Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2007-1

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$
   (a) N'est pas une fonction réglée,
   (b) Possède une primitive stricte (considérer la fonction $x^2 \cos(1/x)$).
2. Montrer qu'une fonction réglée ne peut posséder qu'un ensemble au plus dénombrable de discontinuités (indication : une telle fonction est limite uniforme de fonctions en escalier).
3. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable il existe une bijection $q : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$. On notera q_n pour $q(n)$. Ainsi les q_n sont deux à deux distintcs et tout nombre rationnel est égal à un q_n pour un entier $n > 0$ convenable. Pour tout nombre réel r on note f_r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_r(x) = 0$ si $x < r$, $1/2$ si $x = r$ et 1 si $x > r$. On note enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_{q_n}(x).$$
   (a) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 2^{-N-1} \text{ si } x = q_N. \end{cases}$
   (c) f est strictement croissante, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.
   (d) f est réglée.
   (e) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (f) f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$ (on utilisera la définition de f). Que vaut $f_+(q_n) - f_-(q_n)$? Que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} f_+(q_n) - f_-(q_n)$?