évidente. Passons à la seconde. Si f est continue en c, pour toute suite $x_n \to c$, on a $f(x_n) \to f(c)$ d'où $\liminf f(x) = \limsup f(x) = f(c)$. Montrons la réciproque; soit (x_n) une suite dont la limite est c. Nous devons montrer que la suite $(f(x_n))$ converge; sa limite sera nécessairement $f(c)$. Raisonnons par l'absurde. Si $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(c)$ il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (x_{n_p}) tels que $\left|f(x_{n_p}) - f(c)\right| \geq \varepsilon$. Puisque f est bornée, la suite $(f(x_{n_p}))$ contient une sous-suite convergente dont la limite est $f(c)$ par hypothèse. On obtient donc, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, $|f(c) - f(c)| \geq \varepsilon > 0$ ce qui est absurde.

Supposons que f soit croissante. Montrons que f possède une limite à gauche $\lim_{x\to c_-} f(x) = \sup_{x<c} f(x)$ et une limite à droite $\lim_{x\to c_+} f(x) = \inf_{x>c} f(x)$. Traitons le cas de la limite à gauche. Soit $x_n \to c$, $x_n < c$, et soit $\varepsilon > 0$. Nous devons trouver N tel que

$$\sup_{x<c} f(x) - f(x_n) < \varepsilon$$

pour tout $n > N$. Par définition du supremum, il existe $x^* < c$ tel que $\sup_{x<c} f(x) - \varepsilon < f(x^*)$. Puisque $x_n \to c$ il existe N tel que $x^* < x_n < c$ pour tout $n > N$; mais comme f est croissante on a $f(x^*) \leq f(x_n)$ d'où $\sup_{x<c} f(x) - f(x_n) < \varepsilon$.

On voit donc que pour une fonction croissante, si $x_n \to c$, $x_n \neq c$ et si $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe alors cette limite ne peut être que $\sup_{x<c} f(x)$ ou $\inf_{x>c} f(x)$ qui sont ainsi la $\limsup$ et la $\liminf$ de f en c. $\square$

Pour une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ les points de discontinuité sont donc ceux de l'ensemble

$$D = \{x \in [a,b] \ : \ \mathrm{osc}_f(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{x \in [a,b] \ : \ \mathrm{osc}_f(x) > \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k.$$

Proposition 2. *Une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ne possède qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuités.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat nous allons prouver que chaque ensemble D_k, $k \in \mathbb{N}^*$, ne contient qu'un nombre fini de points. Notons que f est bornée puisque $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout x de sorte que la proposition 1 s'applique. Notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ des discontuités de f contenues dans D_k. On a alors

$$\frac{N}{k} < -f(x_{1-})+f(x_{1+})-f(x_{2-})+f(x_{2+})+\ldots-f(x_{N-})+f(x_{N+}) \leq -f(a)+f(b).$$

En effet $f(a) \leq f(x_{1-})$, $f(x_{N+}) \leq f(b)$ et $f(x_{k-1\,+}) - f(x_{k-}) \leq 0$ pour $k = 2,\ldots,N$. Ceci prouve que $N \leq k(b-a)$ et donc que D_k a au plus $k(b-a)$ éléments. $\square$

Corollaire 1. *Une fonction à variations bornées n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuités.*

Démonstration. Une fonction à variations bornées est différence de deux fonctions croissantes qui n'ont elles-mêmes qu'un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité. $\square$

Definition 2. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure nulle si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles ouverts $I_n =]a_n, b_n[$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) < \varepsilon$.

Donnons quelques exemples de tels ensembles.

Proposition 3. *Les ensembles suivants sont de mesure nulle :*

1. *Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle,*

2. *Un ensemble au plus dénombrable,*

3. *Une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle,*

4. L'ensemble triadique de Cantor (il n'est pas dénombrable).

Passons maintenant au théorème de Riemann-Lebesgue.

Theorem 1. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est bornée et si l'ensemble de ses discontinuités est de mesure nulle.*

Démonstration. Supposons que f soit intégrable au sens de Riemann. Nous savons qu'une telle fonction est bornée : il existe M avec $|f(x)| \leq M$ pour tout x. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer que l'on peut recouvrir D_k par la réunion d'une suite d'intervalles dont la somme des longueurs est $< \varepsilon$. Ainsi D_k sera de mesure nulle et $D = \cup_k D_k$ le sera aussi. Puisque f est intégrable il existe une subdivision P de $[a,b]$ pour laquelle

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) - \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) \right) (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Supposons qu'un intervalle I_i de la partition P contienne un point x de D_k en son intérieur.

Montrons que $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) \geq \limsup_{x \to c} f(x)$ et que $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) \leq \liminf_{x \to c} f(x)$. Pour tout $\eta > 0$ il existe une suite $x_n \to x$, que l'on peut supposer contenue dans I_i puisque x est intérieur à cet intervalle, telle que $f(x_n) \to \gamma$ et que $\limsup_{t \to x} f(t) - \eta < \gamma$. Cette dernière inégalité étant stricte, on a aussi $\limsup_{t \to x} f(t) - \eta < f(x_n)$ pour un n assez grand et donc

$$\limsup_{t \to x} f(t) - \eta < f(x_n) \leq \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) = M_i.$$

Comme η est quelconque ceci prouve que $\limsup_{t \to x} f(t) \leq M_i$.

On obtient ainsi

$$\frac{\varepsilon}{2k} > \sum_i (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum \operatorname{osc}_f(x)\Delta x_i > \sum_i \frac{\Delta x_i}{k}$$

où la somme est prise pour tout i tel que I_i contienne un point x de D_k en son intérieur et donc

$$\sum_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quant aux points de D_k situés en des points de la partition, donc en nombre fini, on peut, eux-aussi, les recouvrir par des intervalles J_j dont la somme des longueurs est $< \varepsilon/2$. La réunion des I_i et des J_j contient D_k et la somme de leurs longueurs est $< \varepsilon$. Ceci prouve que D_k est de mesure nulle.

Réciproquement, supposons que f soit bornée (par M) et que l'ensemble D de ses discontinuités soit de mesure nulle. Soient $\varepsilon > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

L'ensemble $D_k \subset D$ est lui aussi de mesure nulle donc il possède un recouvrement par des intervalles $J_j =]a_j, b_j[$ avec

$$\sum_j b_j - a_j \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Si $x \notin D_k$, il existe un intervalle $I_x \subset [a, b]$ contenant x tel que

$$\sup_{t \in I_x} f(t) - \inf_{t \in I_x} f(t) < \frac{1}{k}.$$

En effet, puisque f est continue en x, pour tout $\eta > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| \leq \eta$ pour tout t tel que $|t - x| \leq \rho$. On en déduit que

$$f(s) - f(t) \leq |f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(x)| + |f(x) - f(t)| \leq 2\eta$$

dès que $|s - x| \leq \rho$ et $|t - x| \leq 2\rho$ et donc que

$$\sup_{s \in I_x} f(s) - \inf_{t \in I_x} f(t) < \frac{1}{k}$$

si l'on prend $2\eta < 1/k$ et $I_x =]x - \rho, x + \rho[$.

L'ensemble des intervalles J_j et I_x ainsi construits recouvre $[a, b]$ qui est un ensemble compact. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Soit P une partition de $[a, b]$ dont chaque sous-intervalle est contenu soit dans un I_x soit dans un J_j. Notons $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cette partition.

- Lorsque $P_p = [x_{p-1}, x_p] \subset I_x$ on a $M_p - m_p < \frac{1}{k}$,
- Quant aux intervalles $P_p = [x_{p-1}, x_p] \subset J_j$ la sonmme de leurs longueurs vérifie
$$\sum_{P_p \subset J_j} x_p - x_{p-1} \leq \sum_j b_j - a_j \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Considérons les sommes de Darboux associées à cette partition. On a :

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_p \left(\sup_{s \in P_p} f(s) - \inf_{t \in P_p} f(t) \right) (x_p - x_{p-1}) \leq \sum_{P_p \subset I_x} + \sum_{P_p \subset J_j} <$$

$$\sum_{P_p \subset I_x} \frac{x_p - x_{p-1}}{k} + \sum_{P_p \subset J_j} 2M(x_p - x_{p-1}) \leq \frac{b-a}{k} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon.$$

Ainsi f est intégrable au sens de Riemann. $\square$

Corollaire 2. *Les fonctions suivantes sont intégrables au sens de Riemann :*

1. *Les fonctions continues,*
2. *Les fonctions continues par morceaux,*
3. *Les fonctions monotones,*
4. *Le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann,*
5. *La valeur absolue d'une fonction intégrable au sens de Riemann.*