L3 MAPES, ANALYSE, Feuille 1.

Exercice 1. *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = Arctan(x/n)$.*

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?

2) Montrer que la suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $f_n(x) = nf(x + n^{-1}) - f(x))$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f'. Par un exemple, montrer que l'hypothèse de continuité uniforme sur f' est essentielle.*

Exercice 3. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $|f(x)| < |x|$. Montrer que la suite des itérés $(f^n := f \circ f \cdots \circ f)_n$ est uniformément convergente vers la fonction nulle sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.*

Exercice 4. *Soit $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ une suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$; si de plus les f_n sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction limite est aussi uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 5. *Soit $(p_n)_n \subset \mathbb{R}[x]$ une suite de polynômes uniformément convergente sur $\mathbb{R}$; montrer que sa limite est encore un polynôme.*

Exercice 6. *Pour $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose : $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n + \alpha^{2n}x^2}$.*

1) Déterminer l'ensemble I des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite de fonctions $(f_n)_n$ soit simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble J des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ soit simplement convergente sur $\mathbb{R}$ (pour $\alpha \in J$ on posera $f_\alpha := \sum_n f_n$).

2) Pour $\alpha \in J \setminus \{1\}$ expliciter $f_\alpha(0)$.

3) Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Démontrer que :

a) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Que dire pour f_α ?

b) Pour tout $b > 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[-b, b]$. En déduire que f_α' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_\alpha'(0)$.

4) Ici $\alpha = 1$. Démonter que :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$: $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{n}$. Conclusion ?

b) $\forall_, x \in \mathbb{R}$: $\left|f_1(x) - \dfrac{1}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire les limites en $\pm\infty$ de f_1.

c) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f_1'(0)$.

Exercice 7. *Pour $\alpha > 0,\ x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$.*

1) Montrer que la série $\sum_1^\infty f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, on note F_α sa limite.

2) Montrer que pour tout $\alpha > 1/2$, la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1/2$, la série converge normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[,\ \forall a > 0$.

4) Pour $0 < \alpha < 1/2$ et $N \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $F_\alpha(1/\sqrt{N}) \geq \displaystyle\sum_{n\geq 4N} f_n(1/\sqrt{N}) \geq \frac{\sqrt{N}}{2}\int_{4N}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$, conclusion ?

5) Préciser le domaine de continuité de F_α suivant les valeurs de α.

6) Montrer que pour $\alpha > 1$, la série $\sum_1^\infty f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

7) Pour $0 < \alpha \leq 1$ montrer que la série $\sum_1^\infty f_n'$ converge normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[,\ \forall a > 0$.

8) Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de F_α ? (pour $1/2 < \alpha \leq 1$ on pourra étudier le taux d'accroissement de F_α en 0.

Exercice 8. *Etudier la convergence uniforme des séries suivantes sur l'ensemble A :*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right), \quad A =]0, +\infty[.$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 1/2 \leq |x| \leq 2\}.$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - Arctan(n^2(1+x^2))\right), \quad A = \mathbb{R}.$

Exercice 9. *1) Montrer que pour tout* $x \in [0, \pi/2]$ *:* $\sin(x) \geq 2x/\pi$.

2) Montrer que la fonction f *définie par* $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f *n'est pas dérivable à l'origine.*

Exercice 10. *On considère* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(1/n) = 1$, $f_n(x) = 0$ *sur* $\mathbb{R}_- \cup [2/n, +\infty[$ *et* f_n *affine sur* $[0, 1/n]$ *et* $[1/n, 2/n]$*. Soit* $m \mapsto r_m$ *une bijection de* $\mathbb{N}^\star$ *sur* $\mathbb{Q}$*. On pose :*

$$g_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_n(x - r_m)}{2^m}.$$

1) Etudier la continuité de g_n.

2) Montrer que la suite $(g_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$ *mais ne converge uniformément sur aucun ouvert de* $\mathbb{R}$.

Exercice 11. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *une partie non vide (ou plus généralement d'un espace vectoriel normé) et* $(f_n)_n$ *une suite d'applications de* A *dans* $\mathbb{R}$*. On dira que la suite* $(f_n)_n$ ***converge continuement*** *vers* $f : A \to \mathbb{R}$ *si pour tout* $x \in A$*, pour toute suite* $(x_n)_n \subset A$ *convergente vers* x *la suite* $(f_n(x_n))_n$ *converge vers* $f(x)$.

1) Montrer que la convergence continue implique la convergence simple.

2) Soit $(f_n)_n$ *une telle suite,* $x \in A$ *et* $(x_n)_n$ *dans* A *convergente vers* x*. Montrer que pour toute sous-suite* $(f_{n_k})_k$

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

3) Si $(f_n)_n$ *converge continuement vers* f *sur* A*, montrer que* f *est continue sur* A *(**même** si les* f_n *ne sont pas continues !)*

4) Montrer que toute suite $(f_n)_n$ *uniformément convergente sur* A *vers une fonction* $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ *converge continuement sur* A*. La réciproque est-elle vraie ?*

5) Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur une partie compacte* K*. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite $(f_n)_n$ *est uniformément convergente vers* $f \in \mathscr{C}^0(K)$.

(ii) La suite $(f_n)_n$ *est continuement convergente sur* K *vers* f.

Exercice 12. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f_n(x) = (-1)^n \sin(\sin(\ldots(\sin(x))\ldots)).$$

(n itérations du sinus)

1) Montrer que la suite $(f_n(x))_n$ *est alternée puis vérifie les hypothèse du « théorème des séries alternées ». En déduire la simple convergence sur* $\mathbb{R}$ *de la série* $\sum_n f_n$ *; justifier enfin l'uniforme convergence sur* $\mathbb{R}$.

2) On va montrer qu'il n'y a pas normale convergence sur $\mathbb{R}$*, pour cela on pose* $a_n = \sin(\sin(\ldots(\sin(1))\ldots))$*. Montrer que pour*

$$\alpha \in \mathbb{R} : a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\alpha a_n^{\alpha+2}}{6}.$$

En considérant $\sum_{k=2}^{n-1} \left(a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right)$ *en déduire un équivalent de* a_n *et conclure.*