L1 - SDI - FEUILLE 10 : Réduction d'endomorphisme

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (2x, x - y).$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale ? Si oui, écrivez la martice de f dans cette base.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ dans cette base ?
4. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n dans la base canonique ?

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. Trouver un vecteur $v = (x, y)$ tel que $f(v) = v$.
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Quelle est la nature géométrique de f ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Donner les valeurs propres de f si $\theta = 0$ ou π.
3. Montrer que f n'admet aucune valeur propre si $\theta \neq 0$ ou π.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que 1 et 3 sont valeurs propres et donner des vecteurs propres associés.

2. En déduire que f est diagonalisable.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 5. On se propose de rechercher les endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\text{Pour toute base } (e_1, e_2) \text{ de } \mathbb{R}^2, \ \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)} f \text{ est diagonale.} \qquad \text{(P)}$$

1. Démontrer que toute homothétie vectorielle vérifie (P).
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P) et soit $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ sa matrice dans une base (e_1, e_2) de R^2.
   a) Démontrer que $(e_1, e_1 + e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) En déduire $a = b$.
   c) Quels sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P) ?

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Donner le noyau et l'image de f.
3. Trouver les valeurs propres de f et des vecteurs propres associés.
4. Soit A' la matrice de f dans la base de vecteurs propres obtenue. Calculer A'^n et en déduire A^n.
5. Trouver une matrice B telle que $B^2 = A'$. En déduire une matrice C telle que $C^2 = A$.
6. Posons $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   a) Calculer $A'M$ et MA'.
   b) Quelles sont les matrices M qui commutent avec A' ?
   c) En déduire l'expression des matrices commutant avec A.

Exercice 7. Mêmes questions avec $f(x, y) = (x - y, 2x + 4y)$.

Exercice 8. Mêmes questions avec $f(x, y) = (-11x + 10y, -30x + 24y)$.

Exercice 9. Mêmes questions avec $f(x, y) = (5x - y, -x + 5y)$.