« SUR LA LONGUEUR D'UNE COURBE »

PATRICE LASSÈRE

Résumé. Voici quelques développements possibles pour la leçon d'exercices sur ce thème.

1. Préliminaires

(consultez votre manuel favori) Un arc ou courbe paramétrée de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$ (ou un espace Euclidien) est une application $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur d'un arc paramétré $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d) \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R}^d)$ est le réel positif

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + \cdots + f_d^2(t)}dt.$$

on appelle abscisse curviligne de l'arc orienté $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R}^d)$, toute application $s\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, t_1, t_2 \in [a,b]\ \ :\qquad s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\|dt.$$

L'abscisse curviligne est déterminée à une constante prés, c'est un difféomorphisme de classe C^1 de $I = [a,b]$ sur $J = s([a,b])$ et l'arc

$$J \ni t \mapsto g(t) = f(s^{-1}(t))$$

est un reparamétrage de l'arc f et ce paramétrage est dit normal car $\|g'\| = 1$.

2. Problèmes de plus court chemin (géodésiques)

Le plus court chemin reliant deux points dans $\mathbb{R}^d$ est la ligne droite : Soient $A, B \in \mathbb{R}^d$, trouver le plus court chemin revient à minimiser

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\|dt$$

parmi toutes les courbe $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t)),\ t_in[0,1]$ de classe C^1 reliant $A = f(0)$ à $B = f(1)$. n note L_{min} cet infimum.
Le segment $[A,B]$ est paramétré par $f_0(t) = (1-t)A + tB,\ t \in [0,1]$ i.e.

$$L_{min} \leq L(f_0) = \int_0^1 \|A - B\|dt = \|A - B\|.$$

Par conséquent, pour montrer que le plus court chemin est la ligne droite il faut montrer que

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\|dt \geq \|A - B\|$$

pour chemin f reliant A à B. Soit f un tel chemin, si $B = A$ il n'y a rien à démontrer, sinon par le théorème fondamental du calcul intégral

$$B - A = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt$$

donc

$$\begin{aligned}
\|A-B\|^2 &= \langle B-A, B-A\rangle \\
&= \langle B-A, \int_0^1 f'(t)dt\rangle \\
&= \int_0^1 \langle B-A, f'(t)\rangle dt \\
&\leq \int_0^1 \|A-B\|\cdot\|f'(t)\|dt \quad \text{(par Cauchy} - \text{Schwarz)} \\
&= \|A-B\|\cdot L(f)
\end{aligned}$$

soit ($B\neq A$) : $\|A-B\|\leq L(f)$ et le tour est joué.
On peut remarquer que le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz assure que $L(f)=\|A-B\|=L_{min}$ si et seulement si $f'(t)$ est colinéaire à $B-A$ soit finalement $f=f_0$.

Le plus court chemin tracé sur la sphère de $\mathbb{R}^3$ reliant deux points dans est un méridien : On localise un point P sur la sphère $S(O_{\mathbb{R}^3}, R)$ par ses coordonnées sphériques (R,θ,ϕ) où

$$P=(R\cos(\theta)\sin(\phi), R\sin(\theta)\sin(\phi), R\cos(\phi)),\ 0\leq\phi\leq\pi,\ 0\leq\theta<2\pi, R>0.$$

Donnons nous deux points A, B sur la sphère et cherchons le plus court chemin (toujours de classe C^1) les reliant. Sans perdre de généralité on peut supposer que $A=(R,0,0)$ (c'est le pôle nord $\phi=0$) et quitte a faire tourner la sphère autour de l'axe de ce pôle, supposons que $B=(R,0,\phi_1)$. Alors un chemin reliant A et B sur la sphère aura la représention paramétrique

$$f(t)=(R\cos(\theta(t))\sin(\phi(t)), R\sin(\theta(t))\sin(\phi(t)), R\cos(\phi(t))),\ t\in[0,1]$$

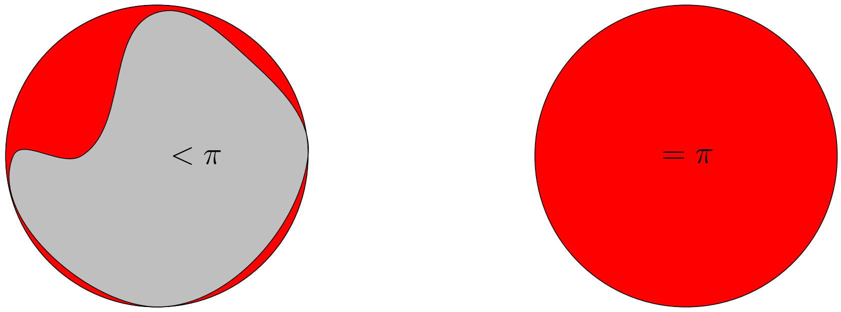
avec $f(0)=A$ et $f(1)=B$ soit $0=\phi(0)=\theta(1)$ et $\phi(1)=\phi_1$. La longueur de la courbe est donnée par

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_0^1 \|f'(t)\|dt \\
&= R\int_0^1 \sqrt{\sin^2(\phi(t))\theta'(t)+\phi'^2(t)}dt \\
&\geq R\int_0^1 \phi'(t)dt = R(\phi(1)-\phi(0)) = R\phi_1.
\end{aligned}$$

et $R\phi_1$ correspond à la longueur de la portion du plus petit arc de grand cercle reliant A à B. De plus $L(f)=R\phi_1$ équivaut à $\sin^2(\phi)\theta'^2\equiv 0$ soit $\theta'\equiv 0$ (car $sin^2(\phi(t))=0$ équivaut à $f(t)$ est l'un des pôles) soit $\theta\equiv\theta(1)=0$ et le chemin le plus court n'est atteint que pour la portion du plus petit arc de grand cercle reliant A à B, c'est à dire le méridien passant par A et B.

3. L'inégalité isopérimétrique

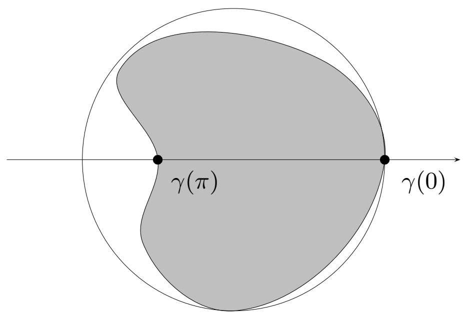
L'inégalité isopérimétrique dit que toute courbe plane fermée de longueur 2π délimite une aire de longueur $\leq\pi$; l'égalité n'ayant lieu que pour le cercle (il s'agit donc d'évaluer une aire de périmètre donné : on est donc aux frontière du thème).



Première démonstration : Les démonstrations usuelles de l'inégalité isopérimétriques utilisent les séries de Fourier, celle-ci (P.D.Lax, Amer. Math. Monthly, 1995), est plus simple bien que l'idée soit la même. On suppose la courbe paramétrée par

$$\gamma \ : \ [0, 2\pi] \ni\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

avec $|\gamma'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) = 1$ (i.e. la courbe est parcourue à vitesse constante, ou le paramétrage est normal (voir l'intro...) ce point n'est pas trivial et mérite justification, toutefois il est physiquement évident et on peut l'admettre pour traiter cet exemple... on en trouvera une justification à la fin du document...) ; on suppose aussi que l'on a positionné la courbe de telle sorte que que les points $(x(0), y(0))$ et $(x(\pi), y(\pi))$ se trouvent sur l'axe des abscisses, i.e. $y(0) = y(\pi) = 0$.



L'aire du domaine délimité par la courbe γ est donnée par

$$A = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} y(t)x'(t)dt := A_1 + A_2.$$

Nous allons montrer que les les deux quantités A_1 etA_2 sont majorées par $\pi/2$. Pour cela, en appliquant l'inégalité élémentaire $ab \leq 2^{-1}(a^2 + b^2)$ (avec égalité si et seulement si $a = b$) à $a = y(t), b = x'(t)^2$ on tire

$$A_1 = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)dt \leq 2^{-1} \int_0^{\pi} (y(t)^2 + x'(t)^2)dt \tag{1}$$

et comme $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$, on peut aussi écrire

$$A_1 \leq 2^{-1} \int_0^{\pi} (y(t)^2 + 1 - y'(t)^2)dt.$$

Mais $y(0) = y(\pi) = 0$ assure que y peut se factoriser sous la forme

$$y(t) = u(t)\sin(t)$$

sur $[0,\pi]$ (il n'est pas difficile de montrer que u est dérivable sur $[0,\pi]$, en 0 et π bien sûr...). De là, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
A_1 &\le 2^{-1}\int_0^\pi \left[u^2(t)(\sin^2(t)-\cos^2(t)) - 2u(t)u'(t)\sin(t)\cos(t) - u'^2(t)\sin^2(t)+1\right]dt\\
&\le 2^{-1}\int_0^\pi \left[\left(u^2(t)\sin(t)\cos(t)\right)' + 1 - u'^2(t)\sin^2(t)\right]dt\\
&\le 2^{-1}\int_0^\pi \left[1-u'^2(t)\sin^2(t)\right]dt \underset{\bigstar}{\le} 2^{-1}\int_0^\pi 1\cdot dt = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

soit $A_1 \le \pi/2$ comme convenu. L'égalité $A_1 = \pi/2$ implique une égalité dans ($\bigstar$) qui équivaut à $u'\sin \equiv 0$ sur $[0,\pi]$, soit $u' \equiv 0$ et $y(t) = C\cdot\sin(t)$. L'égalité assure aussi une égalité dans (1), qui, comme nous l'avons remarqué équivaut à $y(t) = x'(t) = \sqrt{1-y'^2(t)}$, soit finalement $y(t) = \pm\sin(t),\ x(t) = \mp\cos(t) + \text{constante}$ sur $[0,\pi]$, c'est l'équation d'un demi-cercle. On procède de même pour A_2 et le résultat suit en raccordant continuement les deux solutions. ❏

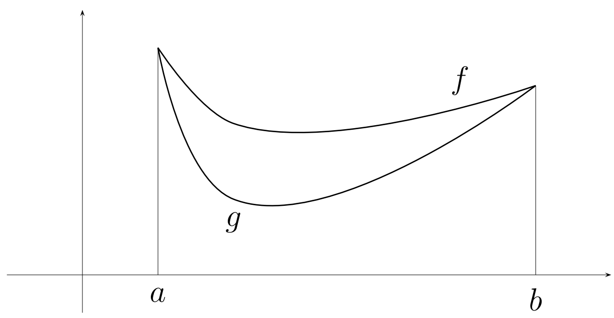
4. Quelques calculs

Exercice 1 : Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$ deux fonctions convexes telles que

$$f(a)=g(a),\ f(b)=g(b),\ \forall\, t\in[a,b]\ :\ g(t)\le f(t).$$

Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}dt \le \int_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}dt.$$



Sur la figure ci-dessus la solution est claire : si f et g sont convexes et coïncident aux extrémités de $[a,b]$ alors $g\le f$ implique que la longueur du graphe de f est plus petite que celle du graphe de g. Établissons rigoureusement ce résultat : soit $\psi(t) = (1+t^2)^{1/2}$, comme $\psi''(t) = (1+t^2)^{1/2} > 0$, ψ est convexe sur $\mathbb{R}$ et par Tayor-Lagrange :

$$\psi(t) = \psi(s) + (t-s)\psi'(s) + \frac{(t-s)^2}{2}\psi''(\zeta) \ge \psi(s) + (t-s)\psi'(s),\quad \forall\, s,t\in\mathbb{R},$$

avec égalité si et seulement si $t=s$. En particulier, pour tout $t\in[a,b]$:

$$(1+g'(t)^2)^{1/2} \ge (1+f'(t)^2)^{1/2} + (g'(t)-f'(t))\psi'(f'(t))$$

et si on intègre ces inégalités :

$$\int_a^b (1+g'(t)^2)^{1/2}dt \ge \int_a^b (1+f'(t)^2)^{1/2}dt + \int_a^b (g'(t)-f'(t))\psi'(f'(t))dt$$

avec égalité si, et seulement si $f'=g'$, soit vu les conditions intiales $f=g$. Pour établir le résultat il est suffisant de montrer que

$$\int_a^b (g'(t)-f'(t))\psi'(f'(t))dt \ge 0.$$

C'est facile si on suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ (ce qui peut suffire pour l'oral...), en effet on peut alors faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b (g'(t)-f'(t))\psi'(f'(t))dt &= [(g(t)-f(t))\psi'(f'(t))]_a^b - \int_a^b (g(t)-f(t))\left(\psi'(f'(t))\right)' dt\\ &= 0 - \int_a^b (g(t)-f(t))\psi''(f'(t))f''(t)dt \geq 0\end{aligned}$$

car $g-f\leq 0,\ \psi''>0$ et $f''\geq 0$. Si f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ il faut être plus délicat et appliquer le second théorème de la moyenne[1] : il existe $\zeta\in[a,b]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b (g'(t)-f'(t))\psi'(f'(t))dt &= \psi'(f'(a))\int_a^\zeta (g'(t)-f'(t))dt + \psi'(f'(b))\int_\zeta^b (g'(t)-f'(t))dt\\ &= [\psi'(f'(b))-\psi'(f'(a))]\,(f(\zeta)-g(\zeta))\geq 0\end{aligned}$$

car $f\geq g$ et $\psi'(f')$ croissante sur $[a,b]$ car f et ψ sont convexes. CQFD. ❏

Exercice 2 : Une parabole intersecte un disque de rayon 1. Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le disque soit supérieure ou égale à 4 ?

Sans perdre de généralité (quitte à faire une translation), on peut prendre comme cercle celui d'équation $(\mathscr{C})\ :\ x^2+(y-1)^2=1$ et comme parabole, celle d'équation $(\mathscr{P}_k)\ :\ y=kx^2$ (si la parabole n'est pas tangente au cercle, on imagine bien qu'en « l'enfoncant » un peu plus, la longueur de l'arc inscrit ne peut qu'augmenter). $(\mathscr{P}_k)$ est alors tangente à $(\mathscr{C})$ en $(0,0)$ et pour $k>\frac{1}{2}$, l'intersecte en les deux points

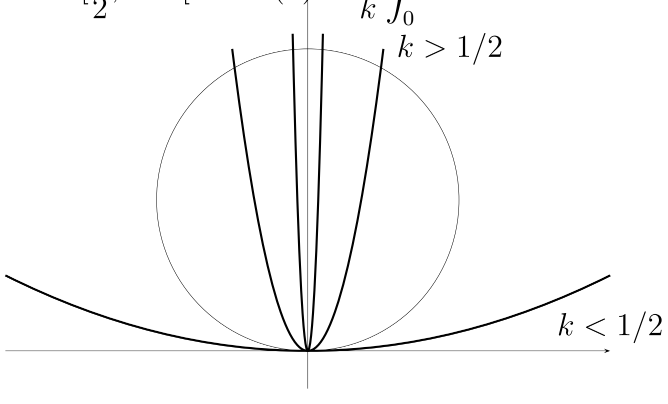
$$\left(\pm\frac{\sqrt{2k-1}}{k},\frac{2k-1}{k}\right).$$

La longueur d'arc inscrite dans le disque est donc

$$L(k)=2\int_0^{\frac{\sqrt{2k-1}}{k}}\sqrt{1+4k^2t^2}dt=\frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}}\sqrt{1+u^2}du,$$

(après le changement de variable $u=2kt$). Il s'agit donc d'étudier le maximum de

(✘) $$L\ :\ k\in[\frac{1}{2},+\infty[\ \mapsto\ L(k)=\frac{1}{k}\int_0^{2\sqrt{2k-1}}\sqrt{1+u^2}du.$$



[1] Arnaudies-Fraysse : Analyse, T2, page 368 : si u est monotone sur $[a,b]$ et v bornée intégrable alors il existe $\zeta\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b u(t)v(t)dt=u(a)\int_a^\zeta v(t)dt+u(b)\int_\zeta^b v(t)dt$$

Commencons par quelques observations (voir la figure) : pour $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$ la parabole se trouve à l'extérieur du disque et $L(k) \equiv 0$; le cas $k > \frac{1}{2}$ est celui qui nous intéresse puisque $L(k) > 0$ d'après (✘) ; enfin si k tends vers $+\infty$ la parabole dégénère cette fois-ci en deux demi-droites confondues $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ ce qui donne comme intersection deux fois le segment $\{0\} \times [0, 2]$ soit une longueur égale à 4. Il semble donc que notre fonction L croit strictement sur $\mathbb{R}_+^\star$ de 0 à 4. Mais il faut toutefois se méfier des impressions, en effet nous allons maintenant vérifier que L n'est pas strictement monotone et même prends des valeurs strictement plus grandes que 4. Justifions cette dernière affirmation :

$$\begin{aligned}
L(k) &= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \sqrt{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \left(\sqrt{1+u^2} - u\right) du + \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} udu \\
&= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + \frac{4(2k-1)}{2k} \\
&= \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} + 4 - \frac{2}{k} \\
&= \frac{1}{k} I(k) + 4 - \frac{2}{k},
\end{aligned}$$

ainsi,

$$L(k) > 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} > 2$$

mais la fonction croissante I vérifie

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} = +\infty$$

car la fonction intégrande est clairement non intégrable en $+\infty$: il existe donc $k_0 > \frac{1}{2}$ tel que $k > k_0 \;\Rightarrow\; I(k) > 1$ et par suite

$$\exists\, k_o > \frac{1}{2} \quad : \quad k > k_0 \quad \Longrightarrow L(k) > 4.$$

❑

🛈 **Remarques :** ➪ La fonction continue L nulle en $1/2$ tend vers tout de même vers 4 en $+\infty$ car

$$L(k) = \frac{1}{k} I(k) + 4 - \frac{2}{k}$$

et

$$0 \leq \frac{1}{k} I(k) = \frac{1}{k} \int_0^{2\sqrt{2k-1}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}+u} \leq \frac{2\sqrt{2k-1}}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

➪ Vu les variations de L, notre fonction est bornée sur $[1/2, +\infty[$ et atteint son maximum pour une valeur $1/2 < m < +\infty$. En utilisant un logiciel de calcul, on peut donner une valeur approchée de m.........autour de $4,001$...semble-t-il.

On peut s'étonner que pour résoudre cet exercice on n'étudie pas la fonction L. En effet il n'est pas trés difficile de trouver une primitive :

$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2t\sqrt{2t-1}} + \frac{1}{2}\log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

mais son apparence peu sympathique nous enlève les dernières envies de calculer la dérivée de L pour étudier ses variations....

Exercice 3 : L est la longueur de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\quad a>b>1.$$

❶ Montrer que $\pi(a+b)\leq L\leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

❷ Montrer que

$$L=2\pi a\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2\frac{\mathbf{e}^{2n}}{2n-1}\right)$$

$\mathbf{e}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ étant l'exentricité de l'ellipse.

❶ L'équation paramétrique de l'ellipse étant

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos(t),\\ y(t) &= b\sin(t),\quad 0\leq t\leq 2\pi,\end{cases}$$

sa longueur est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt\\ &= 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt+4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt\\ &= 4\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}+\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\right)dt\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement $t=\pi/2-s$ dans la seconde intégrale de la seconde ligne. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'intégrande dans la dernière intégrale est une fonction croissante sur $[0,\pi/4]$.

❷ Nous avons

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2+(a^2-b^2)\cos^2(t)}dt\\ &= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\mathbf{e^2}\cos^2(t)}dt\end{aligned}$$

Nous avons pour $|u|<1$

$$\sqrt{1-u}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n.$$

En posant $u=\mathbf{e}\cos(t)\in]-1,1[$, on a par convergence normale de la série entière sur $[0,\pi/2]$

$$L=4a\left(\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2}\mathbf{e}^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)dt\right),$$

où l'on reconnait l'intégrale de Wallis

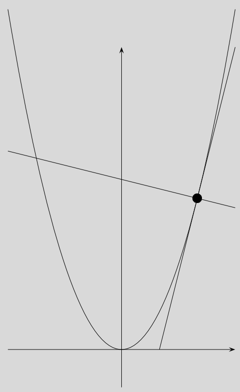
$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)dt=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

le résultat suit. ❑

Exercice 4 : Longueur d'une courbe en coordonnées polaires : Montrer qu'une courbe d'équation polaire $r = f(\theta),\ f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ admet pour longueur
$$L = \int_a^b \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}d\theta.$$
Application : Déterminer la longueur de la courbe d'équation en coordonnées polaires $r = a\sin^3(\theta/3),\ \theta \in [0, 3\pi]$.

L'équation paramétrique de notre courbe est
$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta),\ y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta), \quad \theta \in [a,b],$$
donc aprés un petit calcul élémentaire, sa longueur est donnée par
$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}d\theta = \int_a^b \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}d\theta.$$
Pour l'application, un calcul élémentaire donne $L = 3a\pi/2$ (attention il faut bien entendu être en mesure de donner l'allure de cette courbe en polaire !) ❏

Exercice 5 : On considère un point P, distinct de l'origine et situé sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q. Déterminer P pour que l'arc de parabole soit minimum.



Considérons un point $(x, x^2),\ (x > 0)$ sur la parabole. La pente de la normale à $(\mathscr{P})$ passant par (x, x^2) vaut $-1/2x$; si elle recoupe la parabole au point (z, z^2) nous aurons donc
$$\frac{z^2 - x^2}{z - x} = -\frac{1}{2x}$$
soit comme $x > 0$:
$$z = z(x) = -x - 1/2x = -\frac{2x^2+1}{2x}.$$
La formule pour la longueur d'un arc nous donne
$$s(x) = u(x) - u(z(x)), \qquad \text{avec} \quad u(a) = \int_0^a \sqrt{1+4t^2}dt$$
et il s'agit de minimiser $x \mapsto s(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Avec le théorème fondamental du calcul intégral nous avons
$$s'(x) = \sqrt{1+4x^2} - z'(x)\sqrt{1+4z^2(x)}, \qquad x > 0$$
qui se réduit aprés quelques calculs algébriques à
$$1 - 3x^2 = 0$$
i.e. $x = 1/\sqrt{3}$ et $x = -1/\sqrt{3}$ par symétrie. ❏

Exercice 6 : Un ver de terre a faim, il s'introduit dans une pomme (de forme sphérique) de 51mm de rayon en un point A il en ressort plus tard, rassasié et ayant parcouru dans la pomme un chemin de 101mm en un point B. Montrer qu'il est toujours possible de couper la pomme en deux demi-hémisphères où l'un d'entre-eux n'a pas été souillé par le ver.

Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.4 avril 2008 *lassere@picard.ups−tlse.fr*