Exercice 1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide (ou plus généralement d'un espace vectoriel normé) et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans $\mathbb{R}$. On dira que la suite $(f_n)_n$* **converge continuement** *vers $f : A \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in A$, pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ convergente vers x la suite $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

1) Montrer que la convergence continue implique la convergence simple.

2) Soit $(f_n)_n$ une telle suite, $x \in A$ et $(x_n)_n$ dans A convergente vers x. Montrer que pour toute sous-suite $(f_{n_k})_k$

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

*3) Si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, montrer que f est continue sur A (**même** si les f_n ne sont pas continues !)*

4) Montrer que toute suite $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers une fonction $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ converge continuement sur A. La réciproque est-elle vraie ?

5) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie compacte K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers $f \in \mathscr{C}^0(K)$.

(ii) La suite $(f_n)_n$ est continuement convergente sur K vers f.

Solution.

❶ Si la suite $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A et si pour $x \in A$ on considère la suite constante $x_n = x$ alors :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

i.e. $(f_n)_n$ est simplement convergente sur A vers f.

❷ Soit donc $(f_{n_k})_k$ une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ et $(x_n)_n$ une suite dans A convergente vers $x \in A$. Considérons alors la suite $(y_m)_m$ définie par

$$y_m = \begin{cases} x_1 & \text{pour} \quad 1 \leq m \leq n_1, \\ x_2 & \text{pour} \quad n_1 < m \leq n_2, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_k & \text{pour} \quad n_k < m \leq n_{k+1} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La suite $(y_m)_m$ est bien entendu encore convergente vers x et on a donc

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x_m) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k).$$

❸ Avec la première question, si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, elle converge simplement sur A vers f. Montrons que f est continue sur A : soit $x \in A$, $(x_n)_n \subset A$ une suite convergente vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, par la convergence de $(f_n(x_1))_n$ vers $f(x_1)$ il existe n_1 (qui à priori dépend de x_1) tel que

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $n_2 > n_1$ tel que

$$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En réitérant ce processus, on construit une suite strictement croissante d'entiers vérifiant

(1) $$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais avec la question précédente $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$, si bien qu'il existe aussi un entier k_0 tel que

(2) $$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Finalement (1) et (2) assurent que

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

et f est continue au point x, elle est donc continue sur A.

❹ ➪ Supposons maintenant que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers une fonction continue f (les fonctions f_n n'étant pas continues, l'hypothèse de continuité sur f est essentielle vu la question précédente) et montrons que la convergence est continue sur A. Soit donc $(x_n)_n \subset A$ une suite convergente vers $x \in A$. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous avons

(3) $$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{y\in A} |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Et par continuité de f

$$(4) \qquad |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Ainsi, pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, nous avons vu (3) et (4)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où la convergence continue sur A.

➪ La réciproque est fausse. Considérons par exemple $A =]0,1[$ et $f_n(x) = x^n$. Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_n$ simplement convergente sur $]0,1[$ vers la fonction f identiquement nulle n'est pas uniformément convergente sur $]0,1[$. Toutefois cette suite converge continuement sur $]0,1[$ vers f car pour toute suite $(x_n)_n \subset]0,1[$ convergente vers $x \in]0,1[$ il existe $0 < a < 1$ tel que $0 < x_n < a$ de sorte que

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n)| \leq a^n$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0 = f(x).$$

❺ ➪ la condition nécéssaire ($\Rightarrow$) à été établie lors de la question précédente.

➪ Pour la condition suffisante ($\Leftarrow$), avec la question 2), nous savons déja que la limite f est continue sur K. Supposons maintenant que notre suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur K : il existe donc $\varepsilon_0 > 0$, une suite $(n_k)_k$ d'entiers et une suite $(x_k)_k$ dans K tels que

$$(5) \qquad \forall k \in \mathbb{N} : \quad |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0.$$

Comme K est compact on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite $(x_k)_k$ converge vers $x \in K$. Avec la question 1), il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(6) \qquad |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall n \geq N_0.$$

Par continuité de f, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(7) \qquad |f(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall n \geq N_1,$$

si bien qu'en combinant $(5), (6)$ et (7) on obtient pour n assez grand

$$\varepsilon_0 \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{2\varepsilon_0}{3}$$

ce qui est absurde. ❑

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(1/n) = 1$, $f_n(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_- \cup [2/n, +\infty[$ et affine sur $[0, 1/n]$ & $[1/n, 2/n]$.

Soit $m \mapsto r_m$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. On pose

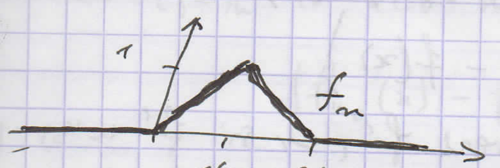
$$g_n(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}.$$

① Etudier la continuité de g_n.

② Montrer que la suite $(g_n)_n$ est SCV sur $\mathbb{R}$ mais ne CV uniformément sur aucun ouvert de $\mathbb{R}$.

---

①



Soit $n \geq 1$. f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de $x \mapsto \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}$, $m \in \mathbb{N}^*$; comme $\|f_n\|_\infty = 1$ on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{f_n(x - r_m)}{2^m} \right| \leq \frac{1}{2^m}$ d'où la NCV de la série définissant g_n et par suite $g_n \in C^0(\mathbb{R})$.

② ✱ Soit $m \geq 1$. On vérifie sans peine que la suite $(f_n)_n$ est SCV sur $\mathbb{R}$ vers 0, il en est donc de même de $\left(x \mapsto \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}\right)_n$

Soit $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire pour tout $N \geq 1$

$\varepsilon > 0$

$$0 \leq g_n(x) = \sum_{m=1}^{N} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m} + \sum_{m \geq N+1} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m} + \sum_{m \geq N+1} \frac{1}{2^m} \quad (f_n \geq 0)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m} + \frac{1}{2^N}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{m=1}^{N} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}}_{} + \varepsilon \quad (\text{si } N \geq N_\varepsilon)$$

N étant fixé ce terme tends vers zéro avec n comme somme finie de termes qui tendent vers 0

$$\leq 2\varepsilon \quad \text{si } n \geq n_\varepsilon \quad (n \geq n(\varepsilon, \underline{x}))$$

<u>Conclusion</u> : La suite $(g_n)_n$ est SCV vers 0 sur $\mathbb{R}$

$I =]a,b[$

⊛ La convergence n'est pas uniforme sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$ (non trivial). En effet, pour un tel intervalle la densité de $\mathbb{Q}$ assure qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$: $r_m \in I$. I est ouvert donc $r_m + \frac{1}{n} \in]a,b[$ pour $n \gg$, de là

$$\sup_{a<x<b} g_n(x) \geq \sup_{a<x<b} \frac{f_n(x-r_m)}{2^m} \underset{x=r_m}{=} \frac{1}{2^m} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

la CV de $(g_n)_n$ vers 0 n'est donc pas uniforme sur $]a,b[$

CQFD

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ à dérivée UC sur $\mathbb{R}$. On pose pour $n \geq 1$

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Montrer que $(f_n)_n$ est UCV sur $\mathbb{R}$ vers f', et si f' n'est plus UC sur $\mathbb{R}$?

La SCV de $(f_n)_n$ vers f' sur $\mathbb{R}$ est évidente

Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par le TAF on a

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left|\frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} - f'(x)\right|$$

$$= |f'(\xi_{n,x}) - f'(x)|$$

où $|\xi_{n,x} - x| \leq 1/n$

maintenant f' étant UC sur $\mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \eta_\varepsilon$ tel que $|x-y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon$ il suffit donc de choisir $n \geq N_\varepsilon = [1/\eta_\varepsilon]$.

Si $f(x) = x^3$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = +\infty$$

Donc pas UCV.

$(f_n)_n \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une suite UCV sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre f_n unif^t continue sur $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, montrer que $f = \lim f_n$ est UC sur $\mathbb{R}$

Il s'agit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, \eta_\varepsilon$:

$$|x-y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $(f_n)_n$ est UCV sur $\mathbb{R}$ vers f il existe n_0 tq

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f_{n_0} étant UC sur $\mathbb{R}$ $\exists\, \delta > 0$: $|x-y| < \delta \Rightarrow$ $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Par conséquent

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq 3\varepsilon \quad \text{si} \quad |x-y| < \delta \qquad \text{CQFD}$$

$(p_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ une suite de polynômes UCV sur $\mathbb{R}$, montrer que $f = \lim p_n$ est un polynôme.

La suite satisfait au critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$, en particulier : $\exists\, n_0$: $m \geq n_0$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_m(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1$$

le polynôme $P_m - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$ donc constant égal à C_m $(= P_m(0) - P_{n_0}(0))$ comme $\lim\limits_{n\to\infty} P_m(0) = f(0)$

on aura $\quad P_m(x) - P_{n_0}(x) = P_m(0) - P_{n_0}(0) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(0) - P_{n_0}(0)$

ie

$$f(x) = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0) \qquad \underline{\text{CQFD}}$$

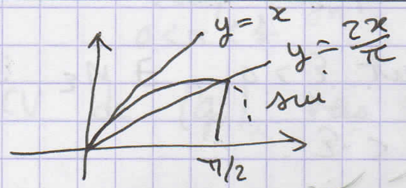
1) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$: $\sin(x) \geq 2x/\pi$

2) Soit $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. MQ $f \in C^0(\mathbb{R})$.

3) Montrer que f n'est pas dérivable à l'origine

---

1)



Posons $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, x]$ on a pour tout $0 < x \leq \pi/2$ il existe $\theta_x \in]0, x[$ tel que $\frac{\sin x}{x} = \cos(\theta_x)$. De là pour $0 < x \leq \pi/2$:

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - \frac{\sin x}{x}}{x} = \frac{\cos x - \cos\theta_x}{x} < 0$$

puisque $0 < \theta_x < x \leq \pi/2$: g est donc décroissante sur $[0, \pi/2]$: $g(x) \leq g(\pi/2) = \frac{2}{\pi}$ CQFD.

2) Comme $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{\sin(2^n x)}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$: la série est NCV sur $\mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

3) Posons pour $N \in \mathbb{N}^*$ $x_N = \frac{\pi}{2^{N+1}}$, pour $n \geq N+1$ $\sin(2^n x_N) = 0$ et par suite

$$f(x_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2^n x_N)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^n x_N}{2^n} = \frac{2N x_N}{\pi}$$

$x_N \in [0, \pi/2]$

on a donc :

$$\lim_{N \to \infty} x_N = 0 \quad , f(0) = 0$$

$$\frac{f(x_N)}{x_N} \geq \frac{2N}{\pi} \longrightarrow +\infty$$

f n'est pas dérivable à l'origine.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin \circ \sin \dots \circ \sin}_{n \text{ fois}} (x)$$

1) Etude de la série $\sum f_n$

2) Chercher un équivalent de $|f_n(1)|$ y a t'il NCV sur $\mathbb{R}$?

---

1) Posons $v_n(x) =$ ~~[illegible]~~ $\sin \circ \sin \circ \dots \circ \sin(x)$

Comme $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$ et $\sin([-1,1]) \subset [-1,1]$ on en deduit que $\forall n \geq 1$, $v_n(x) \in [-1,1]$ et comme sur $[-1,1]$ $\sin x$ est du signe de x, $v_n(x)$ est du signe de $v_1(x)$: la série de terme general $(-1)^n v_n(x)$ est donc alternée

Pour appliquer le th. des séries alternées il reste à verifier que $|v_n|$ tends vers 0 en décroissant. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leq |x|$: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R} : |v_{n+1}(x)| \leq |v_n(x)|$

La suite $(|v_n(x)|)_n$ est décroissante minorée par zero elle est donc CV de limite $l \geq 0$. Comme $|v_{n+1}(x)| = |\sin(v_n(x))|$ par passage a la limite & continuite en l on tire $|\sin l| = |l|$ en etudiant les fonctions $x \mapsto \sin x \pm x$ on verifie que $l = 0$

On peut donc appliquer le th. des series alternées : il y a donc SCV sur $\mathbb{R}$ de la série

<u>Remarque</u> : le theoreme des series alternees permet aussi de majorer le reste :

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| \leq |f_n(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(1)| \to 0$$

d'où l'UCV sur $\mathbb{R}$ de la serie et la continuité de f.

2) On pose $a_n = |f_n(1)| = \sin(\sin \dots \sin(1))$

Comme $a_n \to 0$

$$a_{n+1} = \sin(a_n) = a_n - \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} = a_n^{\alpha}\left\{\left(1 - \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right)^{\alpha} - 1\right\}$$

$$= a_n^{\alpha}\left[1 - \frac{\alpha a_n^2}{6} + o(a_n^2) - 1\right]$$

$$= a_n^{\alpha} - \frac{\alpha a_n^{2+\alpha}}{6} + o(a_n^{2+\alpha})$$

$$\underset{n}{\sim} -\frac{\alpha a_n^{2+\alpha}}{6}$$

En particulier si $\alpha = -2$

$$a_{n+1}^{-2} - a_n^{-2} \sim \frac{1}{3}$$

car $\sum \frac{1}{3}$ DV $\Downarrow$ equivalent $\sum$ partielles

De là $a_n^{-2} - a_2^{-2} = \sum_{2}^{n-1}\left(a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right) \sim \frac{n-2}{3} \sim \frac{n}{3}$

soit finalement $a_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$ (car $a_n^{-2} \to \infty$) puis $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

il en resulte que la serie $\sum a_n$ diverge et par conseque $\sum \|f_n\|_{\infty}$ aussi d'où la non NCV sur $\mathbb{R}$

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ verifiant $|f(x)| < |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la suite $(f_n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{ fois}})_n$ UCV sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle

---

Soit $\varepsilon > 0$ il s'agit de montrer qu'il existe $N_\varepsilon : n \geq N_\varepsilon : |f_n(x)| \leq \varepsilon$, $|x| \leq a$

Sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ on a deja $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sur $[-a, a] \setminus [-\varepsilon, +\varepsilon]$ on a $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 1$. En particulier sur le compact $[-a, a] \setminus]-\varepsilon, +\varepsilon[$ la fonction continue $x \mapsto \left|\frac{f(x)}{x}\right|$ atteint sa borne superieure $M \in]0, 1[$: $|f(x)| \leq M|x|$ $\forall x \in [-a, a] \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[$

et par suite $|f_n(x)| \leq M^n |x| \leq M^n |a| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$

et CQFD

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

1/. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est SCV sur $\mathbb{R}$, on note S sa limite.
2/. Montrer que pour $\alpha > 1/2$ la série est NCV sur $\mathbb{R}$.
3/. Montrer que pour $0 < \alpha \leq 1/2$ la série est NCV sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $\forall a > 0$.
4/. Pour $0<\alpha<1/2$ et $N \geq 1$, montrer que $S(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n \geq 4N} u_n(1/\sqrt{N}) \geq \frac{\sqrt{N}}{2}\int_{4N}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$. conclusion ?
5/. Préciser le domaine de continuité de S suivant les valeurs de α.
6/. Montrer que $\sum u_n'$ est NCV sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha > 1$.
7/. Pour $0 < \alpha \leq 1$, montrer que $\sum u_n'$ est NCV sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $\forall a > 0$.
8/. Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de S ? [pour $1/2 < \alpha \leq 1$, on étudiera le taux d'accroissement en 0].

1/. Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$. Si $x \neq 0$ $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} 1/x . n^{1+\alpha}$ avec $1+\alpha > 1$ d'où la SCV sur $\mathbb{R}$.

2/. Si $\alpha > 1/2$: u_n est impaire, on l'étudie sur $\mathbb{R}^+$, $u_n'(x) = (1-nx^2).n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-2}$
$\Rightarrow \|u_n\|_{\mathbb{R}} = u_n(1/\sqrt{n}) = 1/2 n^{\alpha+1/2}$ t.g. série cv car $\alpha + 1/2 > 1$: $\alpha > 1/2$ NCV de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$.

3/. Pour $0 < \alpha \leq 1/2$. Si $a > 0$ et n t.q $1/\sqrt{n} < a$ l'étude précédente prouve que $\|u_n\|_{[a,+\infty[} = u_n(a)$ terme général d'une série cv $\Rightarrow$ NCV de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R} \setminus]-a, +a[$.

4/. Soit $0 < \alpha \leq 1/2$ et $N \geq 1$: $S(1/\sqrt{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n=4N}^{\infty} u_n(1/\sqrt{N}) \geq \sum_{n=4N}^{+\infty} 1/\sqrt{N}.n^\alpha(1+\frac{n}{N})$
$\geq \sum_{n \geq 4N} 1/n^\alpha.\sqrt{N}.2nN^{-1}$ car $\frac{n}{N} \geq 4 \geq 1$, comme $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \geq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ il vient :
$|S(1/\sqrt{N})| \geq \frac{\sqrt{N}}{2} \sum_{n \geq 4N} \int_{n-1}^{n} t^{-\alpha-1} dt \geq \frac{\sqrt{N}}{2}\int_{4n}^{+\infty} t^{-\alpha-1} dt = \frac{\sqrt{N}}{2}.4^{-\alpha} N^{-\alpha} = C.N^{1/2-\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0<\alpha<1/2 \\ C>0 & \text{si } \alpha = 1/2 \end{cases}$
Dans tous les cas il est clair que $\lim_{N\to\infty} S(1/\sqrt{N}) \neq 0 = S(0)$.

5/. Vu ce qui précède pour $\alpha > 1/2$ $S \in C^0(\mathbb{R})$ comme limite uniforme de fonctions continues.
Pour $0 < \alpha \leq 1/2$ $S \in C^0(\mathbb{R} \setminus]-a, +a[)$ $\forall a > 0$ donc $S \in C^0(\mathbb{R}^*)$ pour les mêmes raisons.
Et vu 4/. il est clair que pour $\alpha \in]0, 1/2]$. S n'est pas continue en 0.

6/. Si $\alpha > 1$ Alors : $|u_n'(x)| = \dfrac{|1-nx^2|}{(1+nx^2)^2 n^\alpha} \leq \dfrac{1+nx^2}{(1+nx^2)^2 n^\alpha} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ t.g. série cv ($\alpha > 1$) : $\sum u_n'$ NCV sur $\mathbb{R}$.

7/. Si $0 < \alpha \leq 1$: Si $x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$: $|u_n'(x)| \leq \dfrac{|1-na^2|}{(1+na^2)^2 n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}.a^2}$ t.g. série cv dc NCV sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$.

8/. Si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est SCV sur $\mathbb{R}$ vers S et $\sum u_n'$ est UCV sur $\mathbb{R}$ (6/.) : S dérivable sur $\mathbb{R}$ et $S' = \sum u_n'$.
Si $0 < \alpha \leq 1/2$ la série $\sum u_n$ SCV sur $\mathbb{R}$ vers S et $\sum u_n'$ UCV sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$ $\forall a > 0$ il en résulte que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $S' = \sum u_n'$. mais pas en 0 car S non continue !
Si $1/2 < \alpha \leq 1$ le m raisonnement prouve que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Cette fois-ci la dérivabilité en 0 est possible. Etudions le taux d'accroissement en 0 : $\lim_{x\to0} \frac{S(x)-S(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{S(x)}{x}$
Par imparité de S on peut supposer $x > 0$, alors :
$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n\geq1} n^{-\alpha}(1+nx^2)^{-1} \geq \sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha(1+nx^2) \geq \sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha(1+Nx^2)$ et par suite si $x = 1/\sqrt{N}$
$\frac{S(x_N)}{x_N} \geq \sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha.2 = S_N$ somme partielle série DV ($\alpha \leq 1$) : S n'est pas dérivable en 0 pour $1/2 < \alpha \leq 1$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n + \alpha^{2n}.x^2}$.

1/. Déterminer l'ensemble I des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite de fonctions $(u_n)_n$ soit SCV sur $\mathbb{R}$.

2/. Déterminer l'ensemble J des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la série de fonctions $\sum u_n$ soit SCV sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha \in J$, soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3/. Pour $\alpha \in J \setminus \{1\}$, calculer $f_\alpha(0)$ en fonction de α.

4/. Soit $\alpha \in]-1, +1[$. Démontrer que :

a/. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est NCV sur $\mathbb{R}$.

b/. f_α est continue sur $\mathbb{R}$.

c/. Pour tout $b > 0$, la série de fonction $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ converge normalement sur $[-b, +b]$.

d/. f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f_\alpha'(x)$ sous forme de somme d'une série et en déduire $f_\alpha'(0)$.

5/. Soit $\alpha = 1$. Démontrer que :

a/. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \left|\sum_{n+1}^{\infty} u_n(x)\right| = |R_n(x)| = |f_1(x) - S_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1+x^2} \leq \dfrac{1}{n}$.

b/. La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est UCV sur $\mathbb{R}$.

c/. $f_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

d/. $\forall x \in \mathbb{R} : \left|f_1(x) - \dfrac{1}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{2+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$; $0 \leq f_1(x) \leq \dfrac{2}{1+x^2}$.

e/. $\lim_{\pm\infty} f_1(x) = 0$

f/. f_1 est dérivable ; donner $f_1'(x)$ sous forme d'une somme de série et en déduire $f_1'(0)$.

1/. Si $|\alpha| \leq 1$ alors $\alpha^{2n}.x^2 \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} n^{-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (à côté pour $x = \pm 1$).
Si $|\alpha| > 1$ alors $\alpha^{2n} \to +\infty$. Et $|u_n(x)| \sim \dfrac{|\alpha|^n}{|\alpha|^{2n}x^2} \to 0$. $|u_n(0)| = \alpha^n . n^{-1} \to +\infty$, il n'y a donc SCV sur $\mathbb{R}$.
Conclusion $\boxed{I = [-1, +1]}$.

2/. Si $|\alpha| > 1$, $u_n(0) \not\to 0$ et donc $\sum u_n(0)$ DV. Il n'y a donc pas SCV sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha < 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R} : |u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|\alpha|^n}{n} \leq |\alpha|^n$ et $\sum |\alpha|^n$ ce qui assure la NCV sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} : u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ série alternée CV car $\dfrac{1}{n+x^2} \searrow 0$. : SCV $\sum_1^{\infty} u_n$ sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = -1$, $-u_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2} \sim \dfrac{1}{n}$ donc DV : $\boxed{J =]-1, 1]}$

3/. $\forall \alpha \in J \setminus \{1\}$; $f_\alpha(0) = \sum_1^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n} = \varphi(\alpha) = \ln(1+\alpha)$.

4a/. Déjà vu plus haut. ~~Chaque u_n étant continue sur $\mathbb{R}$~~

4b/. Pour $n \geq 1$ chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ est UCV sur $\mathbb{R}$ donc $f_\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

4.c/. $\forall x \in \mathbb{R}$ $u_n'(x) = (-1)^n 2x\alpha^{3n}(n + \alpha^{2n}x^2)^{-2}$: $\forall x \in [-b, +b] : |u_n'(x)| \leq 2b|\alpha|^{3n}.n^{-2} \leq 2b/n^2$
ce qui implique la NCV sur $[-b, +b]$ d'où l'UCV.

4.d/. D'après un th. du cours 4.a et 4.c assure que $\forall b > 0$ f_α est dérivable sur $[-b, +b]$ et $f_\alpha'(x) = \sum_1^{\infty} u_n'(x)$
ceci étant vrai pour tout b, c'est vrai sur $\mathbb{R}$. Il en résulte immédiatement que $f_\alpha'(0) = 0$.

5/. Si $\alpha = 1$, on sait que pour $x \in \mathbb{R}$ $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ est une série alternée. Par conséquent $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$
i.e. $\forall x \in \mathbb{R} : |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq 1/n$.
Ainsi $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - S_n(x)| \leq 1/n \iff S_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

5.b/c/ f_1 est alors continue sur $\mathbb{R}$ comme limite uniforme de fonctions continues.

5.d/e/ Comme en 5.a $\left|f_1(x) - \dfrac{1}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{2+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow 0 \leq f_1(x) \leq \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow \lim_{\pm\infty} f_1(x) = 0$.

5f/
$|u_n'(x)| = \left|\dfrac{2(-1)^n x}{(n+x^2)^2}\right| \leq \dfrac{2|x|}{n^2} \leq \dfrac{2b}{n^2}$ sur $[-b, +b]$ et comme 4.d $\sum u_n'$ NCV sur $[-b, b]$, $\sum u_n$ SCV sur $\mathbb{R}$
donc f_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. En particulier $f_1'(0) = 0$

CQFD